第25卷第4期
2001年4月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol.25, No.4
Apr.,2001

$SO(n)$规范势的可分解理论*

李希国[1,2] 段一士[3] 宋建军[1,2]
1（兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心　兰州　730000）
2（中国科学院近代物理研究所　兰州　730000）
3（兰州大学理论物理研究所　兰州　730000）

摘要　使用几何代数方法，研究了 n 维紧致黎曼流形上$SO(n)$规范势（自旋联络）的一般分解理论，建立了 $SO(n)$规范场用球丛上单位矢量场 n 分解的一般表达式. 由此，分别得到了 $U(1)$规范场和 $U(2)$规范场用单位矢量场 n 分解的一般形式.

关键词　$SO(n)$群　自旋联络　规范场

1　引言

规范场拓扑性质的研究是理论物理的重要前沿之一. 规范场理论不仅使人们对基本粒子和弱电作用，强作用有了实质性的认识，而且，为研究时空数学结构和拓扑性质提供了有力的工具，尤其是在四维流形的微分结构，Donaldson 不变量和三维扭结的研究中. 众所周知，规范势是主丛 $P(\pi,M,G)$上的联络，揭示和发现规范场大范围内的拓扑性质与相应拓扑不变量的关系是其基本任务之一. 在拓扑孤立子，例如涡旋、单极、瞬子等问题的研究中给出了时空拓扑结构与陈类的关系，这些拓扑孤立子可认为是具有内部结构的点. 这些带有拓扑性质的点是一些基本场的零点或奇异点，直接反映了拓扑不变量的组合特性. 从物理方面而言，规范势是描述传递相互作用的场. 而从数学角度看，规范势是主丛上的联络，反映了流形的局域几何性质，其曲率张量的特定代数组合构成拓扑不变量. 因此，在解析的研究流形的拓扑性质时怎样才能将拓扑信息直接反映在规范势及规范场强中去，这需要用携带拓扑特性的基本场去解析表达规范势及规范场强. 实际上，这一思想在文献[1]中早已给出. 最近，E. Witten[2]在用单极理论研究四维流形不变量的工作中，用旋丛上的截面分解出规范场强，体现了用基本场分解规范场这一思想. 用单位矢量场分解规范场是研究流形的某些拓扑不变量，物理中的拓扑问题的有效工具，这一点在 't Hooft磁单极理论[1,3]、凝聚态物理中的旋错、位错拓扑规范理论[4]、Gauss-Bonnet-Chern定理[5,6]及广义相对论中时空缺陷的 Plank 常数的量子化理论和扭结[7]等方面得到了体

2000-05-19 收稿
* 原子核理论研究中心基金，中国科学院近代物理研究所所长基金和国家教委留学回国基金资助

现。最近，Faddeev L. 等人指出[8] $SU(2)$规范势用单位矢量场表达的形式可以用以描述规范场在短距离的渐进自由以及象扭结形式的孤立子，但他们采用的形式不完整、不严格.

本文首先简要地介绍规范势可分解理论和具有内部结构的理论基础；其次，使用几何代数的方法[7]给出了 n 维紧致黎曼面上 $SO(n)$规范势（自旋联络）用单位矢量场（球丛上的截面）分解的一般形式，并证明了这种分解具有整体性和不依赖于单位矢量的选择性；最后讨论了 $U(1)$，$SU(2)$群的规范场用单位矢量场分解问题.

2　规范势的可分解性

设 A，F，ϕ 分别是主丛 $P(\pi, M, G)$上的联络 1 形式（规范势），曲率张量 2 形式（规范场强）和截面（基本场），由规范理论可知，当联络 1 形式 A 满足规范变换

$$A' = SAS^{-1} + \mathrm{d}SS^{-1} \tag{1}$$

时，曲率张量 2 形式 F 满足协变形式为

$$F' = SFS^{-1}$$

场及协变微商也满足协变变换为

$$\phi' = S\phi, \tag{3}$$

$$\mathrm{D}\phi' = S\mathrm{D}\phi. \tag{4}$$

这是规范理论的基础. 满足规范变换的规范势 A 总可以分解为下列两部分

$$A = A_1 + a, \tag{5}$$

要求 A_1 和 a 分别满足规范变换和矢量协变变换，即

$$A_1' = SA_1S^{-1} + \mathrm{d}SS^{-1}, \tag{6}$$

$$a' = SaS^{-1} \tag{7}$$

时 $A_1 + a$ 仍然满足规范变换的规律(1)式. 进一步来看，A_1 及 a 可由基本场来构成，这由具体问题决定其基本场和分解形式. 在 $GL(4)$群的规范理论（广义相对论）中，A_1 对应无绕联络（Christoffel symbol），可由度规完全表示，a 对应绕度. 自旋联络和 Weyl 规范条件下 $SU(2)$规范势[9]是分别用 Vierbein 场来的. 这为研究其几何性质提供了有效方法. 然而这种分解用来研究规范理论大范围内拓扑性质时，不能直接计算拓扑数.

3　$SO(n)$规范势的一般分解理论

前面已经提到在场论拓扑孤立子问题中，一些基本场的零点或奇异点的局域拓扑特性的组合直接描述整体拓扑不变性，在著名的欧拉类中，黎曼流形的欧拉示性数等于该流型矢量丛上的截面即矢量场零点拓扑指数的代数和，这是 Hopf 定理的结果. 因此，用矢量场构造规范势，直接将拓扑信息反应在规范场中. 设 M 是一紧致的 n 维黎曼流形，$\boldsymbol{\varphi}$ 是 M 矢量丛上一个光滑截面（矢量场），定义一个单位矢量场

$$n^a = \varphi^a/\varphi,\ \varphi = \|\boldsymbol{\varphi}\|,\ \varphi^2 = \varphi^a\varphi^a, \tag{8}$$

式中指标“a”$=1,\cdots n$ 是局域正交架指标,显然,$\boldsymbol{n}$ 是M 的球丛$S(M)$[10]上的一个截面.从(8)式可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 的零点正好是n 的奇异点,具有自然约束[11]

$$n^a n^a = 1 \tag{9}$$

及外微分

$$n^a \mathrm{d} n^a = 0. \tag{10}$$

注意在本文中使用了爱因斯坦求和约定. 在 $SO(n)$规范理论中,黎曼流形上的矢量丛就是以 $G=SO(n)$为结构群的主丛 $P(\pi,M,G)$,其联络称为自旋联络,用 ω^{ab} 表示,设 x^μ 是底流形的局域坐标,则

$$\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab}\mathrm{d}x^\mu,\ \omega^{ab} = -\omega^{ba} \tag{11}$$

和曲率张量形式为

$$F^{ab}(\omega) = \mathrm{d}\omega^{ab} - \omega^{ac}\wedge\omega^{cb}. \tag{12}$$

单位矢量的协变微商形式定义为

$$\mathrm{D}_\omega n^a = \mathrm{d}n^a - \omega^{ab}n^b, \tag{13}$$

且具有自然条件

$$n^a \mathrm{D}_\omega n^a = 0. \tag{14}$$

设 γ_a 为n 维 Dirac 矩阵,满足 Clifford 代数 $\gamma_a\gamma_b+\gamma_b\gamma_a=2\delta_{ab}$,$SO(n)$群的生成元为

$$I_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a,\gamma_b], \tag{15}$$

且有关系

$$[I_{ab},\gamma_c] = \gamma_a\delta_{bc} - \gamma_b\delta_{ac}. \tag{16}$$

自旋联络形式和曲率张量形式可表示为

$$\omega = \frac{1}{2}\omega^{ab}I_{ab},F(\omega) = \frac{1}{2}F^{ab}(\omega)I_{ab}.$$

在几何代数理论[12,13]中,设 γ_a 为基矢,单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 能表示为如下的矩阵形式

$$n = n^a\gamma_a \tag{18}$$

被称为几何代数中的矢量,$\omega,F(\omega)$分别是几何代数中的2矢量,几何代数中的任意矢量 h 和f,其几何积为

$$fh = f^a h^a + (f^a h^a - h^a f^b)I_{ab}.$$

由(19)式可证

$$nn = n^a n^a = 1,\mathrm{d}nn + n\mathrm{d}n = 0, \tag{20}$$
$$\mathrm{D}_\omega nn + n\mathrm{D}_\omega n = 0$$

和

$$\mathrm{d}nn = (\mathrm{d}n^a n^b - n^a\mathrm{d}n^b)I_{ab}, \tag{22}$$

$$n\mathrm{D}_\omega n = (n^a\mathrm{D}_\omega n^b - n^b\mathrm{D}_\omega n^a)I_{ab}. \tag{23}$$

使用(18),(16),(17)式,从(13),(12)式得

$$\mathrm{D}_\omega n = \mathrm{d}n - [\omega,n], \tag{24}$$

$$F(\omega) = \mathrm{d}\omega - \omega\wedge\omega. \tag{25}$$

设 T_r 是几何代数中的 r 矢量 $T_r=\frac{1}{r!}T^{a_1\cdots a_r}\gamma_{a_1}\cdots\gamma_{a_r}$,可证协变微商 1 形式为

$$\mathrm{D}_\omega T_r = \mathrm{d}T_r - [\omega, T_r]. \tag{26}$$

使用(20)和(21)式,由(24)式解得自旋联络形式为

$$\omega = \frac{1}{2}(\mathrm{d}nn + n\mathrm{D}_\omega n) + \frac{1}{2}J_n(\omega), \tag{27}$$

式中引用了符号

$$J_n(\omega) = n\omega n + \omega. \tag{28}$$

(27)、(28)式就是 $SO(n)$群规范势(自旋联络)的一般分解形式. (27)式中的第二项使其分解式(27)满足规范变换律(1)式. 下面讨论分解式(27)的整体性. 设$\{W, V, U, \cdots\}$是 M 上的一个开覆盖,S_{VU}是转换矩阵函数,且满足条件[14]

$S_{VV}=1, S_{VU}^{-1}=S_{UV}, S_{WV}S_{VW}=1, W\cap V\cap U\neq 0$,对于任意两开领域 V 和 U,如 $V\cap U\neq 0$ 则

$$n_V = S_{VU}n_U S_{VU}^{-1}, \tag{29}$$

这里 n_U 和 n_V 分别是 U 和 V 上的单位矢量,自旋联络满足关系

$$\omega_V = S_{VU}\omega_U S_{VU}^{-1} + \mathrm{d}S_{VU}S_{VU}^{-1}, \tag{30}$$

这是主丛 $P(\pi, M, G)$上联络存在的基本要求. 其实 S_{UV}正是式中的规范变换[15],为了方便,在下文中用 S,由(27)式可证

$$\frac{1}{2}(\mathrm{d}n_Vn_V + n_V\mathrm{D}_{\omega_V}n_V) + \frac{1}{2}J_{n_V}(\omega_V) = S\left[\frac{1}{2}(\mathrm{d}n_Un_U + n_U\mathrm{D}_{\omega_U}n_U) + \frac{1}{2}J_{n_U}(\omega_U)\right]S^{-1} + \mathrm{d}SS^{-1}$$

由(30)和(31)式得

$$\omega_V - \left[\frac{1}{2}(\mathrm{d}n_Vn_V + n_V\mathrm{D}_{\omega_V}n_V) + \frac{1}{2}J_{n_V}(\omega_V)\right] = S\left[\omega_U - \frac{1}{2}(\mathrm{d}n_Un_U + n_U\mathrm{D}_{\omega_U}n_U) - \frac{1}{2}J_{n_U}(\omega_U)\right]S^{-1}.$$

这一关系说明在开领域 U 上自旋联络的分解形式 $\omega_U=\frac{1}{2}(\mathrm{d}n_Un_U + n_U\mathrm{D}_{\omega_U}n_U) + \frac{1}{2}J_{n_U}(\omega_U)$成立时,在开领域 V 上自旋联络的分解形式 $\omega_V=\frac{1}{2}(\mathrm{d}n_Vn_V + n_V\mathrm{D}_{\omega_V}n_V) + \frac{1}{2}J_{n_V}(\omega_V)$也一定成立,因此一般分解式具有整体性. 另一方面,设 $\boldsymbol{k}$ 为球丛上独立于 $\boldsymbol{n}$ 的另一截面 $\boldsymbol{k}$,同样是几何代数中的矢量,而 $\boldsymbol{nk}$ 构成几何代数中的 2 矢量,由(26)式得

$$\mathrm{D}_\omega(nk) = \mathrm{d}(nk) - [\omega, nk], \tag{32}$$

经简单的推导[16],(32)式能变为

$$\frac{1}{2}(\mathrm{d}nn + n\mathrm{D}_\omega n) + \frac{1}{2}J_n(\omega) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}kk + k\mathrm{D}_\omega k) + \frac{1}{2}J_k(\omega), \tag{33}$$

(33)式意味着一般分解形式(27)不依赖于单位矢量场的具体选择,设 $b=\frac{1}{2}b^{ab}I^{ab}$,且 $b'=SbS^{-1}$是 $SO(n)$李代数中的任意元素,使用 n 总可以构造(5)式中的 a 为

$$a = \frac{1}{2}(nbn + b), \tag{34}$$

显然,a 满足协变变换 $a' = SaS^{-1}$. 将(5)式中的 A 用 ω 代替后代入(28)式得

$$J_n(\omega) = n(\omega_1 + b)n + \omega_1 + b = J_n(B), \tag{35}$$

式中

$$B = \omega_1 + b, \tag{36}$$

因为 b 是任意的,所以 B 也具有任意性,且满足规范变换

$$B' = SBS^{-1} + \mathrm{d}SS^{-1} \tag{37}$$

是 $SO(n)$ 群一个任意联络. 因此自旋联络的一般分解式(27)也可以写为

$$\omega = \frac{1}{2}(\mathrm{d}nn + n\mathrm{D}_\omega n) + \frac{1}{2}J_n(B), \tag{38}$$

显然,(38)式满足(24)及规范变换规律(1),代入(25)式经过几何代数和微分运算得曲率张量形式为

$$F(\omega) = \frac{1}{4}(-\mathrm{D}_B n \wedge \mathrm{D}_B n + \mathrm{D}_\omega n \wedge \mathrm{D}_\omega n + n\mathrm{D}_B\mathrm{D}_\omega n - \mathrm{D}_B\mathrm{D}_\omega nn) + \frac{1}{2}(nF(B)n + F(B)), \tag{39}$$

式中 $\mathrm{D}_B n = \mathrm{d}n - [B, n]$, $F(B) = \mathrm{d}B - B \wedge B$. 使用(22),(23)及(17)式,其分量形式为

$$\omega^{ab} = (\mathrm{d}n^a\mathrm{d}n^b - n^a\mathrm{d}n^b + n^a\mathrm{D}_\omega n^b - n^b\mathrm{D}_\omega n^a) + \frac{1}{2}J_n^{ab}(B), \tag{40}$$

$$F^{ab}(\omega) = -\mathrm{D}_B n^a \wedge \mathrm{D}_B n^b + \mathrm{D}_\omega n^a \wedge \mathrm{D}_\omega n^b + n^a\mathrm{D}_B\mathrm{D}_\omega n^b - n^b\mathrm{D}_B\mathrm{D}_\omega n^a + F^{bc}(B)n^a n^a + F^{ac}(B)n^c n^b + F^{ab}(B). \tag{41}$$

在(40)和(41)式中,由于 B 的任意性,取 $SO(n)$ 群的平联络形式,则 $F^{ab}(B) = 0$,使用这一分解形式,可以证明 Gauss-Bonnet-Chern 定理[17]中的欧拉密度为单位矢量场 $\boldsymbol{n}$ 和其外微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 的外积组成的 Chern-simous 形式[6],由此可给出欧拉密度的拓扑结构和 Gauss-Bonnet-Chern 定理的一种证明,并可得到 Morse 理论的结果.

4 $U(1)$和 $SU(2)$规范势的一般分解理论

4.1 $U(1)$规范势的一般分解形式

设 T 为 $U(1)$群的生成元,则与群 $SO(2)$的生成元之间存在

$$T = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}I^{ab}, I^{ab} = \varepsilon_{ab}T. \tag{42}$$

定义 $U(1)$群的规范势为

$$A = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\omega^{ab}, \omega^{ab} = \varepsilon_{ab}A, \tag{43}$$

$U(1)$群的规范势 A 与 $SO(2)$群规范势对偶 可证 $J_n(B) = 0$,因此 $SO(2)$群的联络和曲率张量的一般分解分别为

$$\omega = \frac{1}{2}(\mathrm{d}nn + n\mathrm{D}_{\omega}n), \tag{44}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}(-\mathrm{d}n \wedge \mathrm{d}n + \mathrm{d}n \wedge \mathrm{D}_{\omega}n + n\mathrm{d}\mathrm{D}_{\omega}n), \tag{45}$$

其分量形式为

$$\omega^{ab} = \mathrm{d}n^a n^b - n^a \mathrm{d}n^b + n^a \mathrm{D}_{\omega}n^b - n^b \mathrm{D}_{\omega}n^a, \tag{46}$$

$$F^{ab}(\omega) = -2\mathrm{d}n^a \wedge \mathrm{d}n^b + \mathrm{d}n^a \wedge \mathrm{D}_{\omega}n^b - \mathrm{d}n^b \wedge \mathrm{D}_{\omega}n^a + n^a \mathrm{D}_{\omega}n^b - n^b \mathrm{D}_{\omega}n^a. \tag{47}$$

$U(1)$群的规范势和规范场强的一般分解形式分别为

$$A = \varepsilon_{ab}(\mathrm{d}n^a n^b + n^a \mathrm{D}_A n^b), \tag{48}$$

$$F(A) = \varepsilon_{ab}\mathrm{d}n^a \wedge \mathrm{d}n^b + \varepsilon_{ab}(\mathrm{d}n^a \wedge \mathrm{D}_A n^b + n^a \mathrm{d}\mathrm{D}_A n^b). \tag{49}$$

当 $\boldsymbol{n}$ 为规范平行单位矢量时，即 $\mathrm{D}_A n^a = 0$，分解形式分别为

$$A_{/\!/} = \varepsilon_{ab}\mathrm{d}n^a n^b, \tag{50}$$

$$F(A_{/\!/}) = -\varepsilon_{ab}\mathrm{d}n^a \wedge n^b. \tag{51}$$

可以证明 A，$A_{/\!/}$之间相差一规范变换. (50)式的分解形式是用以研究位错的拓扑结构及其分类和时空缺陷中 Plank 常数的拓扑量子化[7]问题，由于 $SO(2)$或 $U(1)$规范势用一般单位矢量场 $\boldsymbol{n}$ 分解和用规范平行单位矢量分解之间相差一规范变换，因此在上述[5,7]两个物理问题中所给出的结果具有普遍性.

4.2　$SU(2)$规范势的一般分解形式

众所周知，$SO(3)$群和 $SU(2)$群具有相同的局域结构，换言之，具有相同的李代数结构. 设 T^a是$SU(2)$群的生成元，与 $SO(3)$群的生成元 I^{ab}的关系是

$$T^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}I_{bc}, I_{ab} = \varepsilon_{abc}T^c,$$

由此可知，$SU(2)$群规范势与 $SO(3)$群规范势之间的关系为

$$A^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\omega^{bc}, \omega^{ab} = \varepsilon_{abc}A^c$$

它们曲率张量 2 形式之间的关系为

$$F^a(A) = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}F^{bc}(\omega), \omega^{ab} = \varepsilon_{abc}F^c(A), \tag{54}$$

$$J_n^a(A) = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_n^{ab}(\omega). \tag{55}$$

经简单计算得

$$J_n^a(A) = 2Zn^a, \tag{56}$$

式中

$$Z = A^c n^c$$

是 $SU(2)$规范势在单位矢量场 $\boldsymbol{n}$ 上的投影. 满足 $U(1)$规范变换.

$SO(3)$群规范势 1 形式和曲率张量 2 形式的一般分解形式分别为

$$\omega^{ab} = \mathrm{d}n^a n^b - n^a \mathrm{d}n^b + n^a \mathrm{D}_{\omega}n^b - n^b \mathrm{D}_{\omega}n^a + \varepsilon^{abc}n^c Z,$$

$$F^{ab}(\omega) = -\mathrm{d}n^a \wedge \mathrm{d}n^b + \mathrm{D}_{\omega}n^a \wedge \mathrm{D}_{\omega}n^b - n^b \mathrm{d}\mathrm{D}_{\omega}n^a + n^a \mathrm{d}\mathrm{D}_{\omega}n^b +$$

$$(D_\omega n^c - dn^c) \wedge Z(\varepsilon^{cad} n^d n^b - \varepsilon^{cad} n^d n^a) + \varepsilon^{abc} n^c dZ + \varepsilon^{abc} dn^c \wedge Z. \tag{59}$$

$SU(2)$群规范势1形式和曲率张量2形式的一般分解形式分别为

$$A^a = \varepsilon_{abc} dn^b n^c + \varepsilon_{abc} n^b D_A n^c + Zn^a \tag{60}$$

$$F^a(A) = dZn^a - \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} dn^b \wedge dn^c + \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} D_A n^b \wedge D_A n^c + \varepsilon_{abc} n^b dD_A n^c - Z \wedge D_A n^a. \tag{61}$$

当 n 为规范平行单位矢量场时,即 $D_A n^a = 0$,则(60)式及(61)式变为

$$A^a_{/\!/} = \varepsilon_{abc} dn^b n^c + Zn^a, \tag{62}$$

$$F^a(A_{/\!/}) = dZn^a - \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} dn^b \wedge dn^c. \tag{63}$$

进一步当取轴规范条件 $Z = A^a n^a = 0$ 时,(62)式,(63)式分别变为

$$A^a_{/\!/} = \varepsilon_{abc} dn^b n^c, \tag{64}$$

$$F^a(A_{/\!/}) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abc} dn^b \wedge dn^c. \tag{65}$$

可证[16]在轴规范条件下,(60)式与(64)式相差一规范变换.(62)式和(63)式是研究't Hooft磁单极问题[1]时给出的,(64)式和(65)式是研究旋错的拓扑结构和分类以及引力场中的磁单极问题[18]时采用的,由于(64)式的分解形式中采用了 $Z=0$ 的条件,在讨论 M 为非平直流形时所给出的结果与采用(62)式的分解形式所得的结果可能不同,因为(64)式在非平直流形上不具有整体性.

本文主要研究了 $SO(n)$群规范势用单位矢量场分解的一般理论,它是研究数学和物理中拓扑问题的有效方法.用度规分解联络是研究微分几何及引力场的有效途径,用旋量场,张量场怎样构造联络?是值得探讨和研究的问题.

参考文献(References)

1 DUAN Yi-Shi, GE M L. Sci. Sinica, 1979, **11**:9; DUAN Yi-Shi, ZHAO S C. Commun. Theor. Phys., 1983, **2**:1553

2 Witten E. Monopoles and Four-Manifolds, hep-th/9411102

3 DUAN Y S. SLAC-PUB-3301/84

4 DUAN Y S, ZHANG S L. Int. J. Eng. Sci., 1990, **28**:689; 1991, **29**:153

5 DUAN Y S, MENG M H. J. Math. Phys., 1993, **34**:1149

6 DUAN Y S, LI Xi-Guo. Helv. Phys. Acta, 1995, **68**:9

7 DUAN Y S et al. J. Math. Phys., 1994, **35**:9; LI Xi-Guo. High Energy and Nuclear Physics, 1999, **23**(9):906—913(in Chinese)
(李希国. 高能物理与核物理,1999,23(9):906—913)

8 Faddeev L, Niemi Antti J. Phys. Rev. Lett., 1999,**82**(8):1624

9 Heagensen F E, Johnson K. Nucl. Phys., 1995, **B439**:597

10 Fomenko A T. Differential Geometry and Topology. New York: Consutants Bureau Press, 1987

11 Bott R, WU L W. Differential form in Algebratic Topolody. Springer-Verlag Press, 1982

12 Hestones D, Sobczyk G. Clifford Algebra to Geometric Calculus Reidel, Dorelrecht 1984

13 Doran C, Hestenes D et al. J. Math. Phys., 1993, **34**:3642; Lasenbly, Doran C et al. J. Math. Phys., 1993, **34**:3683

14 Chern S S. An. da Acad. Brusileira de Ciencias, 1963, **35**:17
15 Eguchi T, Gilueg P B, Hanson A J. Phys. Rep., 1980, **66**:213
16 LI Xi-Guo, Doctoral Dissertation. Lanzhou University, 1994
17 Chern S S. Ann. Math. 1944, **45**:747; 1945, **46**:674
18 Kimyeong L et al. Phys, Rev. Lett., 1992, **68**:1100

General Decomposition Theory of $SO(n)$ Gauge Potential*

LI Xi-Guo[1,2]　DUAN Yi-Shi[3]　SONG Jian-Jun[1,2]

1 (*Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Collisions, Lanzhou 730000, China*)
2 (*Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China*)
3 (*Institute of Theoritical Physics, Lanzhou University. Lanzhou 730000, China*)

Abstract By means of devices of geometry algebra the general decomposition of gauge potential (spin connection) on a compact n-dimension Riemannian manifold has been studied in detail. A general decomposition formula of $SO(n)$ gauge potential in terms of a unit vector field on the sphere bundle has been established. Using same local structure between $SO(2)$ and $U(1)$, $SO(3)$ and $SU(2)$ the general decomposition formula of $U(1)$ and $SU(2)$ gauge potential in terms of the unit vector field has been also given respectively

Key words $SO(n)$ group, spin connection, gauge field

Received 19 May 2000

* Supported by Foundation of Center of Theorefical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Collisions and Foundation of Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences and the Sciences Foundation of the Chinese Education Commisson