

2 + 1 维 $U(1)$ 改进格点规范理论中 0^{++} 胶球波函数的三阶结果*

江俊勤¹⁾

(广东教育学院物理系 广州 510303)

摘要 用改进的格点规范场哈密顿量和截断本征方程法计算 2+1 维 $U(1)$ 规范场的 0^{++} 胶球波函数, 三阶结果比二阶结果的标度行为有了较大的改善.

关键词 格点规范理论 0^{++} 胶球波函数 改进哈密顿量

1 引言

哈密顿量形式的格点规范理论的优点, 在于它既能计算强子的质量谱又能计算强子的波函数(如: 胶球波函数), 这是作用量形式的格点规范理论难以做到的, 而强子波函数可用于计算强子的产生和衰变, 为实验寻找新型强子(如: 胶球)提供更多有用的物理信息.

为了减小有限格距误差, 通过在格点哈密顿量中加入近邻或次近邻相互作用项, 对格点哈密顿量做了改进^[1, 2]. 对于胶子格点哈密顿量, 改进后有限格距误差由原来的 $O(a^2)$ 减小到 $O(a^4)$. 2+1 维纯规范场是试验各种新方法和模拟 3+1 维纯规范场各种物理性质的理想场所, 近年来, 我们用改进的格点规范场哈密顿量和截断本征方程法对 2+1 维纯规范场做了一些研究^[3-5]. 在文献[5]中, 使用改进的格点哈密顿量首次计算了 2+1 维 $U(1)$ 规范场的 0^{++} 胶球波函数, 给出了初步的结果(二阶截断), 本文在此基础上进一步计算 2+1 维 $U(1)$ 规范场 0^{++} 胶球波函数的三阶截断, 并与二阶截断的结果进行比较.

2 真空态和胶球态的截断本征方程

2.1 改进的格点哈密顿量与真空态的截断本征方程

对于 $U(1)$ 规范场, 改进的格点哈密顿量可写成^[3]

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_{x,i} \left\{ \frac{1+C'^2}{(1-C')^2} E_i^\alpha(x) E_i^\alpha(x) - \frac{2C'}{(1-C')^2} U_i^\dagger E_i^\alpha(x) U_i(x) E_i^\alpha(x+i) \right\} - \frac{1}{g^2 a} \sum_{x,i < j} \left\{ C'_1 \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2} + C'_2 (R_{ij} + R_{ji}) \right\}, \quad (1)$$

式中 a 为格距, g 为无量纲的耦合常数, 它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$, E_i^α 为规范场色电场强, $C'_1 = 5/3$, $C'_2 = -1/12$, $C' = -5 + \sqrt{6}$,

$$\sum_{x,i < j} P_{ij} = \sum_{x,i < j} P_{ji} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right) / 2, \quad (2)$$

$$\sum_{x,i < j} R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right), \quad \sum_{x,i < j} R_{ji} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right). \quad (3)$$

2004-09-13 收稿

* 广东省高校自然科学研究项目(202083)和广东教育学院教授科研专项基金资助

1) E-mail: jqjiang@gdei.edu.cn

为了计算胶球波函数,必须先了解真空态.取真空态为

$$|\Omega\rangle = \exp(R)|0\rangle, \quad (4)$$

式中 $|0\rangle$ 为裸真空,由 $E_i^\alpha(x)|0\rangle = 0$ 确定, R 由 Wilson 圈组成,可按圈图的阶展开

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (5)$$

将(1)和(4)式代入本征方程 $H|\Omega\rangle = \epsilon_\Omega|\Omega\rangle$, 并利用

$$\begin{aligned} e^{-R}He^R &= H - [R, H] + \frac{1}{2!}[R, [R, H]] \\ &\quad - \frac{1}{3!}[R, [R, [R, H]]] + \dots, \quad (6) \end{aligned}$$

可求得真空态的 N 阶截断本征方程

$$\begin{aligned} &B'_1 \left\{ \sum_{x,i} [E_i^\alpha(x), [E_i^\alpha(x), R]] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x), R_{n_1}][E_i^\alpha(x), R_{n_2}] \right\} + \\ &B'_2 \left\{ \sum_{x,i} [E_i^\alpha(x), [E_i^\alpha(x+i), R]] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x+i), R_{n_1}][E_i^\alpha(x), R_{n_2}] \right\} - \\ &C'_1 \frac{2}{g^4} \sum_{x,i < j} P_{ij} - C'_2 \frac{2}{g^4} \sum_{x,i < j} (R_{ij} + R_{ji}) = \frac{2a}{g^2} \epsilon_\Omega, \quad (7) \end{aligned}$$

式中 $B'_1 = \frac{1+C'^2}{(1-C')^2} = \frac{5}{6}, B'_2 = \frac{-2C'}{(1-C')^2} = \frac{1}{6}.$

2.2 胶球态的截断本征方程

取胶球态为

$$|\Psi\rangle = (G - \langle G \rangle)|\Omega\rangle = (G - \langle G \rangle)\exp(R)|0\rangle, \quad (8)$$

G 也由 Wilson 圈组成,按圈图的阶展开

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots \quad (9)$$

用类似于获得(7)式的步骤,可求得胶球态的 N 阶截断本征方程

$$\begin{aligned} &\frac{5}{6} \left\{ \sum_{x,i} [E_i^\alpha(x), [E_i^\alpha(x), G]] + \right. \\ &2 \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x), R_{n_1}][E_i^\alpha(x), G_{n_2}] \left. \right\} + \\ &\frac{1}{6} \left\{ \sum_{x,i} [E_i^\alpha(x+i), [E_i^\alpha(x), G]] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x+i), R_{n_1}][E_i^\alpha(x), G_{n_2}] + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x+i), G_{n_1}][E_i^\alpha(x), R_{n_2}] \right\} = \frac{2aM}{g^2} G, \quad (10)$$

式中 M 为最低激发态胶球的质量(质量隙).

3 0^{++} 胶球波函数的计算

取一阶圈图为

$$R_1 = C_1 \sum_p (U_p + U_p^+) = C_1 (\square + \text{h.c.}). \quad (11)$$

由 R_1 和(7)式的对易子,可产生二阶 Wilson 圈图:

$$\begin{aligned} R_2 &= C_2 \square\square + C_3 \square\square + C_4 \square\square + C_5 \square\square + \\ &C_6 \square\square + \text{h.c.}, \quad (12) \end{aligned}$$

由 R_1, R_2 和(7)式的对易子,可产生三阶 Wilson 圈图:

$$\begin{aligned} R_3 &= C_7 \square\square\square + C_8 \square\square\square + C_9 \square\square\square + \\ &C_{10} \square\square\square + C_{11} \square\square\square + C_{12} \square\square\square + \\ &C_{13} \square\square\square + C_{14} \square\square\square + C_{15} \square\square\square + C_{16} \square\square\square + \\ &C_{17} \square\square\square + C_{18} \square\square\square + C_{19} \square\square\square + \\ &C_{20} \square\square\square + C_{21} \square\square\square + C_{22} \square\square\square + \\ &C_{23} \square\square\square + C_{24} \square\square\square + C_{25} \square\square\square + \\ &C_{26} \square\square\square + C_{27} \square\square\square + \text{h.c.} \quad (13) \end{aligned}$$

再由 R_1, R_2, R_3 和(7)式的对易子,可产生四阶 Wilson 圈图,...

把(5)式代入(7)式,可求得 $C_1, C_2, C_3 \dots$ 随 $1/g^2$ 变化的关系.

对于 0^{++} 胶球, G 的各阶 Wilson 圈图与 R 相同,即

$$G_1 = B_1 \sum_p (U_p + U_p^+) = B_1 (\square + \text{h.c.}), \quad (14)$$

$$G_2 = B_2 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_3 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_4 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_5 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_6 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + \text{h.c.}, \quad (15)$$

$$G_3 = B_7 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_8 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_9 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{10} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{11} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{12} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{13} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{14} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{15} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{16} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{17} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{18} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{19} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{20} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{21} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{22} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{23} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{24} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{25} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{26} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + B_{27} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + \text{h.c.}, \quad (16)$$

把 R_1, R_2, \dots 和 G_1, G_2, \dots 代入 (10) 式, 可求得 B_1, B_2, B_3, \dots 和 M 随 $1/g^2$ 变化的关系。

由于低能谱主要起源于长波激发, 因此用格点方法研究规范场胶球态的长波行为. 对于 2 + 1 维 U(1) 规范场, 在连续极限下, 长波行为胶球波函数可写成

$$|\Psi\rangle = N \exp \left\{ -\mu_{\text{gb}0} \iint F_{12}^2(x, y) dx dy - \mu_{\text{gb}2} \iint F_{12}(x, y) (D_1^2 + D_2^2) \times F_{12}(x, y) dx dy + \text{高阶项} \right\}, \quad (17)$$

式中, $F_{12}(x, y)$ 为场强张量, D_1, D_2 为协变导数, 展开系数 $\mu_{\text{gb}0}$ 和 $\mu_{\text{gb}2}$ 的表达式可以通过研究 Wilson 圈图的连续极限行为求得

$$\mu_{\text{gb}0} = g^2 a \sum_n B_n (N_1 - N_2)^2, \\ \mu_{\text{gb}2} = g^2 a^3 \sum_n B_n \left\{ \frac{1}{12} (N_1 - N_2)^2 - \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \left[\sum_{l=1}^{N_1} (x_l^2 + y_l^2) - \sum_{m=1}^{N_2} (\tilde{x}_m^2 + \tilde{y}_m^2) \right] \right\}, \quad (18)$$

式中 $N_1 (N_2)$ 为圈图所含 $U_p (U_p^+)$ 的数目, (x_l, y_l) 为第 l 个 U_p 的中心坐标, $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)$ 为第 m 个 U_p^+ 的中心坐标。

把 B_1, B_2, B_3, \dots 代入 (18) 式, 可求得 $\mu_{\text{gb}0}$ 和 $\mu_{\text{gb}2}$ 随 $1/g^2$ 变化的关系。

4 数值结果和讨论

2 + 1 维 U(1) 规范场的胶球质量 (质量隙) 的标度行为被预期用指数描写^[6-11]

$$M^2 a^2 \sim \frac{k_1}{g^2} \exp \left(-\frac{k_2}{g^2} \right), \quad \text{as } a \rightarrow 0. \quad (19)$$

从 (18) 和 (19) 式可知, 如果定义

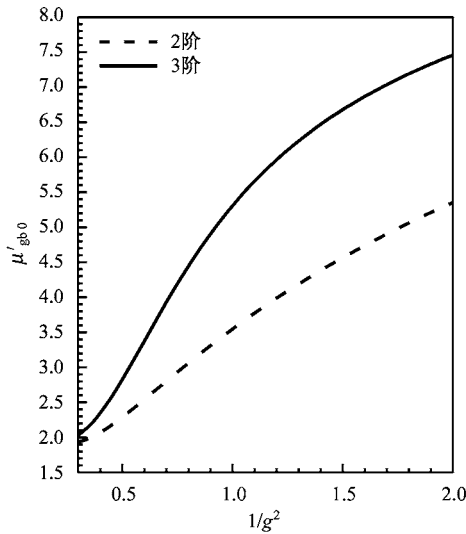
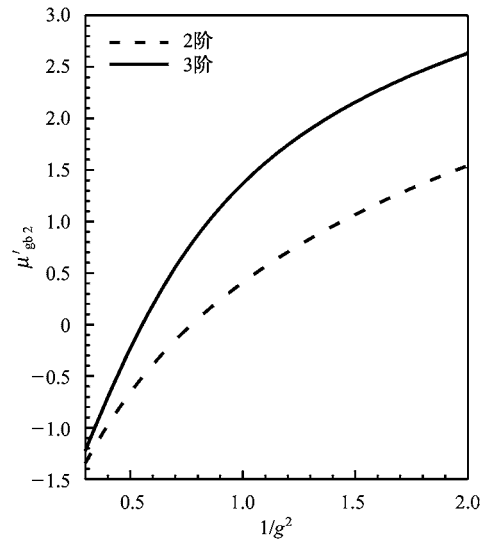
$$\mu'_{\text{gb}0} = 2 \ln \left(\frac{\mu_{\text{gb}0}}{ga} \right), \quad \mu'_{\text{gb}2} = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{\mu_{\text{gb}2}}{g^3 a^3} \right), \quad (20)$$

则预期 $\mu'_{\text{gb}0}$ 和 $\mu'_{\text{gb}2}$ 的标度行为是斜率等于 k_2 的直线:

$$\mu'_{\text{gb}0} \sim 2 \ln \left(\frac{\mu_{\text{gb}0} M}{\sqrt{k_1}} \right) + k_2 \frac{1}{g^2}, \\ \mu'_{\text{gb}2} \sim \frac{2}{3} \ln \left(\frac{\mu_{\text{gb}2} M}{\sqrt{k^3}} \right) + k_2 \frac{1}{g^2}. \quad (21)$$

本文计算到三阶截断 (共有 27 个圈图), 图 1 和图 2 分别给出了 $\mu'_{\text{gb}0}$ 和 $\mu'_{\text{gb}2}$ 与 $1/g^2$ 的依赖关系. 为了便于比较, 也将二阶截断的结果^[5] 示于图 1 和图 2 中。

从图 1 和图 2 可见, 三阶结果 (比二阶结果^[5]) 有好得多的标度行为: 若取标度窗口为 $1/g^2 \in [0.8, 1.2]$, 则 $\mu'_{\text{gb}0}$ 三阶结果的斜率为 3.8, 已比较接近于理论所预期的斜率 (按文献 [8], $k_2 = 4.1$; 按文献 [9], $k_2 = 4.8$); 但 $\mu'_{\text{gb}0}$ 二阶结果的斜率仅为 2.3. 当然, 对于 $\mu'_{\text{gb}2}$ 来说, 虽然三阶结果比二阶结果好得多, 但三阶结果的斜率仍然较低; 而且 $\mu'_{\text{gb}0}$ 的标度窗口 ($1/g^2 \in [0.8, 1.2]$) 也还不在弱耦合区内. 本文的结果表明, 只有进行高阶计算, 才有可能在较弱的耦合区内达到理论所预期的标度行为。

图 1 μ'_{gb0} 与 $1/g^2$ 的关系图 2 μ'_{gb2} 与 $1/g^2$ 的关系

参考文献 (References)

- 1 LUO X Q, CHEN Qi-Zhou, XU Guo-Cai et al. Phys. Rev., 1994, **D50**: 501;
JIANG Jun-Qin, LUO Xiang-Qian et al. Phys. Rev., 1999, **D60**: 014501
- 2 LUO X Q, GUO S H, Krüger H et al. Phys. Rev., 1999, **D59**: 034503
- 3 JIANG Jun-Qin, LUO Xiang-Qian, GUO Shuo-Hong et al. High Energy Phys. and Nucl Phys., 1999, **23**(12): 1152(in Chinese)
(江俊勤, 罗向前, 郭硕鸿等. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12): 1152)
- 4 JIANG Jun-Qin, LI Jie-Min. Phys. Rev., 2003, **D68**: 094502
- 5 JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl Phys., 2005, **29**(2): 115—118(in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理, 2005, **29**(2): 115—118)
- 6 Cöpfung M, Mack G. Commun. Math. Phys., 1982, **82**: 545
- 7 Hamer C J, Irving A C. Z. Phys., 1985, **C27**: 145
- 8 Lana G. Phys. Rev., 1988, **D38**: 1954
- 9 Dabringhaus A, Ristig M L, Clark J W. Phys. Rev., 1991, **D43**: 1978
- 10 Hamer C J, Oitmaa J, ZHENG Wei-Hong. Phys. Rev., 1992, **D45**: 4652
- 11 FANG Xi-Yan, LIU Jin-Ming, GUO Shuo-Hong. Phys. Rev., 1996, **D53**: 1523

Third Order Result of the 0^{++} Glueball Wave Function for Improved $U(1)$ Lattice Gauge Theory in Three-Dimensions*

JIANG Jun-Qin¹⁾

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

Abstract Using the improved lattice gauge field Hamiltonian and the truncated eigenvalue equation method, we compute the 0^{++} glueball wave function in the three-dimensional $U(1)$ lattice gauge theory up to the 3rd order. The scaling behavior of the 3rd order result is much better than that of the 2nd order result.

Key words lattice gauge theory, 0^{++} glueball wave function, improved Hamiltonian

Received 13 September 2004

* Supported by Natural Science Foundation of the Education Department of Guangdong Province of China (Z02083) and Professor Foundation of Guangdong Education Institute

1) E-mail: jcjiang@gdei.edu.cn