

# $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$ 过程中初态辐射修正的计算和模拟<sup>\*</sup>

马连良<sup>1,2;1)</sup> 王平<sup>1</sup> 朱永生<sup>1</sup> 张学尧<sup>2</sup>

1(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

2(山东大学物理与微电子学院 济南 250100)

**摘要** 计算了  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  微分截面的具体形式以及  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  衰变几率的微分公式,并根据 G. Bonneau 和 F. Martin 引入的初态辐射修正计算方案编写了  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  产生子.通过分析模拟产生的末态粒子的相应角分布,发现结果与理论预期的分布相一致,从而证实了公式的推导和程序实现的正确性.

**关键词** 初态辐射修正 正负电子湮没 产生子 角分布 探测效率

## 1 引言

$e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  过程的理论研究和实验分析能够给出  $\omega\pi^0$  的形状因子.首先,需要从理论上计算这一过程的微分截面,较精确的计算需要考虑高阶辐射修正的贡献.

根据 G. Bonneau 和 F. Martin<sup>[1]</sup>引入的初态辐射修正计算方案,在 Monte Carlo 模拟中可将初态辐射修正分成两种情况处理:一,辐射出能量低于某一阈值( $q_0$ )的软光子的情形,此时忽略软光子四动量的影响;二, $e^+$ 或 $e^-$ 辐射出一个能量高于该阈值的硬光子的情形.第一种情况,按无实光子辐射过程模拟反应末态.第二种情况,首先对初态辐射出的硬光子进行抽样;然后对反冲  $e^+e^-$  系统到反应末态的过程进行模拟.对于这两种情况的选择则由在辐射修正后的反应总截面中各自所占的比份而定.下面将以  $e^+e^- \rightarrow (\gamma)\omega\pi^0$  ( $E_{\text{cm}} = 3.65\text{GeV}$ ) 反应为例阐述具体的实现方法,而对其他反应末态只需要修改相应的末态角分布公式即可应用.

## 2 反应截面

G. Bonneau 和 F. Martin 引入的处理初态辐射的

方案能统一地给出  $e^+e^-$  对撞通过湮没产生任意末态的辐射修正的一般公式,

$$\sigma^{\text{T}} = \sigma^{\text{HE}} + \sigma^0(4E^2) \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ -\frac{17}{36} + \frac{1}{6}\pi^2 + (-1 + 2\log \frac{2E}{m})(\log \frac{q_0}{E} + \frac{13}{12}) \right\} \right], \quad (1)$$

式中  $E$  为入射电子的能量,  $q_0$  为辐射硬光子的最小能量,  $m$  为电子的质量,  $\sigma^0$  为零阶波恩截面.  $\sigma^{\text{HE}}$  代表硬光子辐射的贡献,其余部分( $\sigma^{\text{VSB}}$ )对应真空极化和质量重整化顶点形状因子的辐射修正及韧致辐射中与  $q$  无关的部分及软光子辐射的贡献<sup>[2]</sup>.由公式(1)可知,初态辐射中辐射硬光子( $q > q_0$ )的几率为  $\frac{\sigma^{\text{HE}}}{\sigma^{\text{T}}}$ ,其他情形将按无初态辐射处理.

初态辐射分为实光子和虚光子辐射,所以在微扰 QED 计算中,需引入任意小软光子能标  $q_0$  来划分软辐射和硬辐射相空间<sup>[2]</sup>.虚光子和实软光子( $q < q_0$ )辐射修正是因子化的<sup>[1]</sup>,

$$\sigma^{\text{VSB}} \equiv \sigma^0 + \sigma^{\text{V}} + \sigma^{\text{SB}} = \sigma^0(1 + \delta^{\text{V}} + \delta^{\text{SB}}), \quad (2)$$

$\sigma^{\text{V}}$  和  $\sigma^{\text{SB}}$  分别表示虚辐射和软辐射截面.当初态  $e^+$  或  $e^-$  辐射能量为  $q (> q_0)$  的实光子时,产生末态粒子的有效能量为  $s' = 4E(E - q)$ .在单光子辐射近似下,硬辐射截面  $\sigma^{\text{HE}}$  为

2004-04-19 收稿

\* 国家自然科学基金(19991480)资助

1) E-mail: mall@mail.ihep.ac.cn

$$\sigma^{\text{HE}} = \frac{2\alpha}{\pi} \left( -1 + 2 \log \frac{2E}{m} \right) \int_{q_0}^{q_{\max}} \frac{dq}{q} \left( 1 - \frac{q}{E} + \frac{q^2}{2E^2} \right) \times \sigma^0 [4E(E-q)], \quad (q > q_0), \quad (3)$$

式中  $q_0$  和  $q_{\max}$  分别为辐射出硬光子的最小和最大能量.  $\sigma^{\text{VSB}}$  和  $\sigma^{\text{HE}}$  都是有限值, 但两者的划分与人为引入的软光子能标  $q_0$  有关. 从实验角度, 可把理论上划分软光子和硬光子的能标  $q_0$  与探测器对光子的探测能量限联系起来. 考虑到 BES 所能探测到的光子最小能量以及能量分辨, 在本文中将  $q_0$  取 10MeV 来划分软光子和硬光子.

### 3 零阶过程

公式(4) 给出了零阶的微分截面公式<sup>[1]</sup>, 其中  $A_{\mu\nu}^0, \mathcal{F}^\mu, \mathcal{F}^{\nu*}$  的具体形式(公式(5)) 由本文推导所得,  $s_0$  为质心系能量的平方,  $p_f, h_+, h_-, P_\nu$  和  $P_s$  分别是  $\omega\pi^0$  系统、正电子、负电子、矢量介子( $\omega$ ) 和赝标量介子( $\pi^0$ ) 在实验室系里的四动量, 而  $e$  是矢量介子( $\omega$ ) 的极化矢量,  $m_e, m_\nu$  和  $m_s$  分别是电子, 矢量介子( $\omega$ ) 和赝标量介子( $\pi^0$ ) 的质量,  $\sqrt{s_0}$  为  $\omega\pi^0$  系统质心系能量,  $\mathcal{F}_{\omega\pi^0}$  为  $\omega\pi^0$  的形状因子.

$$d\sigma_0 = \frac{e^4}{4s_0^2} \cdot \frac{\sum_{\text{pol}} (2\pi)^4 \delta_4(p_f - h_+ - h_-) d\rho}{[(h_+ \cdot h_-)^2 - m_e^4]^{1/2}} \times \mathcal{F}^\mu \mathcal{F}^{\nu*} \cdot A_{\mu\nu}^0, \quad (4)$$

$$A_{\mu\nu}^0 \mathcal{F}^\mu \mathcal{F}^{\nu*} = \frac{|\mathcal{F}_{\omega\pi^0}(s_0)|^2}{m_e^2} \{ (h_+ \cdot h_-) [m_\nu^2 \cdot m_s^2 - (P_\nu \cdot P_s)^2 + m_\nu^2 \cdot (P_s \cdot e)^2] - 2 \cdot (P_\nu \cdot h_+) (P_\nu \cdot h_-) [m_s^2 + (P_s \cdot e)^2] - 2 \cdot m_\nu^2 \cdot (P_s \cdot h_+) \times (P_s \cdot h_-) + 2 \cdot (P_\nu \cdot P_s) [(P_s \cdot h_+) \times (P_\nu \cdot h_-) + (P_s \cdot h_-) (P_\nu \cdot h_+)] + 2(P_\nu \cdot P_s)(P_s \cdot e) [(P_\nu \cdot h_-) \times (e \cdot h_+) + (P_\nu \cdot h_+) (e \cdot h_-)] - 2 \cdot m_\nu^2 \cdot (P_s \cdot e) [(P_s \cdot h_-) \times (e \cdot h_+) + (P_s \cdot h_+) (e \cdot h_-)] + 2 \cdot m_\nu^2 \cdot m_s^2 \cdot (e \cdot h_+) (e \cdot h_-) + 2 \cdot (P_\nu \cdot P_s) (e \cdot h_+) (e \cdot h_-) \}. \quad (5)$$

对于  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  衰变几率的计算, 本文采用了三线顶点近似的方法<sup>[3]</sup>, 并将广义形状因子  $G$  看作常数, 从而得到  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  衰变几率的微分公式(6), 其中  $\tau$  为  $\omega$  粒子的寿命,  $P_+, P_-$  和  $P_0$  分别是  $\pi^+, \pi^-$  和  $\pi^0$  的在  $\omega$  质心系里的四动量,  $E_+, E_-$  和  $E_0$

分别是  $\pi^+, \pi^-$  和  $\pi^0$  在  $\omega$  质心系里的能量,  $m$  是  $\pi^+$  的质量(忽略带电和中性  $\pi$  之间的质量差别),  $|\mathcal{M}_\omega|^2$  为衰变矩阵元模的平方, 由式(7) 给出, 其中  $e_\mu$  为  $\omega$  的极化矢量.

$$d\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{m_\omega} |\mathcal{M}_\omega|^2 \frac{d^3 P_+}{2E_+ (2\pi)^3} \frac{d^3 P_-}{2E_- (2\pi)^3} \times \frac{d^3 P_0}{2E_0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P_\omega - P_+ - P_- - P_0). \quad (6)$$

$$|\mathcal{M}_\omega|^2 = |G \cdot \epsilon_{\nu\alpha\beta} \cdot e_\mu \cdot (P_+)_\nu \cdot (P_-)_\alpha \cdot (P_0)_\beta|^2 = G^2 \{ m^6 + m^4 (P_+ \cdot e)^2 + m^4 (P_- \cdot e)^2 + m^4 (P_0 \cdot e)^2 - m^2 (P_0 \cdot P_+)^2 - m^2 (P_+ \cdot P_-)^2 - m^2 (P_0 \cdot P_-)^2 - 2m^2 (P_+ \cdot e) (P_0 \cdot e) (P_0 \cdot P_+) - 2m^2 (P_+ \cdot e) (P_- \cdot e) (P_+ \cdot P_-) - 2m^2 (P_- \cdot e) (P_0 \cdot e) (P_0 \cdot P_-) + 2(P_+ \cdot P_-) (P_0 \cdot P_-) (P_+ \cdot P_0) + 2(P_+ \cdot e) (P_0 \cdot e) (P_+ \cdot P_-) (P_0 \cdot P_-) + 2(P_+ \cdot e) (P_- \cdot e) (P_0 \cdot P_+) (P_0 \cdot P_-) + 2(P_+ \cdot e) (P_0 \cdot e) (P_0 \cdot P_+) (P_+ \cdot P_-) - (P_+ \cdot e)^2 (P_0 \cdot P_-)^2 - (P_- \cdot e)^2 \times (P_0 \cdot P_+)^2 - (P_0 \cdot e)^2 (P_+ \cdot P_-)^2 \}. \quad (7)$$

公式(4) 和(6) 均为多自变量的函数, 通过大样本的蒙特卡罗模拟得到函数的最大值, 采用舍选抽样的方法<sup>[4]</sup> 来挑选满足  $e^+ e^- \rightarrow \omega\pi^0$  零阶微分截面公式(4) 和  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  衰变的微分公式(6) 要求的事例.

$J/\psi \rightarrow \omega\pi^0$  为纯的电磁衰变过程, 即  $J/\psi \rightarrow \gamma^* \rightarrow \omega\pi^0$ , 所以  $e^+ e^- \rightarrow \omega\pi^0$  零阶过程的末态的角分布应与  $J/\psi \rightarrow \omega\pi^0$  的末态的角分布一致.

因此可从 BES II 收集的 58M 的  $J/\psi$  实验数据挑选  $J/\psi \rightarrow \omega\pi^0$  样本, 通过比较该实验样本和本文抽样得到的蒙特卡罗样本中末态粒子的相关角分布来检验公式的推导和程序实现的正确性. 图 1 给出了通过公式(4) 和(6) 抽样得到的蒙特卡罗样本中的末态粒子角分布和从 58M 的  $J/\psi$  实验数据挑选出的  $J/\psi \rightarrow \omega\pi^0$  样本中的末态粒子角分布, 其中  $\theta_\nu$  是矢量介子( $\omega$ ) 和正电子之间的夹角,  $\theta_1$  和  $\phi_1$  分别是  $\omega$  衰变平面的法线方向在  $\omega$  质心系下的极角和方位角<sup>[5]</sup>. 两样本中的末态粒子角分布的一致性表明本文抽样的结果是正确的.

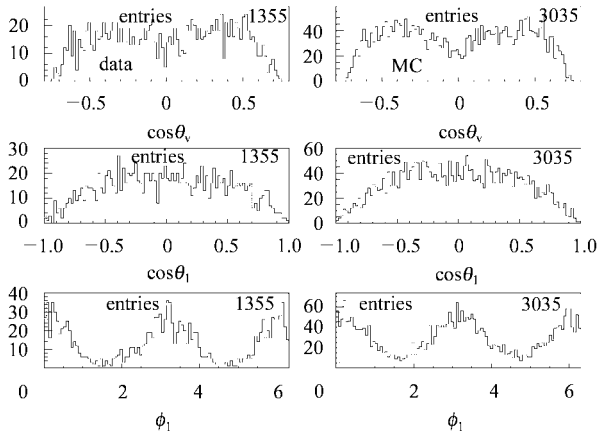


图 1 58M 的  $J/\psi \rightarrow \omega\pi^0$  实验数据(左列)和  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  MC 数据(右列)在无初态辐射时末态粒子的角分布  $\theta_v$  是矢量介子( $\omega$ )和正电子之间的夹角,  $\theta_1$  和  $\phi_1$  分别是  $\omega$  衰变平面的法线方向在  $\omega$  质心系下的极角和方位角.

### 4 硬光子辐射的过程

此时还需对初态辐射的硬光子按公式(8)给出的微分截面进行模拟. 首先,对硬光子的能量  $q$ ,极角  $\theta$  和方位角  $\phi$  按理论分布进行抽样,然后对反冲  $e^+e^-$  系统的反应末态按公式(8)和(6)进行抽样,得到符合要求的  $e^+e^- \rightarrow \gamma\omega\pi^0$  事例.

公式(8)给出相应于实(硬)光子辐射的微分截面表达式<sup>[1]</sup>,其中  $A_{\mu\nu}\mathcal{F}^\mu\mathcal{F}^{\nu*}$  的具体形式(公式(9))仍由本文推导所得. 其中  $q$  是初态辐射光子的四动量,  $\sqrt{s}$  为初态辐射后  $e^+e^-$  系统质心系能量,其余各量的定义与公式(5)相同.

$$d\sigma_B = \frac{e^6}{4s^2} \cdot \frac{q \cdot d\Omega_q}{2(2\pi)^3} \cdot \frac{\sum_{\text{pol}} f(2\pi)^4 \delta_4(p_f - h_+ - h_-) d\rho}{[(p_+ p_-)^2 - m_e^4]^{1/2}} \cdot \mathcal{F}^\mu \mathcal{F}^{\nu*} \cdot A_{\mu\nu}, \quad (8)$$

$$A_{\mu\nu}\mathcal{F}^\mu\mathcal{F}^{\nu*} \cong |\mathcal{F}_{\omega\pi^0}(s)|^2 \{ - [ -m_v^2 \cdot m_s^2 + (P_v \cdot P_s)^2 - m_v^2 \cdot (P_s \cdot e)^2 ] \times \left\{ \frac{q \cdot h_-}{q \cdot h_+} - \frac{q \cdot h_+}{q \cdot h_-} + \frac{(h_+ + h_- - q)^2}{2} \left[ \frac{m_e^2}{(q \cdot h_+)^2} + \frac{m_e^2}{(q \cdot h_-)^2} - \frac{s_0}{(q \cdot h_+)(q \cdot h_-)} \right] \right\} + \left[ \frac{2m_e^2}{(q \cdot h_-)^2} - \frac{(h_+ + h_- - q)^2}{(q \cdot h_+)(q \cdot h_-)} \right] \times \{ (h_+ \cdot P_v)^2 [ m_s^2 + (P_s \cdot e)^2 ] - 2(P_s \cdot h_+) (P_v \cdot h_+) \times (P_v \cdot P_s) - 2(P_v \cdot h_+) (e \cdot h_+) \times$$

$$(P_v \cdot P_s)(P_s \cdot e) + 2(P_s \cdot h_+) \times (e \cdot h_+) (P_s \cdot e) m_v^2 + (P_s \cdot h_+)^2 m_v^2 - (e \cdot h_+)^2 [ m_v^2 \cdot m_s^2 - (P_v \cdot P_s)^2 ] \} + \left[ \frac{2m_e^2}{(q \cdot h_+)^2} - \frac{(h_+ + h_- - q)^2}{(q \cdot h_+)(q \cdot h_-)} \right] \times \{ (h_- \cdot P_v)^2 [ m_s^2 + (P_s \cdot e)^2 ] - 2(P_s \cdot h_-)(P_v \cdot h_-)(P_v \cdot P_s) - 2(P_v \cdot h_-)(e \cdot h_-)(P_v \cdot P_s)(P_s \cdot e) + 2(P_s \cdot h_-)(e \cdot h_-)(P_s \cdot e) m_v^2 + (P_s \cdot h_-)^2 m_v^2 - (e \cdot h_-)^2 [ m_v^2 \cdot m_s^2 - (P_v \cdot P_s)^2 ] \}. \quad (9)$$

硬光子的能量  $q$  和极角  $\theta$  按表达式(10)给出的分布使用阶梯近似的方法<sup>[4]</sup>进行抽样,而  $\phi$  角则在  $(0-2\pi)$  内均匀抽样. 公式(10)中的  $p, E$  分别为入射电子的动量和能量. 图 2 给出了对光子抽样的结果,可知抽样的结果与理论预言符合的很好.

$$q \text{ 的分布: } \frac{1}{q} \left( 1 - \frac{q}{E} + \frac{q^2}{2E^2} \right) \times \sigma^0 [4E(E - q)],$$

$$\theta \text{ 的分布: } \frac{\sin^2 \theta}{[1 - (p^2/E^2) \cos^2 \theta]^2}. \quad (10)$$

由图 2 中光子的  $\cos \theta$  分布知:初态辐射出的光子往往与  $e^+ (e^-)$  的夹角很小,则式(9)中  $(q \cdot h_-)$  和  $(q \cdot h_+)$  项会很小,从而使  $A_{\mu\nu}\mathcal{F}^\mu\mathcal{F}^{\nu*}$  的值会很大 ( $> 10^6$ ). 为提高抽样效率,本文采用了乘抽样的方法<sup>[4]</sup>,使用的几率密度函数为

$$f(q, \cos \theta) = \frac{1}{0.081} \times \frac{1}{q} \left( 1 - \frac{q}{E} + \frac{q^2}{2E^2} \right) \times \sigma^0 [4E(E - q)] \times \frac{\sin^2 \theta}{[1 - (p^2/E^2) \cos^2 \theta]^2}, \quad (11)$$

其中  $\frac{1}{0.081}$  是归一化常数,从而使抽样效率大大提高. 图 3 给出硬光子辐射过程与零阶过程末态粒子的角分布,其中硬光子辐射过程  $\omega$  的极角的分布与零阶过程时有了较大的变化.

### 5 结果与讨论

最后将无初态辐射和初态辐射出硬光子两种情况在同一个程序中实现,通过几个开关变量即可使程序进行不同情况的模拟. 为检验初态辐射修正的影响,本文对无初态辐射和考虑初态辐射修正的情况各模拟了 100000 个事例. 图 4 给出了模拟分析结果,第一列为不考虑初态辐射修正的情况,第二列为考虑初态辐射修正后的情况,两者的探测效率差别达 34%.

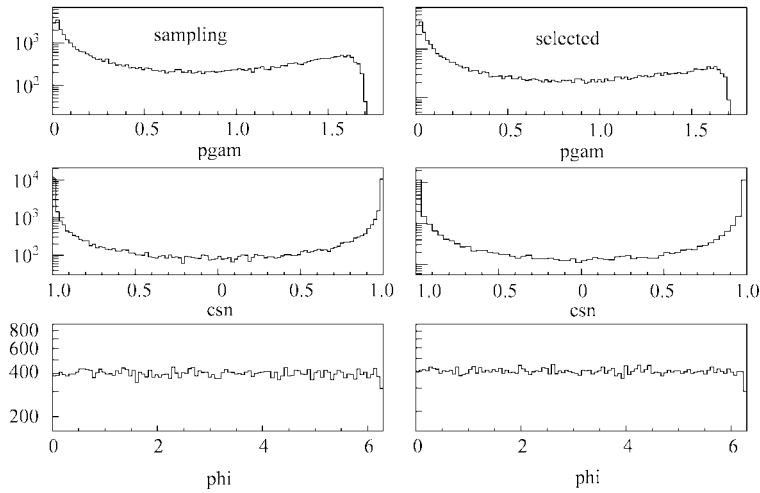


图 2 光子的能量(第一行),  $\cos\theta$ (第二行)和  $\phi$ 角(最后一行)的分布  
左列为按理论公式对初态辐射的硬光子直接抽样得到的分布,右列为经过蒙特卡罗模拟硬光子辐射过程得到的最终好事例中的硬光子的分布.

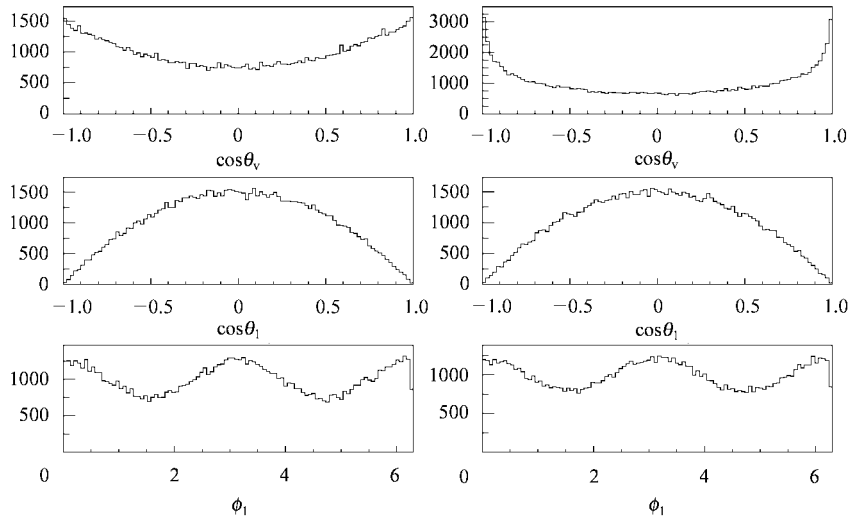


图 3  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  在无初态辐射(左列)和初态辐射出硬光子(右列)时末态粒子的角分布  
 $\theta_v$  是矢量介子( $\omega$ )和正电子之间的夹角,  $\theta_1$  和  $\phi_1$  分别是  $\omega$  衰变平面的法线方向在  $\omega$  质心系下的极角和方位角.

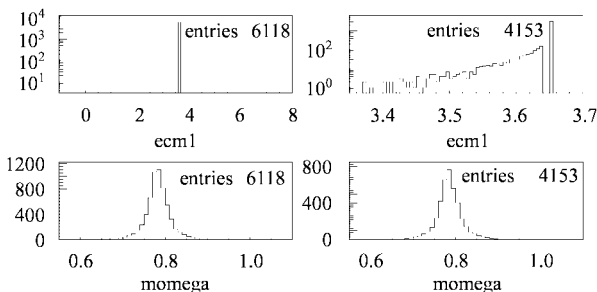


图 4 无初态辐射(左列)和考虑初态辐射修正(右列)的两种情况的模拟结果

第一行给出了经过所有筛选条件后事例中的  $\omega\pi^0$  系统的质心系能量分布,第二行给出了经过所有筛选条件后得到的好事例的  $\pi^+\pi^-\pi^0$  不变质量谱的分布.

BES 已收集了质心系能量  $\sqrt{s}$  在 3.65GeV, 3.07GeV, 2.6GeV 和 2.2GeV 的连续区以及在  $\psi'$  峰上的实验数据,联合本文提供的  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  产生子和 BES 现有的探测器模拟软件 SIMBES(得到探测效率),为测量以上各个能量点的  $\omega\pi^0$  形状因子提供了可能.结合 DM2 和 CMD-2 在  $\sqrt{s} \leq 2.4\text{GeV}$  各能量点的测量结果<sup>[6,7]</sup>,可对现有的描述  $\omega\pi^0$  形状因子的理论<sup>[8,9]</sup>进行检验,甚至得到描述  $\omega\pi^0$  形状因子更好的理论公式.

本工作给出了  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  的辐射修正公式,还给出了相应的蒙特卡罗产生器,不仅可进行无初态辐射情况下的模拟,也可以进行考虑初态辐射修正情况下的模拟;同时也可用于对其他反应道的模拟,只需替换相应理论公式,具有很好的灵活性和通

用性.

在此表示诚挚的感谢,同时也感谢王文峰、史欣、莫晓虎、王征和刘晶等的有益讨论.

在工作中得到张达华老师热情的指导和帮助,

### 参考文献 (References)

- 1 Bonneau G, Martin F. Nucl. Phys., 1971, **B27**:381—397
- 2 HU Hai-Ming et al. HEP & NP, 2001, **25**:701—709(in Chinese)  
(胡海明等.高能物理与核物理,2001,**25**:701—709)
- 3 GAO C S. Group Theory and Its Application in Particle Physics, Beijing: Higher Education Press, 1992. 294(in Chinese)  
(高崇寿著.群论及其在粒子物理学中的应用.北京:高等教育出版社,1992.294)
- 4 ZHU Y S. Probability and Statistics in Experimental Physics. Beijing: Science Press, 1991. 543 (in Chinese)  
(朱永生著.实验物理中的概率和统计.北京:科学出版社,1991, 543)
- 5 Kopke L, Wermes N. J/ $\psi$  Decays. Geneva: CERN, 1988. 48
- 6 Bisello D et al. Nucl. Phys., 1991, **B21**(Proc. Suppl.):111
- 7 Akhmetshin R R et al. Phys. Lett., 1999, **B466**:392—402
- 8 Victor Chernyak. hep-ph9906387, Mar., 1999
- 9 Gérard J M, Castro G López. Phys. Lett., 1998, **B425**:365

## Calculation and Simulation for the Initial State Radiation Correction in $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$ \*

MA Lian-Liang<sup>1,2;1)</sup> WANG Ping<sup>1</sup> ZHU Yong-Sheng<sup>1</sup> ZHANG Xue-Yao<sup>2</sup>

1(Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China)

2(School of Physics and Microelectronics, Shandong University, Ji'nan 250100, China)

**Abstract** The differential cross section of  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  and the decay rate of  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  are derived, and a simulation program is coded for the generator of  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  taking account of initial state radiative correction with G. Bonneau and F. Martin's formulations. The consistencies of various distributions between data, MC and theory expectation for  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$  process prove the correctness of the derived formulae and the simulations.

**Key words** initial state radiative correction,  $e^+e^-$  annihilation, generator, angular distribution, detection efficiency

Received 19 April 2004

\* Supported by National Natural Science Foundation of China(19991480)

1)E-mail: mall@mail.ihep.ac.cn