第24卷第5期 高能物理与核物理 Vol.24, No.5
2000年5月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS May, 2000

# 量子引力扩展圈表象中微分同胚约束的作用

邵常贵 肖俊华 邵 亮 潘贵军 陈中秋
(湖北大学理论物理所 武汉 430062)

**摘要** 以不同方法将微分同胚约束(D约束)对扩展圈表象抽象波函数的作用特殊化到圈表象上. 以Chern－Simons两点传播子乘积项为量子引力态基本片段,构造出了满足齐次D约束作用的扩展knot不变量引力态$(*\varphi_G)^n$. 对其中$n=1,2$之引力态分别进行了满足齐次D约束的具体证明;对$n>2$之引力态给出了一般证明.

**关键词** 量子引力态 扩展圈表象 微分同胚约束 扩展的knot不变量

基于Ashtekar新变量[1](三维标架$E_i^{ax}$和复$SU(2)$联络$A_{ax}^i$)的量子引力有两种不同的表象:联络表象和圈表象[2,3]. 在前一表象中,量子引力态是Ashtekar联络的泛函. 在后一表象中,态函数是三维空间流形$\Sigma$上的圈泛函. 两者通过圈变换联系起来. 最近,与圈表象紧密相连的扩展的圈表象被引入量子引力中[4,5]. 在此表象中,能够处理约束的正规化和规整化问题,而且在约束方程的计算上有明显的解析优势. 因此,本文将着重在扩展圈表象中研究微分同胚约束(D约束)对波函数的作用. 先求出该约束对扩展圈表象抽象波函数的作用,然后以不同方法将这个作用特殊化到圈表象上求出其结果. 发现所得结果与文献[6]一致. 再通过引入$\Sigma$的微分同胚不变的乘积"$*$"[7,8],以Chern-Simons两点传播子表示的扩展knot不变量$\varphi_G$为基础,构造出了满足齐次D约束的扩展knot不变量引力态$(*\varphi_G)^n$ $(n=1,2,\cdots)$,并通过计算证明了所构造的引力态基本片段$\varphi_G$, $(*\varphi_G)^2$等均满足D约束.

## 1 微分同胚约束对三种表象中波函数的作用

在联络表象中,经典的力学量用算符代替,D约束对波函数的作用为

$$\hat{C}_{ax}\psi(A)=\hat{E}_i^{bx}F_{ba}^i(x)\psi(A), \tag{1}$$

其中 $\hat{C}_{ax}=\dfrac{\delta}{\delta A_{bx}^i}F_{ba}^i(x)$,

$F_{ba}^i(x)$为曲率张量,$F_{ba}^i(x)=A_\nu^i\mathscr{F}_{ab}^\nu(x)$, (2)

1999－03－02 收稿

$\mathscr{F}_{ab}^{\nu}(x)$仅有两个不为零的项:$\mathscr{F}_{ab}^{\nu_1}=\delta_{1,n(\nu)}\mathscr{F}_{ab}^{\nu_1}(x)+\delta_{2,n(\nu)}\mathscr{F}_{ab}^{\nu_1\nu_2}(x)$,且

$$\mathscr{F}_{ab}^{\nu_1}(x)=\mathscr{F}_{ab}^{a_1x_1}=\delta_{ab}^{a_1d}\partial_d\delta(x_1-x),\tag{3}$$

$$\mathscr{F}_{ab}^{\nu_1\nu_2}(x)=\delta_{ab}^{a_1a_2}\delta(x_1-x)\delta(x_2-x).\tag{4}$$

这里希腊指标,如 $\nu_i$ 表示一对指标 $\nu_i=(a_i,x_i)$,拉丁指标,如 $a_i=(1,2,3)$,$x_i\in\Sigma$,$\nu$ 表示一套指标 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$. (1)式说明 Ashtekar 量子引力联络表象理论在 $\Sigma$ 上具有微分同胚(diff$\Sigma$)不变性.

在圈表象中,微分同胚约束是通过考虑态空间中,微分同胚群的线性表示来定义的.由于圈表象和联络表象是通过圈变换

$$\psi(\gamma)=\int\mathrm{d}_\mu[A]W_A(\gamma)\psi(A)\tag{5}$$

联系的,所以圈表象中,D 约束对波函数的作用表示式为

$$C_{ax}\psi(\gamma)=\int\mathrm{d}_\mu[A]W_A(\gamma)\hat{C}_{ax}\psi(A),$$

其中 $W_A(\gamma)=\mathrm{Tr}[H_A(\gamma)]$为 Wilson 圈泛函,而 holonomy$H_A(\gamma)$为

$$\begin{aligned}H_A(\gamma)&=P\exp\left[\oint_\gamma\mathrm{d}y^aA_a(y)\right]=1+\\&\sum_{n=1}^{\infty}\int\mathrm{d}x_1^3\cdots\mathrm{d}x_n^3A_{a_1}(x_1)\cdots A_{a_n}(x_n)X^{a_1\cdots a_n}(x_1,\cdots,x_n;\gamma)=\\&\sum_{n=0}^{\infty}A_{\mu_1\cdots\mu_n}X^{\mu_1\cdots\mu_n}(\gamma)\equiv A_\mu X^\mu(\gamma).\end{aligned}\tag{6}$$

这里引入了广义的 Einstein 求和约定: $A_\mu B^\mu=\sum_{n=0}^{\infty}A_{\mu_1\cdots\mu_n}B^{\mu_1\cdots\mu_n}$ 且 $A_{\mu_i}B^{\mu_i}=\sum_{a_i=1}^{3}\int\mathrm{d}^3x_iA_{a_ix_i}B^{a_ix_i}$;$X^\mu(\gamma)=X^{\mu_1\cdots\mu_n}(\gamma)\equiv X^{a_1\cdots a_n}(x_1,\cdots,x_n;\gamma)=\oint_\gamma\mathrm{d}y_1^{a_1}\cdots\oint_\gamma\mathrm{d}y_n^{a_n}\delta(x_n-y_n)\cdots\delta(x_1-y_1)\Theta_\gamma(0,y_1,\cdots,y_n)$是多重切场;$\Theta_\gamma$ 函数表示圈$\gamma$上的各点自起始点 $O$ 开始沿周线的排序,与(6)式中的 $P$(表示沿 $\gamma$ 积分的顺序)对应. 一个无限维多重切场的集合将同 $\gamma$ 本身一一对应:$\gamma\leftrightarrow X(\gamma)$.

在扩展的圈表象中,圈表象中的多重切场将一般化为一般场:

$X(\gamma)\to X$ 或 $X^\mu(\gamma)\to X^\mu$;$X:=\delta_\nu X^\nu$ 或$[X]^\mu=X^\mu=\delta_\nu^\mu X^\nu$.

$X^\mu$ 满足微分约束

$$\partial_{\mu_i}X^{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_n}=[\delta(x_i-x_{i-1})-\delta(x_i-x_{i+1})]X^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_n},$$

协变多重矢量 $\delta_\nu$ 可以做为扩展圈空间矢量的正则基;$\delta_\nu^\mu$ 是一个对角矩阵,

$$\delta_\nu^\mu=\begin{cases}\delta_{\nu_1}^{\mu_1}\cdots\delta_{\nu_n}^{\mu_n} & n(\mu)=n(\nu)=n\geqslant1\\1 & n(\mu)=n(\nu)=0\\0 & \mu,\nu\text{ 的个数不等}\end{cases}$$

且　$(\delta_\nu\times\delta_\beta)^\rho=\delta_{\nu\beta}^\rho$.

$X_1$ 和 $X_2$ 的乘法合成为

$$(X_1 \times X_2)^{\mu_1\cdots\mu_n} = \sum_{k=0}^{n} X_1^{a_1x_1\cdots a_kx_k} X_2^{a_{k+1}x_{k+1}\cdots a_nx_n}.$$

扩展圈表象中的波函数将写为

$$\psi(X) = D_\mu X^\mu \text{ 或 } \psi(R) = \psi_\mu R^\mu, \tag{9}$$

这里 $$R^\mu := \frac{1}{2}[X^\mu + (-1)^n X^{\mu^{-1}}], \mu^{-1} = (\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1), \tag{10}$$

传播子 $D_\mu$, $\psi_\mu$ 满足扩展的 Mandelstam 恒等式. 由式(5), (7), (9)可知扩展的圈变换为

$$\psi(X) = \int \mathrm{d}_\mu[A] W_A(X)\psi(A) \text{ 或 } \psi(R) = \int \mathrm{d}_\mu[A] W_A(R)\psi(A). \tag{11}$$

于是微分同胚约束对波函数的作用可以表示为

$$C_{ax}\psi(R) = \int \mathrm{d}_\mu[A] W_A(R)\hat{C}_{ax}\psi(A). \tag{12}$$

## 2 D约束对扩展圈表象抽象波函数的作用

(2) 式代入(12)式得

$$C_{ax}\psi(R) = \int \mathrm{d}_\mu[A] W_A(R)\left[\frac{\delta}{\delta A^i_{bx}} F^i_{ba}(x)\psi(A)\right],$$

通过分部积分(略去负号),得到

$$C_{ax}\psi(R) = \int \mathrm{d}_\mu[A]\psi(A)\left[F^i_{ba}(x)\frac{\delta}{\delta A^i_{bx}} W_A(R)\right],$$

而 $$F^i_{ba}(x)\frac{\delta}{\delta A^i_{bx}} W_A(R) = F^i_{ab}(x)\frac{\delta}{\delta A^i_{bx}}\mathrm{Tr}[A_\alpha]R^\alpha = F^i_{ab}(x)\mathrm{Tr}[A_\mu\tau^i A_\nu]\delta^{\nu bx\nu}_\alpha R^\alpha =$$

$$F^i_{ab}(x)\mathrm{Tr}[\tau^i A_\beta]\delta^\beta_{\nu\mu}\delta^{\nu bx\nu}_\alpha R^\alpha = \mathrm{Tr}[A_\rho]\delta^\rho_{\nu\beta}\mathscr{F}^\nu_{ab}(x)R^{(bx\beta)_c}. \tag{14}$$

(14)式代入(13)式得

$$C_{ax}\psi(R) = \int \mathrm{d}_\mu[A]\psi(A)\mathrm{Tr}[A_\rho]\delta^\rho_{\nu\beta}\mathscr{F}^\nu_{ab}(x)R^{(bx\beta)_c} =$$

$$\int \mathrm{d}_\mu[A]\psi(A)\mathrm{Tr}[A_\rho][\mathscr{F}_{ab}(x) \times R^{(bx)}]^\rho$$

其中第二步利用了(8)式. 由(11)式可得

$$C_{ax}\psi(R) = \psi(\mathscr{F}_{ab}(x) \times R^{(bx)}),$$

其中 $$R^{(bx)\mu} := R^{(bx\mu)_c} = \sum_{k=0}^{n} R^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n bx\mu_1\cdots\mu_k}.$$

将(10)式代入(16)式得

$$R^{(bx)\mu} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}[X^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n bx\mu_1\cdots\mu_k} + (-1)^{n+1}X^{\mu_k\cdots\mu_1 bx\mu_n\cdots\mu_{k+1}}] =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}[X^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n bx\mu_1\cdots\mu_k} - (-1)^n X^{\mu_k\cdots\mu_1 bx\mu_n\cdots\mu_{k+1}}]. \tag{17}$$

(15)式表明,微分同胚约束对扩展圈表象抽象波函数的作用等于波函数宗量的一个变换,这是扩展圈表象的一个十分积极的结果.

## 3　D 约束对扩展圈表象波函数的作用特殊化到圈表象

扩展圈表象是与圈表象紧密相连的,在扩展圈表象中获得的结果均可以特殊化到普通的圈表象中. 上一节所得到的 D 约束对扩展圈表象的波函数的作用(15)式特殊化到普通的圈表象应为

$$C_{ax}\psi(R(\gamma)) = \psi(\mathscr{F}_{ab}(x) \times R^{(bx)}(\gamma)), \tag{18}$$

下面计算出这一结果. 用圈变换(5)式代入(18)式,得

$$C_{ax}\psi(R(\gamma)) = \int d_{\mu}[A]\psi(A)\mathrm{Tr}[A_{a\mu}](\mathscr{F}_{ab}^{a}(x) \times R^{(bx)}(\gamma)), \tag{19}$$

这里,考虑当 $\gamma$ 为多重圈时 $R^{(bx)\mu}(\gamma)$ 的表示式. 假设圈 $\gamma$ 在 $x$ 点自交 $P$ 次,则 $\gamma$ 可表示为

$$\gamma_{xx} = \gamma_{xx}^{(1)} \circ \gamma_{xx}^{(2)} \circ \cdots \circ \gamma_{xx}^{(p)},$$

其中"∘"表示圈合成,下标双 $x$ 表示从 $x$ 出发回到 $x$. 把基点在 $x$ 的多个圈的合成记为

$$[\gamma_{xx}]_{i}^{i+j} = \gamma_{xx}^{(i)} \circ \cdots \circ \gamma_{xx}^{(i+j)}.$$

如果圈 $\gamma_{xx}^{(1)}$ 包含了圈的起始点 $O$,则圈 $\gamma_O$ 可表示为

$$\gamma_O = \gamma_O^{(1)x} \circ [\gamma_{xx}]_2^p \circ \gamma_x^{(1)O},$$

$\gamma_x^{(1)O}$ 表示圈 $\gamma^{(1)}$ 中从 $O$ 点到 $x$ 点的部分. 而且圈 $\gamma_O$ 完全可以用多重切场 $X^{\mu}(\gamma_O)$ 描述. $X^{\mu}(\gamma)$ 有如下性质:

$$X(\gamma_1 \circ \gamma_2) = X(\gamma_1) \times X(\gamma_2).$$

与文献[6]不同,本文用如下有固定点的多重切场做此特殊化:

$$X^{\mu_1\cdots\mu_i ax\mu_{i+1}\cdots\mu_n}(\gamma_O) = \sum_{m=1}^{p} X^{\mu_1\cdots\mu_2}(\gamma_O^{(1)x} \circ [\gamma_{xx}]_2^m) T_m^{ax} X^{\mu_{i+1}\cdots\mu_n}([\gamma_{xx}]_{m+1}^p \circ \gamma_x^{(1)O}), \tag{20}$$

式中 $x_i = x$, $m$ 表示多重圈穿过 $x$ 点的某次数, $T_m^{ax}$ 表示过 $x$ 点第 $m$ 次的切矢量. 由(17)式和(20)式可得 $(R^{bx})^{\mu}(\gamma_O)$ 的表示式为

$$\begin{aligned}
(R^{bx})^{\mu}(\gamma_O) = {} & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}[X^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n bx\mu_1\cdots\mu_k}(\gamma_O) - (-1)^n X^{\mu_k\cdots\mu_1 bx\mu_n\cdots\mu_{k+1}}(\gamma_O)] = \\
& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}[\sum_{m=1}^{p} X^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}(\gamma_O^{(1)x} \circ [\gamma_{xx}]_2^m) T_m^{bx} X^{\mu_1\cdots\mu_k}([\gamma_{xx}]_{m+1}^p) \circ \gamma_x^{(1)O}] - \\
& (-1)^n \sum_{m=1}^{p} X^{\mu_k\cdots\mu_1}(\gamma_O^{(1)x} \circ [\gamma_{xx}]_2^m) T_m^{bx} X^{\mu_n\cdots\mu_{k+1}}([\gamma_{xx}]_{m+1}^p \circ \gamma_x^{(1)O}) = \\
& \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=0}^{n} T_m^{bx}[X^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}(\gamma_O^{(1)x} \circ [\gamma_{xx}]_2^m) X^{\mu_1\cdots\mu_k}([\gamma_{xx}]_{m+1}^p \circ \gamma_x^{(1)O}) - \\
& (-1)^n X^{\mu_k\cdots\mu_1}(\gamma_O^{(1)x} \circ [\gamma_{xx}]_2^m) X^{\mu_n\cdots\mu_{k+1}}([\gamma_{xx}]_{m+1}^p \qquad = \\
& \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p} T_m^{bx}[X^{\mu}([\gamma_{xx}]_1^m \circ [\gamma_{xx}]_{m+1}^p) - (-1)^n X^{\mu^{-1}}([\gamma_{xx}]_1^m [\gamma_{xx}]_{m+1}^p)].
\end{aligned} \tag{21}$$

由(19)式和(21)式得

$$C_{ax}\psi(R(\gamma_O)) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}_\mu[A]\psi(A)\mathrm{Tr}[A_{a\mu}]\mathscr{F}^a_{ab}(x)\sum_{m=1}^{p} T^{bx}_m[X^\mu([\gamma_{xx}]^m_1 \circ [\gamma_{xx}]^p_{m+1}) -$$

$$(-1)^n X^{\mu^{-1}}([\gamma_{xx}]^m_1 \circ [\gamma_{xx}]^p_{m+1})] =$$

$$\frac{1}{2}T^{bx}_m\int \mathrm{d}_\mu[A]\psi(A)\mathrm{Tr}[A_a\mathscr{F}^a_{ab}(x)A_\mu(X^\mu(\gamma_{xx}) - (-1)^n X^{\mu^{-1}}(\gamma_{xx}))]$$

$$\sum_{m=1}^{p} T^{bx}_m\int \mathrm{d}_\mu[A]\psi(A)\mathrm{Tr}[F_{ab}(x)A_\mu P^\mu(\gamma_{xx})] =$$

$$\sum_{m=1}^{p} T^{bx}_m\int \mathrm{d}_\mu[A]\psi(A)\mathrm{Tr}[F_{ab}(x)H_A(P(\gamma_{xx}))],$$

其中第三步利用了定义 $P^\mu = \frac{1}{2}(X^\mu - (-1)^n X^\mu)$.

又 $$\mathrm{Tr}[F_{ab}(x)H_A(P(\gamma_{xx}))] = \Delta_{ab}(x)\mathrm{Tr}[H_A(P(\gamma_{xx}))],$$

这里 $\Delta_{ab}(x)$为圈导数,(23)式代入(22)式得

$$C_{ax}\psi(R(\gamma_O)) = \sum_{m=1}^{p} T^{bx}_m\int \mathrm{d}_\mu[A]\psi(A)\Delta_{ab}(x)\mathrm{Tr}[H_A(P(\gamma_{xx}))].$$

利用(5)式,有

$$C_{ax}\psi(\gamma) \quad \sum_{m=1}^{p} T^{bx}_m\Delta_{ab}(x)\psi([\gamma_{xx}]^m_i \circ [\gamma_{xx}]^p_{m+1}) = \sum_{m=1}^{p} T^{bx}_m\Delta_{ab}(x)\psi(\gamma).$$

而文献[6]中给出的结果为

$$C_{ax}\psi(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}z^b\delta(x - z)\Delta_{ab}(\gamma^z)\psi(\gamma),$$

$\int_\gamma \mathrm{d}z^b\delta(x - z)$ 是圈 $\gamma$ 上 $\delta$ 函数的积分，给出切矢量 $T^{bx}_m$，所以，(24) 和(25) 式是一致的.

## 4 扩展 knot 不变量引力态基本片段

knot 不变量是量子引力态的理想候选者[7,8]，它满足齐次 D 约束作用. 在扩展的圈表象中，此关系可以表示为

$$C_{ax}\psi(X) = 0. \tag{26}$$

基于 Ashetekar 新变量的量子引力的联络表象中,存在一个态,它是所有约束方程的解. 它就是依据 Ashtekar 联络构造的 Chern - Simons 形式的展开式

$$\psi^{cs}_\Lambda(A) = \exp\left(-\frac{12}{\Lambda}\int \eta^{abc}\mathrm{Tr}\left[A_a\partial_b A_c + \frac{2}{3}A_a A_b A_c\right]\right),$$

其中 $\Lambda$ 为宇宙常数. 通过圈变换(5)式,这个态与 Wilson 圈的期望值相联系:

$$\psi_\Lambda[\gamma] = \frac{1}{2}\langle W(\gamma)\rangle = \exp\left(a_1[\gamma]\frac{\Lambda}{6}\right)\left[1 - \left(\frac{\Lambda}{6}\right)^2\frac{2}{3}\rho(\gamma) - \left(\frac{\Lambda}{6}\right)^3 3\tau(\gamma) + 0(\Lambda^4)\right],$$

其中 $$a_1[\gamma] = -\frac{3}{4}\varphi_G[\gamma],$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_G[\gamma] &= g_{\mu_1\mu_2} X^{\mu_1\mu_2}(\gamma),\\
\rho[\gamma] &= h_{\mu_1\mu_2\mu_3} X^{\mu_1\mu_2\mu_3}(\gamma) + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} X^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\gamma),\\
\tau[\gamma] &= (h_{\mu_1\mu_2\alpha} g^{\alpha\beta} h_{\mu_3\mu_4\beta} - h_{\mu_1\mu_4\alpha} g^{\alpha\beta} h_{\mu_2\mu_3\beta}) X^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\gamma) +\\
&\quad g_{(\mu_1\mu_3} h_{\mu_2\mu_4\mu_5)_c} X^{\mu_1\cdots\mu_5}(\gamma) + \Big[2 g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3\mu_6} +\\
&\quad \frac{1}{2} g_{(\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_4\mu_6)_c}\Big] X^{\mu_1\cdots\mu_6}(\gamma).
\end{aligned}
$$

$g_{\mu_1\mu_2}$, $h_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ 为 Chern - Simons 理论中的两点、三点传播子. 分别定义如下:

$$
g_{\mu_1\mu_2} = -\epsilon_{a_1a_2c}\partial^c\nabla^{-2}\delta(x_1 - x_2) = \epsilon_{a_1a_2c}\phi^{cx_1}_{x_2}, \tag{27}
$$

式中,$\phi$ 为描述函数,场的发散集中在函数 $\phi$ 上,且 $\phi^{cx_1}_{x_2} = -\partial^c\nabla^{-2}\delta(x_1 - x_2)$,$g_{\mu_1\mu_2}$ 关于下标 $\mu_1,\mu_2$ 是对称的. $g_{\mu_1\mu_2}$ 的逆变张量为

$$
g^{\mu_1\mu_2} = \epsilon^{a_1a_2k}\partial_k\delta(x_1 - x_2). \tag{28}
$$

而

$$
h_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \epsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} g_{\mu_1\alpha_1} g_{\mu_2\alpha_2} g_{\mu_3\alpha_3},
$$

这里

$$
\epsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \epsilon^{c_1c_2c_3}\int d^3t\,\delta(z_1 - t)\delta(z_2 - t)\delta(z_3 - t).
$$

由(3)、(27)、(28)式可得

$$
\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}(x) g_{\mu_1\mu_2} = -\epsilon_{abc} g^{cx\mu_1} g_{\mu_1\mu_2} = -\epsilon_{abc}\delta^{cx}_{\mathrm{T}\mu_2}, \tag{29}
$$

$\delta_{\mathrm{T}}$ 为横向投影算符,定义为

$$
\delta^{ax}_{\mathrm{T}by} = g^{axz} g_{zby} = \delta^{ax}_{by} - \phi^{ax}_{b,y}. \tag{30}
$$

由(4)和(28)式得

$$
\mathscr{F}^{\mu_1\mu_2}_{ab}(x) g_{\mu_1\mu_2} = 0,\quad \mathscr{F}^{\mu_1\mu_2}_{ab} g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} = g_{\mu_3[ax} g_{bx]\mu_4}. \tag{31}
$$

$\varphi_G(\gamma)$,$\rho(\gamma)$,$\tau(\gamma)$ 均为 knot 不变量,当多重切场一般化 $X^{\mu}(\gamma) \to X$ 时,它们就变为扩展的 knot 不变量 $\varphi_G$,$J_2$,$J_3$. 从而 knot 不变量引力态的基本片段可以选择为 Chern-Simons 两点传播子乘积项构成,下面即为以两点传播子乘积项为扩展 knot 不变量引力态的基本片段构造的满足(26)式的扩展 knot 不变量.

其中最简单的扩展 knot 不变量为

$$
\varphi_G = g_{\mu_1\mu_2} X^{\mu_1\mu_2}.
$$

定义 diff$\Sigma$ 不变的乘积"$*$"为

$$
\begin{aligned}
(*\varphi_G)^2 :&= g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} X^{\underline{\mu_1\mu_2}\mu_3\mu_4} =\\
&g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4}(X^{\mu_1\mu_3\mu_4\mu_2} + X^{\mu_3\mu_1\mu_4\mu_2} + X^{\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2} + X^{\mu_1\mu_3\mu_2\mu_4} +\\
&X^{\mu_3\mu_1\mu_2\mu_4} + X^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}) =\\
&2!\,(g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3}) X^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}.
\end{aligned}
$$

这里应用了多重切场的代数约束

$$
X^{\underline{\mu_1\cdots\mu_k}\mu_{k+1}\cdots\mu_n} \equiv \sum_{P_k} X^{P_k(\mu_1\cdots\mu_n)} = X^{\mu_1\cdots\mu_k} X^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n},
$$

求和表示保持$(\mu_1\cdots\mu_k)$和$(\mu_{k+1}\cdots\mu_n)$的顺序不变的所有$\mu$指标的置换.

引入下列记号:

$$D_{\mu_1\mu_2}=g_{\mu_1\mu_2},D_{\mu_1\cdots\mu_4}=g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4}+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3},$$

则 $\varphi_G=D_{\mu_1\mu_2}X^{\mu_1\mu_2}$,从而$(*\varphi_G)^2=2!\ D_{\mu_1\cdots\mu_4}X^{\mu_1\cdots\mu_4}$.

继续使用微分同胚不变的乘积“*”,可以得到一系列线性不变量

$$(*\varphi_G)^3=3!D_{\mu_1\cdots\mu_6}X^{\mu_1\cdots\mu_6},$$

$$(*\varphi_G)^4=4!D_{\mu_1\cdots\mu_8}X^{\mu_1\cdots\mu_8},$$

$$\vdots$$

$$(*\varphi_G)^n=n!D_{\mu_1\cdots\mu_{2n}}X^{\mu_1\cdots\mu_{2n}}=n!D_{\mu_1\mu_2}(D_{\mu_3\cdots\mu_{2n}})X^{\underline{\mu_1\mu_2}\mu_3\cdots\mu_{2n}}$$

($D_{\mu_3\cdots\mu_{2n}}$ 为 $D_{\mu_1\cdots\mu_{2n-2}}$ 各项所有$\mu$指标的下标加2).

上述各式中引入的符号的具体表达式经计算为:

$$D_{\mu_1\cdots\mu_6}=D^1_{\mu_1\cdots\mu_6}+D^2_{\mu_1\cdots\mu_6}+D^3_{\mu_1\cdots\mu_6}+D^4_{\mu_1\cdots\mu_6}+D^5_{\mu_1\cdots\mu_6},$$

$$D^1_{\mu_1\cdots\mu_6}=g_{\mu_1\mu_2}(g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_6}+g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_6}),$$

$$D^2_{\mu_1\cdots\mu_6}=g_{\mu_1\mu_3}(g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_5\mu_6}),$$

$$D^3_{\mu_1\cdots\mu_6}=g_{\mu_1\mu_4}(g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_3\mu_5}+g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_5\mu_6}+g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_3\mu_6}),$$

$$D^4_{\mu_1\cdots\mu_6}=g_{\mu_1\mu_5}(g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_3\mu_6}+g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_3\mu_4}),$$

$$D^5_{\mu_1\cdots\mu_6}=g_{\mu_1\mu_6}(g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_3\mu_5}+g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_3\mu_4}),$$

$$D_{\mu_1\cdots\mu_8}=D^1_{\mu_1\cdots\mu_8}+D^2_{\mu_1\cdots\mu_8}+D^3_{\mu_1\cdots\mu_8}+D^4_{\mu_1\cdots\mu_8}+D^5_{\mu_1\cdots\mu_8}+D^6_{\mu_1\cdots\mu_8}+D^7_{\mu_1\cdots\mu_8},$$

$$\begin{aligned}D^1_{\mu_1\cdots\mu_8}=&g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}(g_{\mu_5\mu_6}g_{\mu_7\mu_8}+g_{\mu_5\mu_8}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_5\mu_7}g_{\mu_6\mu_8})+\\&g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_5}(g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_7\mu_8}+g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_6\mu_8})+\\&g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_6}(g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_7\mu_8})+\\&g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_7}(g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_5\mu_6}g_{\mu_4\mu_8}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_5\mu_8})+\\&g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_8}(g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_5\mu_6}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^2_{\mu_1\cdots\mu_8}=&g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4}(g_{\mu_5\mu_6}g_{\mu_7\mu_8}+g_{\mu_5\mu_7}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_5\mu_8}g_{\mu_6\mu_7})+\\&g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_5}(g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_7\mu_8}+g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_6\mu_7})+\\&g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_6}(g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_7\mu_8}+g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_5\mu_7})+\\&g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_7}(g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_5\mu_6})+\\&g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_8}(g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_5\mu_6}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^3_{\mu_1\cdots\mu_8}=&g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3}(g_{\mu_5\mu_6}g_{\mu_7\mu_8}+g_{\mu_5\mu_7}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_5\mu_8}g_{\mu_7\mu_6})+\\&g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_5}(g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_7\mu_8})+\\&g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_6}(g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_7\mu_8}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_5\mu_7})+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_7}(g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_5\mu_6})+\\
&g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_8}(g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_5\mu_6}),\\
D^4_{\mu_1\cdots\mu_8}=&g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_2\mu_3}(g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_7\mu_8})+\\
&g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_2\mu_4}(g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_7\mu_8})+\\
&g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_2\mu_6}(g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_4\mu_8}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_4\mu_7}+g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_7\mu_8})+\\
&g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_2\mu_7}(g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_4\mu_8})+\\
&g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_2\mu_8}(g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_4\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_6\mu_7}),\\
D^5_{\mu_1\cdots\mu_8}=&g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_2\mu_3}(g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_7\mu_8}+g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_5\mu_7})+\\
&g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_2\mu_4}(g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_7\mu_8})+\\
&g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_2\mu_5}(g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_3\mu_7}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_4\mu_7}+g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_7\mu_8})+\\
&g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_2\mu_7}(g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_8}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_4\mu_5})+\\
&g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_2\mu_8}(g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_4\mu_5}),\\
D^6_{\mu_1\cdots\mu_8}=&g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_2\mu_3}(g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_5\mu_6})+\\
&g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_2\mu_4}(g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_5\mu_8}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_6\mu_8}+g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_5\mu_6})+\\
&g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_2\mu_5}(g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_4\mu_8}g_{\mu_3\mu_6}+g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_6\mu_8})+\\
&g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_2\mu_6}(g_{\mu_3\mu_8}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_8}+g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_8})+\\
&g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_2\mu_8}(g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_6}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_4\mu_5}),\\
D^7_{\mu_1\cdots\mu_8}=&g_{\mu_1\mu_8}g_{\mu_2\mu_3}(g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_5\mu_6})+\\
&g_{\mu_1\mu_8}g_{\mu_2\mu_4}(g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_5\mu_6})+\\
&g_{\mu_1\mu_8}g_{\mu_2\mu_5}(g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_4\mu_7})+\\
&g_{\mu_1\mu_8}g_{\mu_2\mu_6}(g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_4\mu_5})+\\
&g_{\mu_1\mu_8}g_{\mu_2\mu_7}(g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_6}),
\end{aligned}$$

## 5　扩展的 knot 不变量引力态基本片段满足 D 约束的证明

下面利用(29),(30),(31)式求得 D 约束对构成扩展的 knot 不变量 $\varphi_G$,$(*\varphi_G)^2$ 基本片段的齐次作用.

对于 $\varphi_G$,有

$$C_{ax}\varphi_G=\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}(x)D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_2)_c}+\mathscr{F}^{\mu_1\mu_2}_{ab}(x)D_{\mu_1\mu_2}X^{bx},$$

式中
$$\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}(x)D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_2)_c}=-\varepsilon_{abc}X^{(bxcx)_c}-\varepsilon_{abc}(\phi^{cx}_{x_0}-\phi^{cx}_{x_0})X^{bx}=0,\tag{32}$$

此处
$$\varepsilon_{abc}X^{(bxcx)_c}=\varepsilon_{abc}X^{(cxbx)_c}=-\varepsilon_{abc}X^{(cxbx)_c}=-\varepsilon_{abc}X^{(bxcx)_c}=0,$$

并且由(31)式得

$$\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1\mu_2}(x)D_{\mu_1\mu_2}X^{bx}=0, \tag{33}$$

从而由(32)、(33)式知 $C_{ax}\varphi_G=0$.

对于$(*\varphi_G)^2$,有

$$C_{ax}(*\varphi_G)^2=\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1}(x)D_{\mu_1\cdots\mu_4}X^{(bx\mu_2\cdots\mu_4)_c}+\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1\mu_2}(x)D_{\mu_1\cdots\mu_4}X^{(bx\mu_3\mu_4)_c},$$

式中

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1}(x)D_{\mu_1\cdots\mu_4}X^{(bx\mu_2\cdots\mu_4)_c}=&-\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(bxcx\mu_1\mu_2)_c}-\varepsilon_{abc}(\phi^{cx}_{x_0}-\phi^{cx}_{x_1})D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_1\mu_2)_c}-\\&\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_1cx\mu_2)_c}-\varepsilon_{abc}(\phi^{cx}_{x_1}-\phi^{cx}_{x_2})D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_1\mu_2)_c}-\\&\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_1\mu_2cx)_c}-\varepsilon_{abc}(\phi^{cx}_{x_2}-\phi^{cx}_{x_0})D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_1\mu_2)_c}=0,\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $D_{\mu_1\mu_2}$ 当 $\mu_1\rightarrow\mu_2,\mu_2\rightarrow\mu_1$ 时值不变,而

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(bxcx\mu_1\mu_2)_c}=-\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_1\mu_2cx)_c},\\&\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_1cx\mu_2)_c}=\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(cx\mu_2bx\mu_1)_c}=\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(cx\mu_1bx\mu_2)_c}=\\&\qquad-\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\mu_2}X^{(bx\mu_1cx\mu_2)_c}=0,\end{aligned}$$

且 $$\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1\mu_2}(x)D_{\mu_1\cdots\mu_4}X^{(bx\mu_3\mu_4)_c}=g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_2}X^{(bx\mu_1\mu_2)_c}+g_{\mu_2[ax}g_{bx]\mu_1}X^{(bx\mu_1\mu_2)_c}=0. \tag{35}$$

从而由(34),(35)式知 $C_{ax}(*\varphi_G)^2=0$.

D约束对于一般的扩展knot不变量$(*\varphi_G)^n$的齐次作用的一般证明如下:
D约束对$(*\varphi_G)^n$的作用可以表示为

$$C_{ax}(*\varphi_G)^n=\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1}(x)D_{\mu_1\cdots\mu_{2n}}X^{(bx\mu_2\cdots\mu_{2n})_c}+\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1\mu_2}(x)D_{\mu_1\cdots\mu_{2n}}X^{(bx\mu_3\cdots\mu_{2n})_c}.$$

利用 $D_{\mu_1\cdots\mu_{2n}}$ 当$\mu$指标作适当的置换时的不变性以及$\varepsilon_{abc}$关于指标$abc$的反对称性和$X$中的$\mu$指标的循环对称性可知

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1}(x)D_{\mu_1\cdots\mu_{2n}}X^{(bx\mu_2\cdots\mu_{2n})_c}=&-\varepsilon_{abc}D_{\mu_1\cdots\mu_{2n-2}}X^{(bx\underline{cx}\mu_1\cdots\mu_{2n-2})_c}-\\&\varepsilon_{abc}\sum_{p=0}^{2n-2}(\phi^{cx}_{x_p}-\phi^{cx}_{x_{p+1}})D_{\mu_1\cdots\mu_{2n-2}}X^{(bx\mu_1\cdots\mu_{2n-2})_c}=0,\end{aligned}$$

其中指标 $cx$ 下一横表示保持指标$(\mu_1\cdots\mu_{2n-2})$顺序不动,$cx$ 插入其中的所有排序. $x_0=x_{2n-1}=x$,对于 $\varphi_G$,$D_{\mu_1\cdots\mu_{2n-2}}=D=1$. 利用 $g_{\mu_s[ax}g_{bx]\mu_t}=-g_{\mu_t[ax}g_{bx]\mu_s}$ 的性质,可知

$$\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1\mu_2}(x)D_{\mu_1\cdots\mu_{2n}}X^{(bx\mu_3\cdots\mu_{2n})_c}=0,$$

因此 $C_{ax}(*\varphi_G)^n=0$.

以上用Chern-Simons理论的两点传播子乘积项为基本片段构造了满足(26)式的扩展knot不变量$(*\varphi_G)^n$, $n=1,2,\cdots$. 对其中 $n=1,2$ 的扩展knot不变量满足齐次D约束给予了具体的证明;对于 $n>2$ 的扩展knot不变量给予了一般的证明.

## 参考文献(References)


1 Ashtekar A. Phys. Rev. Lett., 1986, **57**:2244; Phys. Rev., 1987, **D36**:1587

2 Rovelli C, Smolin L. Nucl. Phys., 1990, **B331**:80

3 Markopoulou F, Smolin L. Nucl. Phys., 1997, **B508**:409
4 Di Bartolo C, Gambini R, Griego J. Phys. Rev., 1995, **D51**:502
5 Di Bartolo C, Gambini R, Griego J. et al. Phys. Rev. Lett., 1994, **72**:3638
6 Griego J. Nucl. Phys., 1996, **B467**:332
7 Rovelli C, Smolin L. Phys. Rev. Lett., 1988, **61**:1155
8 Brügmann B, Gambini R, Pullin J. Phys. Rev. Lett., 1992, **68**:431

# Action of the Diffeomorphism Constraint in the Extended Loop Representation of Quantum Gravity

SHAO ChangGui　XIAO JunHua　SHAO Liang　PAN GuiJun　CHEN ZhongQiu
(*Institute of Theoretical Physics of Hubei University*, *Wuhan*, 430062 *China*)

**Abstract** By a different way, we particularized the action of the diffeomorphism constraint (D-constraint) on the abstract wave function in the extended loop representation to the action in the loop representation. Using the two-point propagator of Chern-Simons theory as the basic blocks of quantum gravity states, we constructed the extended knot invariant gravity states $(*\varphi_G)^n$ that which satisfied with the homogeneous D-constraint. For the states of $n=1,2$, we demonstrated a detailed proof, To the states of $n>2$, we gave a general identification.

**Key words** quantum gravity state, extended loop representation, diffeomorphism constraint, extended knot invariant

Received 2 March 1999