参考粒子在α磁铁中的运动

吴钢[1)] 陆辉华

(中国科学院高能物理研究所 北京 100049)

摘要 给出参考粒子对α磁铁入出射角的理论计算, 以及参考粒子在均匀梯度磁场内运动轨迹的解析解, 从物理上解释了α磁铁的消色散原理.

关键词 参考粒子 α磁铁 入射角

1 引言

由热阴极微波电子枪和α磁铁构成的电子束注入器, 已获得较多的应用, 仅在国内即有3家加速器实验室采用这种技术. α磁铁实际是半块四极磁铁, 在它的两个磁极之间能够建立起等梯度磁场. 在中心面上, 电子束沿41°角入射此空间, 恰好可在同一位置以镜像夹角出射, 出射角与电子能量无关, 因此整块磁铁可用作消色散束流传输元件. 在磁铁内部, 不同能量的电子仍沿不同的路径运动, 利用这种差异可以实现束团压缩和能量过滤.

关于α磁铁的传输特性, 早有文献给出相应的描述[1], 而粒子在磁铁内的运动一般由模拟计算得出, 无法方便地代入变量. 本文试图对参考粒子在α磁铁中的运动给出一个解析的答案.

2 求解运动方程

图1给出入射粒子相对于α磁铁的坐标关系, 已有文献[2]推导出入射粒子的运动方程组, 由于参考粒子只在中心面运动, 即参考粒子的$z\equiv 0$, 方程可简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=ax\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-ax\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\tag{1}$$

式中$a=eg/m_0\gamma$, g为x向磁场梯度(设磁极在y向无限长), m_0为电子静止质量. 由于粒子速率保持不变, 可设粒子在原点的速率为v_0, 以θ_i角入射α磁铁(见图2), 于是有:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y=-\frac{1}{2}ax^2+v_{\mathrm{i}y}=\frac{a}{2}(x_1^2-x^2),\tag{2}$$

式中$v_{\mathrm{i}y}=v_o\sin\theta_\mathrm{i}$, $x_1\equiv\sqrt{2v_{\mathrm{i}y}/a}$, 此外, 我们还有$v_{\mathrm{i}x}=v_o\cos\theta_\mathrm{i}$. 代入前式两边积分得:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x=\pm\sqrt{-\frac{1}{4}a^2x^4+av_{\mathrm{i}y}x^2+v_{\mathrm{i}x}^2}=\pm\frac{a}{2}\sqrt{(\kappa^2-x^2)(\lambda^2+x^2)},\tag{3}$$

此处$\kappa=\sqrt{2(v_0+v_{\mathrm{i}y})/a}=2\sqrt{v_0/a}\ \cos\varphi$, $\lambda=\sqrt{2(v_0-v_{\mathrm{i}y})/a}=2\sqrt{v_0/a}\ \sin\varphi$, 等式右边正号对应于粒子在前半程的运动, 负号对应于后半程. 图2显示出角度关系$2\varphi+\theta_\mathrm{i}=90°$. 当$v_x=0$时, 粒子到达远端, $x_{\max}=\kappa$, 此后粒子沿镜像路径回归y轴. 当$x=x_1$时, $v_y=0$, 粒子在y向到达极限位置. 出射角$\theta_\mathrm{f}=\arctan(v_{fy}/v_{fx})$, 而$v_y$与$v_x$仅是$x$的变量, 所以粒子在$y$轴恒有$\theta_f=\theta_\mathrm{i}$, 亦即α磁铁对任意入射角都形成镜像传输, 其轨迹对称轴通过点$(x_{\max}, y(x_{\max}))$. 两式相除消去$\mathrm{d}t$后,

$$y(x)=\int_0^x\frac{x_1^2-u^2}{\sqrt{(\kappa^2-u^2)(\lambda^2+u^2)}}\mathrm{d}u.\tag{4}$$

令$k=\kappa/\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}$, 可将等式右边化为椭圆积分[3], 于是$y(x_{\max})=y(\kappa)=0$, 即参考粒子轨迹关于$x$轴对称的要求等效于,

$$\frac{x_1^2}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\lambda^2}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{v_0/a}[K(k)-2E(k)]=0,\tag{5}$$

式中$E(k)$和$K(k)$都是完全椭圆积分, 查完全椭圆

1) E-mail: wug@mail.ihep.ac.cn

积分表[3]可知: $K(k)=2E(k)\approx 2.326$, 因为 $k=\kappa/\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}=\cos\varphi$, 而此时 $k\approx\sin 65.5°\approx 0.91$, 所以 $\varphi\approx 24.5°$, 即 $\theta_{\rm i}\approx 41°$. 粒子以 $\theta_{\rm i}$ 入射 α 磁铁如同光束射向镜面会发生反射, 而这种反射与初始速率 v_0 无关, 所以它是消色散的.

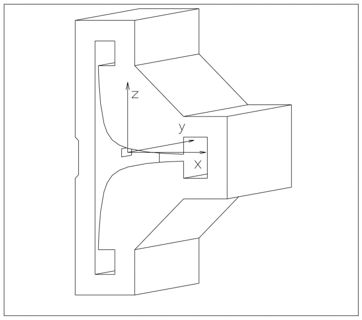

图 1　入射粒子相对磁铁的坐标关系

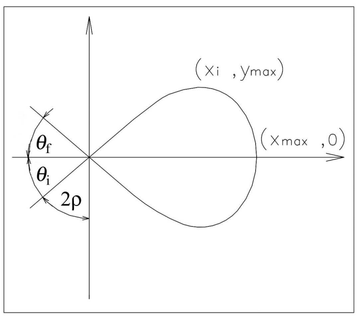

图 2　参考粒子在中心平面的运动轨迹

3　总结

根据上述结论可得粒子在 α 磁铁中的回转直径:

$$x_{\max}=\kappa=2\cos\varphi\sqrt{\frac{m_0c\beta\gamma}{eg}}=0.075\sqrt{\frac{\beta\gamma}{g}}. \tag{6}$$

在 y 向粒子回转的半宽度为

$$y_{\max}=-\int_{x_1}^{\kappa}\frac{x_1^2-u^2}{\sqrt{(\kappa^2-u^2)(\lambda^2+u^2)}}{\rm d}u=\sqrt{v_0/a}[2E(k,\phi)-K(k,\phi)], \tag{7}$$

此处 $k=\sin 65.5°=\cos\varphi$, $\phi=\arccos(x_1/\kappa)=\arccos(\sqrt{2\cos(2\varphi)}/2\cos\varphi)\approx 51°$, 查表得 $F(65.5,51)\approx 0.97$, $E(65.5,51)\approx 0.79$, 代入上式可得:

$$y_{\max}=\frac{x_{\max}}{3}=0.025\sqrt{\frac{\beta\gamma}{g}}. \tag{8}$$

利用线积分可求得轨迹长度:

$$S=2\int_0^{x_{\max}}\sqrt{1+\left(\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x}\right)^2}{\rm d}x=2\int_0^{\kappa}\frac{\sqrt{(\kappa^2-u^2)(\lambda^2+u^2)+(x_1^2-u^2)^2}}{\sqrt{(\kappa^2-u^2)(\lambda^2+u^2)}}{\rm d}u, \tag{9}$$

积分号内展开式的分子项可简化为 $2v_0/a$, 于是,

$$S=4\frac{v_0}{a}\int_0^{\kappa}\frac{{\rm d}u}{\sqrt{(\kappa^2-u^2)(\lambda^2+u^2)}}=2\sqrt{v_0/a}K(\cos\varphi)=2.56x_{\max}=0.192\sqrt{\frac{\beta\gamma}{g}}. \tag{10}$$

从上述结论我们看出, 对于给定的磁场梯度, 粒子轨迹长度等参数皆正比于粒子动量的平方根, 这为我们压缩束团提供了条件.

参考文献(References)

1 Enge H A. Rev. Sci. Instr., 1963, **34**: 385—388

2 XIAO Xiao-Guang et al. High Power Laser and Particle Beams, 2003, **15**: 817—820(in Chinese)
(肖效光等. 强激光与粒子束, 2003, **15**: 817—820)

3 Mathematical Manual. People Education Press, 1979. 605—606, 1321—1322 (in Chinese)
(数学手册. 人民教育出版社, 1979. 605—606, 1321—1322)

Motion of the Reference Particle in an Alpha Magnet

WU Gang[1)]　LU Hui-Hua

(Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100049, China)

Abstract　Alpha magnet is an important component of a short-bunch electron beam injector. In order to realize an achromatic transport , the reference particle should be injected into the alpha magnet with a correct angle. This paper describes an attempt to solve the equations of motion of the reference particle and to find the correct angle. The result, including how to determine the trajectory of the reference particle moving in the magnet, can help us understand the process of the achromatic transport of electron beam through the alpha magnet at a deeper level.

Key words　reference particle, alpha magnet, injecting angle

1) E-mail: wug@mail.ihep.ac.cn