第27卷 第3期
2003年3月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.27, No.3
Mar., 2003

激发双参数变形奇偶相干态的压缩特性*

黄纯青[1] 江俊勤[2]

1（佛山科学技术学院物理系 佛山 528000）

2（广东教育学院物理系 广州 510303）

摘要 研究了激发奇 qs 相干态 $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{o}$ 和激发偶 qs 相干态 $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{e}$ 的压缩特性，数值计算了参数 m，s 和 q 对 qs 压缩函数的影响．结果表明：(1)当 q 或 s 偏离1较远时，态 $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{o}$ 和 $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{e}$ 都能呈现出强烈的 qs 压缩，而且随着 r^2 的增大 qs 压缩函数出现振幅和周期都递增的振荡现象，其振幅不但随 q 或 s 的减小而急剧增大，而且也随着 m 的增大而急剧增大，其周期随 q 或 s 的减小而增大但与 m 无关，从控制光场的压缩效应来看，场模上光子数增加数 m 可作为第三个独立的调节参数来使用；(2) 对于大多数 r，qs 压缩函数对 s 的敏感度大于对 q 的敏感度，即通过调节参数 s 来控制光场的压缩效应要比通过调节参数 q 更有效．

关键词 奇偶 qs 相干态 激发态 压缩特性 qs 压缩函数

1 引言

近年来，量子群和量子代数由于在物理学的许多领域中有着广泛的应用前景，而受到数学和物理学工作者的重视[1]．在原子核物理学中，量子群理论的 q 变形转子模型可用于描述原子核转动谱[2,3]；在量子光学中，王伯发和匡乐满首先构造并研究了单参数奇偶 q 相干态[4—7]；但从物理应用的角度来看，多个形变参数的量子代数、多参数变形振子及多参数相干态具有更广泛的物理内涵，因此双参数形变振子及奇偶 qs 相干态的研究也受到人们的重视[8—10]．

最近，我们把 Agarwal 提出的在相干态上重复作用玻色产生算符构造新量子态的方法[11]推广到单参数奇偶 q 相干态和双参数变形奇偶 qs 相干态上，引入了激发奇偶 q 相干态[12,13]和激发奇偶 qs 相干态[14]．

压缩效应是量子光场所特有的非经典现象之一，它是通过比相干态还要低的噪音分量来体现光场的非经典特性的．本文在文献[14]的基础上进一步研究激发奇 qs 相干态和激发偶 qs 相干态的压缩特性，并数值计算参数 m，s 和 q 对 qs 压缩函数的影响．这将有助于了解双参数形变电磁场的量子特性．

2 激发双参数变形奇偶相干态

激发奇 qs 相干态（用上标 o 表示）和激发偶 qs 相干态（用上标 e 表示）定义为[14]

$$|\alpha,m\rangle_{qs}^{o}=C_m^{o}a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{o}=C_m^{o}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_{qs}!}}\sqrt{\frac{[2n+1+m]_{qs}!}{[2n+1]_{qs}!}}|2n+1+m\rangle_{qs},\tag{1}$$

$$|\alpha,m\rangle_{qs}^{e}=C_m^{e}a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_{qs}!}}\sqrt{\frac{[2n+m]_{qs}!}{[2n]_{qs}!}}|2n+m\rangle_{qs},\tag{2}$$

式中 $\alpha=re^{i\theta}$（r 为压缩参量，θ 为相位角），q 和 s 为两个变形参数；a_{qs}^{+} 为 qs 变形玻色产生算符，它与湮

2002-06-17 收稿

* 广东省自然科学基金(020127)和广东省教育厅自然科学基金(Z02083)资助

没算符 a_{qs} 以及粒子数算符 N_{qs} 满足如下对易关系:

$$a_{qs}a_{qs}^{+} - s^{-1}qa_{qs}^{+}a_{qs} = (sq)^{-N_{qs}}, \tag{3}$$

$$[N_{qs}, a_{qs}] = -a_{qs}, \ [N_{qs}, a_{qs}^{+}] = a_{qs}^{+}. \tag{4}$$

$[n]_{qs}!$ 定义为

$$[n]_{qs}! = [n]_{qs}[n-1]_{qs}\cdots[1]_{qs}, \tag{5}$$

$$[n]_{qs} = ((s^{-1}q)^{n} - (sq)^{-n})/(s^{-1}q - s^{-1}q^{-1}). \tag{6}$$

由于 $[n]_{1/q} = [n]_q$,所以只须考虑 $0 < q \leqslant 1$. 为了保持奇偶性不变,取 $m = 2,4,6,\cdots$;当 $m = 0$ 时,(1)和(2)式还原为奇偶 qs 相干态. C_m^{o} 和 C_m^{e} 为归一化常数

$$(C_m^{o})^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n+1}}{[2n+1]_{qs}!} \times \frac{[2n+1+m]_{qs}!}{[2n+1]_{qs}!},$$

$$(C_m^{e})^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n}}{[2n]_{qs}!} \times \frac{[2n+m]_{qs}!}{[2n]_{qs}!}.$$

3 激发双参数变形奇偶相干态的压缩特性

类似于普通单模电磁场压缩的定义,对于 qs 电磁场可由 a_{qs}^{+} 和 a_{qs} 定义两个算符

$$X_1 = (a_{qs}^{+} + a_{qs})/2, \quad X_2 = \mathrm{i}(a_{qs}^{+} - a_{qs})/2. \tag{8}$$

由 $[X_1, X_2] = \frac{\mathrm{i}}{2}[a_{qs}, a_{qs}^{+}]$ 容易得如下的测不准关系

$$_{qs}\langle(\Delta X_1)^2\rangle_{qs\,qs}\langle(\Delta X_2)^2\rangle_{qs} \geqslant \frac{1}{4}\left|_{qs}\langle[X_1, X_2]\rangle_{qs}\right|^2 = \frac{1}{16}\left|_{qs}\langle[a_{qs}, a_{qs}^{+}]\rangle_{qs}\right|^2 \tag{9}$$

如果

$$\Delta_k = {}_{qs}\langle(\Delta X_k)^2\rangle_{qs} - \frac{1}{4}\left|_{qs}\langle[a_{qs}, a_{qs}^{+}]\rangle_{qs}\right| < 0, \tag{10}$$

则称 X_k 分量($k = 1,2$)存在 qs 压缩. Δ_k 称为 qs 压缩函数.

对于态 $|\alpha, m\rangle_{qs}^{e}$ 和态 $|\alpha, m\rangle_{qs}^{o}$,有

$$\begin{aligned}\Delta_1^{e} = \frac{1}{4}\Big\{ & {}_{qs}^{e}\langle\alpha, m|(a_{qs}^{+2} + a_{qs}^{2})|\alpha, m\rangle_{qs}^{e} + \\ & {}_{qs}^{e}\langle\alpha, m|a_{qs}^{+}a_{qs}|\alpha, m\rangle_{qs}^{e} + \\ & {}_{qs}^{e}\langle\alpha, m|a_{qs}a_{qs}^{+}|\alpha, m\rangle_{qs}^{e}\Big\} - \\ & \frac{1}{4}\left|{}_{qs}^{e}\langle\alpha, m|a_{qs}a_{qs}^{+}|\alpha, m\rangle_{qs}^{e} - \right. \\ & \left.{}_{qs}^{e}\langle\alpha, m|a_{qs}^{+}a_{qs}|\alpha, m\rangle_{qs}^{e}\right|,\end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1^{o} = \frac{1}{4}\Big\{ & {}_{qs}^{o}\langle\alpha, m|(a_{qs}^{+2} + a_{qs}^{2})|\alpha, m\rangle_{qs}^{o} + \\ & {}_{qs}^{o}\langle\alpha, m|a_{qs}^{+}a_{qs}|\alpha, m\rangle_{qs}^{o} + \\ & {}_{qs}^{o}\langle\alpha, m|a_{qs}a_{qs}^{+}|\alpha, m\rangle_{qs}^{o}\Big\} - \\ & \frac{1}{4}\left|{}_{qs}^{o}\langle\alpha, m|a_{qs}a_{qs}^{+}|\alpha, m\rangle_{qs}^{o} - \right. \\ & \left.{}_{qs}^{o}\langle\alpha, m|a_{qs}^{+}a_{qs}|\alpha, m\rangle_{qs}^{o}\right|,\end{aligned} \tag{11b}$$

其中

$$\begin{aligned}{}_{qs}^{e}\langle\alpha, m|a_{qs}^{+}a_{qs}|\alpha, m\rangle_{qs}^{e} = (C_m^{e})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2n]_{qs}!} \times \\ \frac{[2n+m]_{qs}!}{[2n]_{qs}!} \times [2n+m]_{qs},\end{aligned} \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}{}_{qs}^{o}\langle\alpha, m|a_{qs}^{+}a_{qs}|\alpha, m\rangle_{qs}^{o} = (C_m^{o})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_{qs}!} \times \\ \frac{[2n+1+m]_{qs}!}{[2n+1]_{qs}!} \times [2n+1+m]_{qs},\end{aligned} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned}{}_{qs}^{e}\langle\alpha, m|a_{qs}a_{qs}^{+}|\alpha, m\rangle_{qs}^{e} = (C_m^{e})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2n]_{qs}!} \times \\ \frac{[2n+m]_{qs}!}{[2n]_{qs}!} \times [2n+1+m]_{qs},\end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned}{}_{qs}^{o}\langle\alpha, m|a_{qs}a_{qs}^{+}|\alpha, m\rangle_{qs}^{o} = (C_m^{o})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_{qs}!} \times \\ \frac{[2n+1+m]_{qs}!}{[2n+1]_{qs}!} \times [2n+2+m]_{qs},\end{aligned} \tag{13b}$$

$$\begin{aligned}&{}_{qs}^{e}\langle\alpha, m|(a_{qs}^{+2} + a_{qs}^{2})|\alpha, m\rangle_{qs}^{e} = \\ &2x\cos(2\theta)(C_m^{e})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2n]_{qs}!} \times \frac{[2n+m]_{qs}!}{[2n]_{qs}!} \times \\ &\frac{[2n+1+m]_{qs}[2n+2+m]_{qs}}{[2n+1]_{qs}[2n+2]_{qs}},\end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned}&{}_{qs}^{o}\langle\alpha, m|(a_{qs}^{+2} + a_{qs}^{2})|\alpha, m\rangle_{qs}^{o} = \\ &2x\cos(2\theta)(C_m^{o})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_{qs}!} \times \frac{[2n+1+m]_{qs}!}{[2n+1]_{qs}!} \times \\ &\frac{[2n+2+m]_{qs}[2n+3+m]_{qs}}{[2n+2]_{qs}[2n+3]_{qs}},\end{aligned} \tag{14b}$$

式中 $x = r^2$. 当 $\theta = \pi/2$ 时 q 压缩最大.

首先,考虑 $q < 1$ 和 $s < 1$ 的情况. 图 1 和图 2 给出当 $\theta = \pi/2, q = 0.5, s = 0.7, 0.5, m = 0.2$ 时,Δ_1^{e} 和 Δ_1^{o} 随 $x(= r^2)$ 变化的规律(限于篇幅,本文只给出 $m = 0,2$ 的情况).

可见,对于较小的 q(如 $q = 0.5$),态 $|\alpha, m\rangle_{qs}^{e}$ 和 $|\alpha, m\rangle_{qs}^{o}$ 都能呈现出强烈的压缩效应. 在 x 较大的区间,随着 x 的增大,qs 压缩函数 Δ_1^{e}(和 Δ_1^{o})出现振幅和周期都递增的振荡现象,其振幅随 s 减小而增大(当然也随 q 的减小而增大,限于篇幅

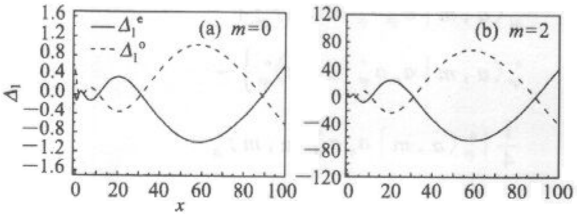

图1 当 $s=0.7$ 时,Δ_1^e 和 Δ_1^o 与 $x(=r^2)$的关系

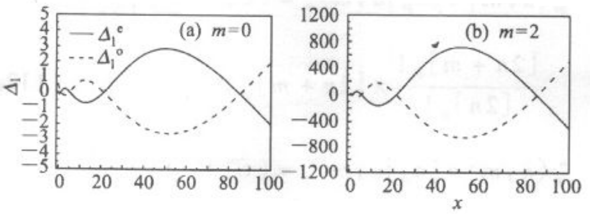

图2 当 $s=0.5$ 时,Δ_1^e 和 Δ_1^o 与 $x(=r^2)$的关系

本文未给出)、随 m 的增大而急剧增大,其周期随 s 减小而增大,但与 m 无关. 另外,对于相同的 q 和 s,不同的 m,qs 压缩函数的振动规律相似.

第二,讨论 qs 压缩函数对变形参数 q 和 s 的敏感度,可用 qs 压缩函数对变形参数 q 和 s 的变化率的绝对值描写,定义为

$$\beta_q = \left|\frac{\Delta_1^{q+\Delta q,s} - \Delta_1^{qs}}{\Delta q}\right|, \tag{15}$$

$$\beta_s = \left|\frac{\Delta_1^{q,s+\Delta s} - \Delta_1^{qs}}{\Delta s}\right|. \tag{16}$$

β 的值越大,敏感度就越大. 在数值计算中,取 $\Delta q=\Delta s=10^{-5}$,而 $q(=s)$则分别取为0.3,0.4,0.5,0.6和0.7.

计算结果表明,对于大多数 r,qs 压缩函数对参数 s 的敏感度大于对参数 q 的敏感度. 图3给出了当 $m=0,q=s=0.4$ 时,β^e 的数值结果(对于 β^o 情况类似,限于篇幅本文未给出).

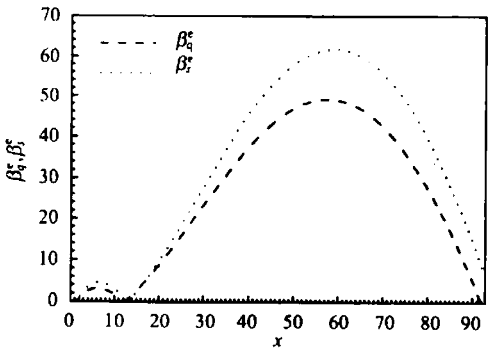

图3 β_q^e 或 β_s^e 与 x 的关系

此外,考虑 $q\to1$ 和 $s<1$ 的情况. 在(11)式中,取 $q=1$,分别对 $m=0,2,s=0.3,0.4,0.5$ 各种情况计算了 Δ_1^e 和 Δ_1^o 随 x 变化的关系. 数值结果表明:当 $q\to1$,而 $s<1$ 时,$a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^o$ 和 $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^e$ 退化为另一种单参数变形的激发奇偶相干态,即激发奇偶 s 相干态 $a_s^{+m}|\alpha\rangle_s^o$ 和 $a_s^{+m}|\alpha\rangle_s^e$,它们同样都能呈现出强烈的压缩效应,压缩函数同样出现振荡现象. 但限于篇幅只给出 $s=0.4,m=0$ 的结果,如图4所示.

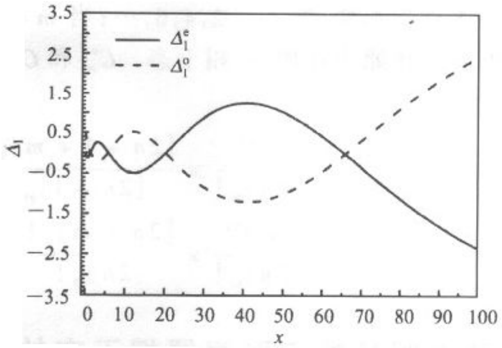

图4 当 $\theta=\pi/2,q=1$ 时,Δ_1^e 和 Δ_1^o 与 x 的关系

4 结论

本文研究了激发奇 qs 相干态和激发偶 qs 相干态的压缩特性,数值计算参数 m,s 和 q 对 qs 压缩函数的影响. 综合计算结果,可得如下结论:

(1) 当 q 或 s 偏离1较远时,态 $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^o$ 和 $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^e$ 都能呈现出强烈的 qs 压缩,而且随着 r^2 的增大 qs 压缩函数出现振幅和周期都递增的振荡现象,其振幅随 q 或 s 的减小而急剧增大,而且也随着 m 的增大而急剧增大,其周期随 q 或 s 的减小而增大但与 m 无关. 激发奇偶 qs 相干态不但把原来的双参数奇偶 qs 相干态[9,10]包含在其中,而且从控制变形光场的压缩效应来看,场模上光子数增加数 m 可作为第3个独立的调节参数来使用. 由于用3个独立参数来调节比用两个独立参数更容易(途径更多),因此这种体系一旦在实验上实现,便可通过调节3个独立参数 q,s 和 m 来控制光场的某些量子特性.

(2) 对于大多数 r,当 m 取一定值时,qs 压缩函数对 s 的敏感度大于对 q 的敏感度,即通过调节参数 s 来控制光场的压缩效应要比通过调节参数 q 更加有效一些.

参考文献(References)

1 Haret C. Rosu, Carlos Castro. Phys. Lett., 2000, **A264**:350—356

2 Raychev P P, Roussev R P, Smirnov Yu F. J. Phys., 1990, **G16**: L137; Iwao S, Prog. Thero. Phys., 1990, **83**:363

3 FANG Xiang-Zheng, RUAN Tu-Nan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**:212—219; 2001, **25**:315—321(in Chinese)
(方向正,阮图南. 高能物理与核物理,2001,**25**:212—219; 2001, **25**:315—321)

4 WANG F B, KUANG L M. Phys. Lett., 1992, **A169**(4):225—228

5 KUANG L M,WANG F B. Phys. Lett., 1993, **A173**(3):221—227

6 ZHU Cong-Xu, WANG Fa-Bo, KUANG Le-Man. Acta Physica Sinica, 1994, **43**(8):1262—1267(in Chinese)
(朱从旭,王发伯,匡乐满. 物理学报,1994, **43**(8):1262—1267)

7 WANG Zhong-Qing. Acta Physica Sinica, 2001, **50**(4):690—692(in Chinese)
(汪仲清. 物理学报,2001, **50**(4):690—692)

8 ZHOU Huan-Qiang, HE Jing-Song, ZHANG Xin-Ming. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1995, **19**:251—257(in Chinese)
(周焕强,贺劲松,张新明. 高能物理与核物理,1995,**19**:251—257)

9 WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong, ZHAO Ming-Jian. Acta Optica Sinica, 1997, **17**(3):293—297(in Chinese)
(王继锁,孙长勇,赵铭健. 光学学报,1997,**17**(3):293—297)

10 WANG Zhong-Qing. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**(12):1158—1164(in Chinese)
(汪仲清. 高能物理与核物理,2001,**25**(12):1158—1164)

11 Agarwal G S, Tara K. Phys. Rev., 1991, **A43**(1):492—497

12 JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2002, **26**(4):331—337(in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理,2002,**26**(4):331—337)

13 JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2002, **26**(8):786(in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理,2002, **26**(8):786)

14 JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2003, **27**:15(in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理,2003, **27**:15)

Squeezing Property of the Excited Two-Parameter Deformed Even and Odd Coherent States

HUANG Chun-Qing[1]　JIANG Jun-Qin[2]

1 (Department of Physics, Foshan University, Foshan 528000, China)

2 (Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

Abstract The squeezing property of the excited odd qs-coherent state $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{o}$ and excited even qs-coherent state $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{e}$ is numerically studied. It is shown that: (1) When the $q(q\leqslant 1)$ or s is far from 1, the state $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{o}$ and state $a_{qs}^{+m}|\alpha\rangle_{qs}^{e}$ exhibit strong qs-squeezing, and as r^2 increases the qs-squeezing function $\Delta_1^e(\Delta_1^o)$ exhibits the oscillating phenomenon of increasing-amplitude and increasing-period. As m increases and s decreases, the amplitude of $\Delta_1^e(\Delta_1^o)$ increases greatly. As s decreases, the period of $\Delta_1^e(\Delta_1^o)$ increases but is independent of m. The m can be regard as the third parameter for controling the qs-squeezing. (2) In general, the qs-squeezing function $\Delta_1^e(\Delta_1^o)$ is more sensitive to s than to q. That is, it is more resultful to control the qs-squeezing by adjusting the parameter s than by adjusting the parameter q.

Key words even and odd qs-coherent state, excited state, squeezing property, qs-squeezing function

Received 17 June 2002

* Supported by Natural Science Foundation of Guangdong Province of China (020127) and Natural Science Foundation of the Education Department of Guangdong Province of China (Z02083)