

# 1 + 1 维 QCD 中格点哈密顿量的一种改进形式\*

江 俊 勤

(广东教育学院物理系 广州 510303)

李 洁 明

(中山大学物理系 广州 510275)

**摘要** 给出 1+1 维 QCD 中格点哈密顿量的一种简单有效的改进形式,并用它对矢量介子质量谱  $M_V$  在手征极限下的大  $N_C$  行为进行格点研究,数值计算的结果与强耦合分析的结果相一致.

**关键词** 格点 QCD 改进 Wilson 项 矢量介子质量 大  $N_C$  行为

## 1 引言

由于 1+1 维 QCD 与 3+1 维 QCD 非常相似,人们常用它来模拟 3+1 维 QCD 的各种性质(例如:真空结构,强子的散射和衰变).改进格点哈密顿量的目的在于减小它与连续理论哈氏量之间的有限格距误差,其代价是使格点哈氏量变得较复杂.构造一种既能减小有限格距误差又不太复杂的格点哈密顿量是一项有意义的工作.

文献[1—3]采用了如下形式的改进哈密顿量,使有限格距误差由  $O(a)$  减小为  $O(a^2)$ ( $a$  为格距)

$$\begin{aligned} H &= H_g + H_m + H_k + H_r, \\ H_g &= \frac{g^2}{2a} \sum_{x,j} E_j^a(x) E_j^a(x), \\ H_m &= m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x), \\ H_k &= \frac{1}{2a} \sum_{x,k} [b_1 \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x,k) \psi(x+k) + b_2 \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x,2k) \psi(x+2k)], \\ H_r &= \frac{r}{2a} \sum_{x,k} [\bar{\psi}(x) \psi(x) - c_1 \bar{\psi}(x) U(x,k) \psi(x+k) - \end{aligned} \tag{1}$$

1999-01-25 收稿

\* 国家自然科学基金资助项目

$$c_2 \bar{\psi}(x) U(x, 2k) \psi(x + 2k)].$$

式中  $b_1 = 4/3, b_2 = -1/6, c_1 = 4/3, c_2 = -1/3, U(x, 2k) = U(x, k) U(x + k, k), E_j^a(x)$  为规范群生成元,  $U(x, k)$  为规范链变量,  $k = \pm 1, j = 1, \gamma_{-k} = -\gamma_k, \gamma_k$  为 Pauli 矩阵:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = i\gamma_0\gamma_1. \quad (2)$$

$a, r, m$  分别为格距, Wilson 参数, 夸克质量,  $g = ea$  为无量纲的裸耦合常数,  $e$  为带质量量纲的裸耦合常数. 二分量旋量场  $\psi(x)$  表示为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix}.$$

裸真空定义为  $\xi(x)|0\rangle = \eta(x)|0\rangle = E_j^a(x)|0\rangle = 0$ .

(1) 式中动能项  $H_k$  和 Wilson 项  $H_r$  都做了改进, 然而, 仔细分析表明,  $H_k$  在未改进之前的有限格距误差已较小, 为  $O(a^2)$ , 因此仅对  $H_r$  项做改进(而  $H_k$  保持原始未改进时的简单形式)也能使哈密顿量  $H$  的有限格距误差由  $O(a)$  减小为  $O(a^2)$ .

本文第二部分通过对矢量介子质量谱的计算证实了这一理论分析: 只对  $H_r$  做改进已经足够. 第三部分用该形式的改进哈密顿量对矢量介子质量谱  $M_V$  的大  $N_C$  行为进行格点研究( $N_C$  为色量子数), 数值计算的结果与 G. Bhattacharya 的强耦合分析结果相一致.

## 2 矢量介子质量谱的计算

仅对 Wilson 项  $H_r$  做改进时, 格点哈密顿量为

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_x E_j^a(x) E_j^a(x) + m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x, k) \psi(x + k) + \frac{r}{2a} \sum_{x,k} [\bar{\psi}(x) \psi(x) - c_1 \bar{\psi}(x) U(x, k) \psi(x + k) - c_2 \bar{\psi}(x) U(x, 2k) \psi(x + 2k)], \quad (4)$$

式中  $c_1, c_2$  由过渡到连续理论的要求决定

$$c_1 = \frac{4}{3}, \quad c_2 = -\frac{1}{3}.$$

$U(x, k)$  和  $E_j^a(x)$  满足如下对易关系

$$\begin{aligned} [U(x, k), E_j^a(y)] &= \frac{1}{2} \lambda^a U(x, k) \delta_{x,y} \delta_{k,j}, \\ [U^+(x, k), E_j^a(y)] &= -\frac{1}{2} U^+(x, k) \lambda^a \delta_{x,y} \delta_{k,j}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\lambda^a$  为  $SU(3)$  群的 8 个 Gell-Mann 矩阵.

取带夸克的规范场的物理真空态为

$$|\Omega\rangle = e^{i\theta_1 S_1 + i\theta_2 S_2} |0\rangle.$$

式中

$$S_1 = i \sum_{x,k} \psi^\dagger(x) \gamma_k U(x,k) \psi(x+k), \quad (8)$$

$$S_2 = i \sum_{x,k} \psi^\dagger(x) \gamma_k U(x,2k) \psi(x+2k),$$

$\theta_1, \theta_2$  为独立变分参数

真空能量定义为

$$E_\Omega = \langle \Omega | H | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle. \quad (9)$$

由  $E_\Omega$  取极小值的条件

$$\frac{\partial E_\Omega}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial E_\Omega}{\partial \theta_2} = 0, \quad (10)$$

可确定  $\theta_i = \theta_i(1/g^2, r, m), (i=1,2)$ .

取矢量介子波函数<sup>[1]</sup>

$$|V\rangle = \left[ A \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_1 \psi(x) + B \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_1 U(x,k) \psi(x+k) + C \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_1 U(x,2k) \psi(x+2k) \right] | \Omega \rangle. \quad (11)$$

式中  $A, B, C$  为独立变分参数, 可由

$$M_V = \frac{\langle V | H | V \rangle}{\langle V | V \rangle} - \frac{\langle \Omega | H | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \quad (12)$$

取极小值的条件确定, 从而求出  $M_V$  与  $\theta_1, \theta_2, r, 1/g^2$  (取  $m=0$ ) 的关系, 再把  $\theta_i = \theta_i(1/g^2, r), (i=1,2)$  代入就可求出  $M_V/e$  与  $1/g^2$  和  $r$  的关系, 如图 1.

为了便于说明问题, 也将同时对  $H_k$  和  $H_r$  做改进的计算结果画出, 如图 2.

由图 1, 2 可见, 是否对动能项  $H_k$  做改进, 计算结果的差别很小, 也就是说, 只对  $H_r$  做改进已经足够.

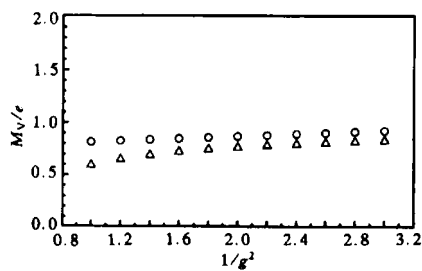


图 1 改进  $H_r$  时,  $M_V/e$  与  $1/g^2$  的关系

$\circ r=1, \quad \triangle r=0.1.$

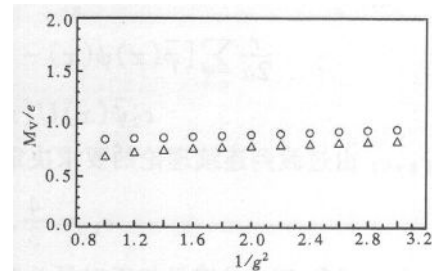


图 2 改进  $H_r$  和  $H_k$  时,  $M_V/e$  与  $1/g^2$  的关系

$\circ r=1, \quad \triangle r=0.1.$

同时, 图 1, 2 也表明无论使用(1)式还是(4)式,  $M_V/e$  与  $r$  的依赖关系仍较大, 相信在物理真空态(7)式中加  $\lambda$  多链项后能减小  $M_V/e$  与  $r$  的依赖关系.

### 3 矢量介子质量的大 $N_C$ 行为的格点研究

1+1 维 QCD 不是严格可解模型. 人们在手征极限 ( $m \rightarrow 0$ ,  $m$  为自由夸克质量) 和大

$N_C$  极限下,对 1+1 维 QCD 的性质进行广泛的研究<sup>[4,5]</sup> G. Bhattacharya 用强耦合分析法得到了矢量介子质量在手征极限下的大  $N_C$  行为<sup>[4]</sup>

$$M_V = e\sqrt{\frac{N_C + 1}{2\pi}}. \tag{13}$$

(注:文献[4]中用  $M$  和  $g$  表示  $M_V$  和  $e$ ).

由(13)式得

$$M_V/(e\sqrt{N_C + 1}) = 1/\sqrt{2\pi} = 0.40. \tag{14}$$

本文用格点方法研究  $M_V$  在手征极限下的大  $N_C$  行为.

哈密顿量(4)式和对易关系(6)式对于  $SU(N_C)$  ( $N_C > 3$ ) 群仍成立,只是(6)式中的 Gell-Mann 矩阵  $\lambda^a$  变得较为复杂,共有  $N_C^2 - 1$  个矩阵.

取  $1/g^2 = 2, N_C = 3, 4, \dots, 8, r = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ . 由(4), (10)–(12)式可求出  $M_V/(e\sqrt{N_C + 1})$  与  $r$  和  $N_C$  的依赖关系,然后求出  $M_V/(e\sqrt{N_C + 1})$  的平均值及其标准误差与  $N_C$  的关系,如图 3.

由图 3 可见,使用(4)式所示的改进格点哈密顿量时,数值计算得到的  $M_V$  的大  $N_C$  行为与 G. Bhattacharya 的强耦合分析结果相一致.

至此,我们已用改进的格点哈密顿量计算了 1+1 维 QCD 中夸克凝聚、矢量介子质量谱  $M_V$  以及  $M_V$  的大  $N_C$  行为,获得了成功. 我们相信把改进格点哈密顿量的方案推广应用到带夸克的 3+1 维格点 QCD 中去是有前途的.

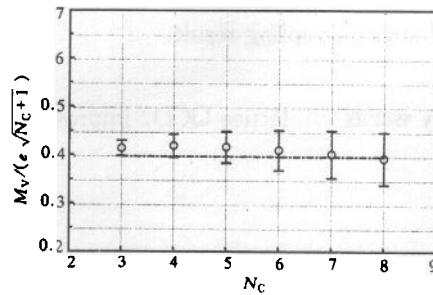


图 3  $M_V/(e\sqrt{N_C + 1})$  与  $N_C$  的关系

○ 本文计算结果,误差来自不同的  $r$  值,  
 - - - 文献[4]的分析结果.

感谢罗向前博士的有益讨论.

参考文献(References)

- 1 JIANG JunQin, LUO XiangQian. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, 23(7):644 (江俊勤,罗向前.高能物理与核物理,1999, 23(7):644)
- 2 LUO XiangQian et al. Phys. Rev., 1994, D50:501
- 3 JIANG JunQin. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, 22:891 (江俊勤.高能物理与核物理,1998, 22:891)
- 4 Bhattacharya G. Nucl. Phys., 1982, B205[F55]:461
- 5 Steinhardt P J. Nucl. Phys., 1980, B176:100

## Improved Scheme of the Lattice Hamiltonian in 1 + 1 Dimensional QCD\*

JIANG JunQin

(*Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China*)

LI JieMing

(*Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China*)

**Abstract** A simple and effective scheme for improving the lattice Hamiltonian in 1 + 1 dimensional QCD is given. The large  $N_C$  behavior of the vector meson mass in the chiral limit is studied by using this improved scheme. This numerical result is consistent with the analytical strong coupling result.

**Key words** lattice QCD, improved Wilson term, vector meson mass, large  $N_C$  behavior

---

Received 25 January 1999

\* Project supported by National Natural Science Foundation of China