六次非简谐振子的多尺度微扰理论

程衍富[1)]　戴同庆

(中南民族大学电子信息工程学院　武汉　430074)

摘要　应用多尺度微扰理论, 对于弱耦合常数的六次非简谐振子得到了其运动方程的经典和量子情况下的一阶解. 与Taylor级数解不同的是, 无论是在经典和量子解中频率移动出现在各阶表达式中, 因此多尺度微扰理论是优于Taylor级数解的一种处理弱耦合常数非简谐振动的近似方法.

关键词　六次非简谐振子　多尺度微扰理论　经典和量子解

1　引言

数学物理中一个问题往往存在着多种解法, 最典型的莫过于非简谐振动. 在经典物理中单位质量、单位频率的四次非简谐振动运动方程为

$$\ddot{x}+x+\varepsilon x^3=0, \tag{1}$$

式中ε为大于零的小参数非谐常数, 方程(1)即著名的Duffing方程. 该方程在相位平面上是可以精确求解的, 但是粒子运动的时间行为并不能由相平面的解来说明. 普通的微扰理论可以给出系统的时间行为, 但是其解出现了时间的长期项, 即当时间趋于无穷时解是非有限的, 这与问题的物理事实矛盾. 因此针对此问题产生了多种近似解法, 坐标变换法, 多尺度微扰法[1]和Taylor级数[2]展开等. 这些方法本质上是为了消除普通微扰法中的长期项, 使解更符合物理实际. 与经典四次非谐振动对应的量子问题也是如此, 几年前Bender和Bettencourt[3, 4]用多尺度微扰法给出了此问题的一阶解, 最近Pathak和Mandal[5]又用Taylor级数重解了此问题并给出了直到ε^2阶解. 现在量子非谐振子问题正沿着两个方向推广, 一是对量子四次非谐振子给出直到ε^n阶解, Auberson[6]等人用多尺度微扰法完成了这一工作; 二是把量子四次非谐振子推广到$2m(m>2)$次, 最近Pathak[7]等用Taylor级数研究了量子六次、八次非谐振子. Taylor级数解法虽然原则上能给出高次非谐振子的经典和量子解, 但是解法太繁锁, 确实不是非线性振动中的最好解法. 多尺度微扰法在解经典和量子非简谐振动中一直发挥着重要作用[8, 9], 本文将用这一方法给出经典和量子六次非简谐振子的解.

2　经典六次非谐振子的多尺度微扰解

单位质量、单位频率的六次非谐振子的运动方程为

$$\ddot{x}+x+\varepsilon x^5=0, \tag{2}$$

式中ε为大于零的小参数非谐常数. 引入多尺度, 独立的时间变量$T_0=t$, $T_1=\varepsilon t$, $T_2=\varepsilon^2 t$, $\cdots$, 考虑方程(2)的一阶微扰解

$$x(t)=x_0(T_0,T_1)+\varepsilon x_1(T_0,T_1), \tag{3}$$

即在一阶微扰解下, 方程(2)的解成为两独立时间尺度的函数$x(t)=x(T_0,T_1)$. 由多元函数微分法则, 原来函数对时间的微分变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=D_0+\varepsilon D_1, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}=D_0^2+2\varepsilon D_0 D_1. \tag{5}$$

其中$D_n=\partial/\partial T_n$. 把方程(3)代入到方程(2), 并取$\varepsilon$的同幂次系数相等

$$D_0^2 x_0+x_0=0, \tag{6}$$

$$D_0^2 x_1+x_1=-2D_0D_1x_0-x_0^5. \tag{7}$$

2005 – 08 – 23 收稿

1) E-mail: chengyf@scuec.edu.cn

设方程(6)的解为

$$x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}A\exp(-\mathrm{i}T_0)+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{A}\exp(\mathrm{i}T_0). \quad (8)$$

式中积分常数A只与T_1有关, $\bar{A}$是A的共轭复数. 把上述解代入到方程(7)有

$$D_0^2x_1+x_1 = -\sqrt{2}\left(\mathrm{i}D_1\bar{A}+\frac{5}{4}\bar{A}^3A^2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0}- \frac{1}{4\sqrt{2}}(\bar{A}^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}5T_0}+5\bar{A}^4A\mathrm{e}^{\mathrm{i}3T_0})+\mathrm{c.c}. \quad (9)$$

为了消除微扰解中的长期项, 只有令指数为$\exp(\pm\mathrm{i}T_0)$的共振项系数为零, 即有

$$\mathrm{i}\frac{\partial\bar{A}}{\partial T_1}+\frac{5}{4}\bar{A}^3A^2=0. \quad (10)$$

若设$\bar{A}=B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, 其中$B,\beta$都是$T_1$的实函数. 把其代入到方程(10)并使实部和虚部分别相等

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}T_1}=0, \quad (11)$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}T_1}+\frac{5}{4}B^4=0. \quad (12)$$

由方程(11)知B为与T_1无关的常数. 由方程(12)解得$\beta=\frac{5}{4}B^4T_1+\beta_0=\alpha T_1+\beta_0$. 此时方程(9)化为

$$D_0^2x_1+x_1=-\frac{1}{4\sqrt{2}}(B^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\gamma}+5B^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\gamma})+\mathrm{c.c}. \quad (13)$$

式中$\gamma=T_0+\alpha T_1+\beta$. 方程(13)的特解为

$$x_1=\frac{1}{96\sqrt{2}}B^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\gamma}+\frac{5}{32\sqrt{2}}B^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\gamma}+\mathrm{c.c}, \quad (14)$$

考虑解x_0和x_1, 有多尺度微扰解

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}+\varepsilon\frac{1}{96\sqrt{2}}B^5(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\gamma}+15\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\gamma})+\mathrm{c.c}. \quad (15)$$

如果有初始条件$x_0(0,0)=F$, $\dot{x}_0(0,0)=0$, 所以$B=F/\sqrt{2}$, $\beta_0=0$, 那么$\bar{A}=B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha T_1}$. 此时方程(8)变为

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}B(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(T_0+\alpha T_1)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(T_0+\alpha T_1)})= F\cos(T_0+\alpha T_1)=F\cos\Omega t. \quad (16)$$

式中

$$\Omega t=T_0+\alpha T_1=\left(1+\varepsilon\frac{5}{16}F^4\right)t. \quad (17)$$

即解出现了频率移动, 这正是非谐振项引入的结果. 那么多尺度微扰解为

$$x=F\cos\Omega t+\varepsilon\frac{1}{384}F^5(\cos5\Omega t+15\cos3\Omega t). \quad (18)$$

结果与Taylor级数展开的差别在于三角函数内所有变量都是Ωt, 而Taylor级数展开中只有零阶解里的变量才为Ωt, 一阶解里并没有出现频率的移动[7]. 显然多尺度解法能给出六次非谐振动正确的经典解.

3 量子六次非谐振子的多尺度解

量子六次非谐振子的运动方程为

$$\ddot{X}+X+\varepsilon X^5=0. \quad (19)$$

现在应用多尺度微扰方法到方程(19). 只考虑到一阶解, 取$T_0=t$, $T_1=\varepsilon t$, 有

$$X(t)=X_0(T_0,T_1)+\varepsilon X_1(T_0,T_1). \quad (20)$$

把方程(20)代入到方程(19)并由方程(4)和(5)有

$$D_0^2X_0+X_0=0, \quad (21)$$

$$D_0^2X_1+X_1=-2D_1D_0X_0-X_0^5. \quad (22)$$

量子情况下应有对易关系

$$[X(t),\dot{X}(t)]=\mathrm{i}, \quad (23)$$

这里

$$\dot{X}(t)=D_0X_0+\varepsilon(D_1X_0+D_0X_1). \quad (24)$$

由方程(20), (24)和(23), 考虑ε的同幂次系数, 则对易关系变为

$$[X_0,D_0X_0]=\mathrm{i}, \quad (25)$$

$$[X_0,D_1X_0+D_0X_1]+[X_1,D_0X_0]=0, \quad (26)$$

$$[X_1,D_1X_0+D_0X_1]=0. \quad (27)$$

方程(21)的解为复数形式

$$X_0(T_0,T_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(A^+(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T_0}A(T_1)), \quad (28)$$

A^+为A的厄米共轭. 在$T_0=0$的条件下, 由方程(28)和(25)有

$$[A(T_1),A^+(T_1)]=1. \quad (29)$$

把方程的解(28)代入到方程(22), 同时利用对易关系(29), 并让$\exp(\pm\mathrm{i}T_0)$的系数为零则有

$$-\mathrm{i}\sqrt{2}D_1A^+=\frac{5}{4\sqrt{2}}(2A^{+3}A^2+6A^{+2}A+3A^+), \quad (30)$$

$$\mathrm{i}\sqrt{2}D_1A=\frac{5}{4\sqrt{2}}(2A^{+2}A^3+6A^+A^2+3A), \quad (31)$$

$$D_0^2X_1+X_1= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\{A^{+5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5T_0}+(5A^{+4}A+10A^{+3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}3T_0}+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3T_0}(5A^+A^4+10A^3)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5T_0}A^5\}. \quad (32)$$

用A右乘(30), 同时用A^+左乘(31)并且两式相减有

$$\frac{\partial(A^+A)}{\partial T_1}=0. \tag{33}$$

则$N=A^+A$是与T_0, T_1无关的常数算符. A, A^+, N之间的对易关系为

$$[A,A^+]=1,\quad [A,N]=A,\quad [A^+,N]=-A^+. \tag{34}$$

若把算符A^+进一步写成指数形式: $A^+=B^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^+}$, 把其代入到方程(30)并利用对易关系(34), 然后让其实部和虚部分别相等有

$$\frac{\mathrm{d}B^+}{\mathrm{d}T_1}=0, \tag{35}$$

$$\sqrt{2}B^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^+}\frac{\mathrm{d}\beta^+}{\mathrm{d}T_1}=\frac{5}{4\sqrt{2}}B^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^+}(2N^2+4N+3). \tag{36}$$

即B^+是与时间T_1无关的常量算符, 而β^+满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}\beta^+}{\mathrm{d}T_1}=\frac{5}{8}(2N^2+4N+3). \tag{37}$$

同理把A^+的共轭算符$A=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}B$代入到方程(31)可得$B$与时间$T_1$无关, 且

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}T_1}=\frac{5}{8}(2N^2+4N+3). \tag{38}$$

由方程(37)和(38)知$\beta^+(T_1)=\beta(T_1)$为厄米算符. 那么有

$$N=A^+A=B^+B,\quad [B,B^+]=1. \tag{39}$$

此时方程(38)的解为

$$\beta=\frac{5}{8}(2N^2+4N+3)T_1. \tag{40}$$

取积分常数为零并不失去一般性, 因为B, B^+为复数型的常量算符, 它需要由初始条件决定. 那么零阶解为

$$X_0(T_0,T_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(B^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(T_0+\alpha T_1)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(T_0+\alpha T_1)}B\right). \tag{41}$$

这里$\alpha=\frac{5}{8}(2N^2+4N+3)$为常数算符. 或者

$$X_0(T_0,T_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(B^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}B\right), \tag{42}$$

其中

$$\Omega=1+\varepsilon\alpha=1+\varepsilon\frac{5}{8}(2N^2+4N+3). \tag{43}$$

解(41)满足等时对易关系(25), 并且也出现了频率移动.

由方程(39), 有如下关系:

$$f(N)B^+=B^+f(N+1),\quad Bf(N)=f(N+1)B. \tag{44}$$

由于算符β是算符N的函数, 则令$f(N)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, 有

$$A^{+5}=B^{+5}\exp\left(\mathrm{i}\frac{25}{8}(2N^2+12N+23)T_1\right), \tag{45}$$

$$\begin{aligned}&5A^{+4}A+10A^{+3}=\\&B^{+3}(5N+10)\exp\left(\mathrm{i}\frac{5}{8}(6N^2+24N+31)T_1\right),\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}&5A^{+}A^{4}+10A^{3}=\\&\exp\left(-\mathrm{i}\frac{5}{8}(6N^2+24N+31)T_1\right)(5N+10)B^3,\end{aligned} \tag{47}$$

$$A^5=\exp\left(-\mathrm{i}\frac{25}{8}(2N^2+12N+23)T_1\right)B^5. \tag{48}$$

令$\gamma=\frac{5}{8}(2N^2+12N+23)$, $\delta=\frac{5}{24}(6N^2+24N+31)$, 则方程(32)化为

$$\begin{aligned}D_0^2X_1+X_1=&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\{B^{+5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5(T_0+\gamma T_1)}+\\&B^{+3}(5N+10)\mathrm{e}^{\mathrm{i}3(T_0+\delta T_1)}+\mathrm{c.c}\}.\end{aligned} \tag{49}$$

方程(49)的特解为

$$\begin{aligned}X_1=&\frac{1}{96\sqrt{2}}B^{+5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5(T_0+\gamma T_1)}+\\&\frac{5}{32\sqrt{2}}B^{+3}(N+2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}3(T_0+\delta T_1)}+\mathrm{c.c}.\end{aligned} \tag{50}$$

则量子情况下多尺度微扰解为

$$\begin{aligned}X=&\frac{1}{\sqrt{2}}B^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(T_0+\alpha T_1)}+\varepsilon\frac{1}{96\sqrt{2}}\times\\&\left(B^{+5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5(T_0+\gamma T_1)}+15B^{+3}(N+2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}3(T_0+\delta T_1)}\right)+\mathrm{c.c}.\end{aligned} \tag{51}$$

这个结果比Taylor级数解[7]的解析表达式更简洁, 并且能方便地与经典结果进行比较.

4　讨论和结论

首先量子与经典解的重要差别是要考虑对易关系, 我们在求解的过程中用了对易关系(25), 并由此得出了量子情况下的解. 方程(25)是等时对易关系(23)的零阶结果, 其一阶、二阶结果为方程(26)和(27), 可以证明, 我们的解是满足这两个对易关系的. 可见把等时对易关系按微扰阶给出能够为使用多尺度微扰理论解决类似的问题提供方便的途径. 在处理量子四次非谐振子问题时,Bender和Bettencourt[4]给出的对易关系并不能直接推广到我们的情况. Auberson[6]在处理相同的问题时也得出了类似方程(29)的对易关系, 但是属于强加的关系. 因此

我们的对易关系的导出十分清楚, 并可以推广到高阶情况.

第二, 我们要把所得结果和经典情况进行比较. 为了更好地理解解的物理含义, 可引入无微扰时的初始条件. 设 $t=0$ 时, $X_0(0,0)=Q_0$, $D_0X_0(0,0)=P_0$, 则由(25)有

$$[Q_0,P_0]=\mathrm{i}. \tag{52}$$

那么由式(41)有

$$B=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0+\mathrm{i}P_0),\quad B^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0-\mathrm{i}P_0). \tag{53}$$

或者

$$Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(B^++B),\quad P_0=\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}(B^+-B). \tag{54}$$

可见 B^+,B 分别是无微扰时场的产生和湮没算符. 那么 $N=B^+B$ 为场的粒子数算符, 此时

$$N=A^+A=B^+B. \tag{55}$$

则 A^+, A 分别是Heisenberg表象中的产生和湮没算符. 当 $N\gg 1$ 时, 量子应过渡到经典极限. 由于 $N\gg 1$ 时, $\alpha\approx\gamma\approx\delta\approx\frac{5}{4}N^2$, 故我们量子情况的解(51)的极限正是经典解(15).

最后考虑系统的能量. 已知在一阶微扰近似下六次非简谐振子第 n 个能态的能量为[7]

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{5\varepsilon}{48}(4n^3+6n^2+8n+3). \tag{56}$$

如果考虑两个连续的能级差有

$$\Delta E=E_n-E_{n+1}=1+\varepsilon\frac{5}{8}(2n^2+4n+3). \tag{57}$$

这正是我们的零级解中的频率移动 Ω. 至于一阶解中的 γ, δ 与 α 的差异正是 B,B^+ 的不对易带来的结果. 以前人们用多尺度微扰解处理非简谐振子时虽然频率移动给出了直到二阶的结果, 但坐标算符或产生算符的时间演化只给出了其零阶表达式[6]. Taylor级数[7]对此问题的处理虽然给出了一阶解, 但在一阶解中却不出现任何频率的移动, 而多尺度微扰理论则能对此类非简谐振子问题给出正确的结论.

参考文献(References)

1 Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: Wiley, 1981
2 Mandal S. J. Phys., 1998, **A31**: L501
3 Bender C M, Bettencourt M A. Phys. Rev. Lett., 1996, **77**: 4114
4 Bender C M, Bettencourt M A. Phys. Rev., 1996, **D54**: 7710
5 Pathak A, Mandal S. Phys. Lett., 2001, **A261**:276
6 Auberson G, Capdequi P M. Phys. Rev., 2002, **A65**: 1
7 Pathak A, Mandal S. Phys. Lett., 2002, **A298**: 259
8 Janowicz M. Phys. Rrp., 2003, **375**: 327
9 Kahn P B, Zarmi Y. Amer. J. Phys., 2004, **72**: 538

Multiple-Scale Perturbation Theory of Sextic Anharmonic Oscillator

CHENG Yan-Fu[1)] DAI Tong-Qing

(College of Electronic Information Engineering, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

Abstract Classical and quantum oscillators of sextic anharmonicity are analytically solved up to the n-th power of ε(weak-coupling constant) by using the multiple-scale perturbation theory. Differing from Taylor series solution, the frequency shift appears in all orders of oscillations no matter it is in the classical or quantum case. So the multiple-scale perturbation theory is an approximate method to deal with the weak-coupled anharmonic oscillation and is better than the Taylor series approach.

Key words sextic anharmonic oscillator, multiple-scale perturbation theory, classcial and quantum solution

Received 23 August 2005

1) E-mail: chengyf@scuec.edu.cn