

双束流负载效应

王兰法 林郁正 童德春

(清华大学工程物理系 北京 100084)

摘要 分析研究了双束流储存环上的束流负载效应。束团纵向尾场的作用分别为：能量损失、同步频移和耦合束不稳定性，这里只研究前两个方面。以束团连续分布的束团串情形和均匀分布情形为例，给出了同步相移、频移与高次模参数及高频腔分布的关系。研究结果有助于优化高频腔的工作模式（通过调节调谐杆的位置来改变高次模的频率）和环上束团的分布，以减小束流负载效应。当高频腔关于对撞点对称分布时，正负电子的束流负载效应相同，可以用补偿单束流负载效应的方法来补偿正负电子束团的相位。

关键词 束流负载 势阱扰动 储存环 双束流

1 引言

为了提高对撞亮度，不少对撞机采用了多束团对撞的方法。在单环多束团的环形对撞机上，如 LEP（西欧核子中心）、CESR（美国康奈尔大学）等，束流负载效应有新的特点，我们称在一个环上相反方向运动的两个束流激发的束流负载效应为双束流负载效应。双束流机器的束流负载效应不同于单束流^[1,2]，不但与高次模的共振频率、品质因数、阻抗和束团在环上的分布有关，还与高次模的对称性及高频腔在环上的位置有关，而且正负电子的束流负载效应一般不同，这是由高次模的对称性及高频腔的位置决定的。

本文用解析方法，研究了正负电子每个束团的同步相移、频移与束团分布及高频腔和高次模参数之间的关系。连续分布的束团串情形和均匀分布情形下的束流负载效应规律不同。

对于 M 个束团连续分布的束团串情形，通常每个束团的束流负载效应是不同的，但是当高次模的频率 $\omega_r = (k + l/M)h\omega_0$, $l = 1, 2, \dots, M-1$ (h 为高频腔的谐波数, k 为任意整数, ω_0 为回旋角频率) 时，尾场引起的每个束团的纵向相移与频移均为零，这与高次模的对称性及高频腔在环上的位置无关；当高次模的频率 $\omega_r = kh\omega_0$ 时，所有束团的相移与频移都相等，这与高次模的对称性及高频腔在环上的位置无关，如高次模为反对称模，则所有束团的相移与频移都为零。

束团均匀分布时, 每个束团的相移与频移都相等, 如 $\omega_r = p\omega_0 \neq kM\omega_0, k = 0, 1, 2, \dots$ 时, 所有束团的相移与频移都为零, 这与高次模的对称性及高频腔在环上的位置无关。

本文的研究有助于优化高频腔的工作模式和调节环上束团的分布, 以减小双束流运行下的束流负载效应。以下以一个高频腔和一个高次模为例进行研究。

2 一般情形下的双束流负载效应

为简便起见, 以一个高频腔的情形为例, 假设高频腔位于环上 θ 处, 如图 1 所示。当高频腔位于对称轴线的右侧时, θ 为正值, 当高频腔位于对称轴线的左侧时, θ 为负值。 M 个正电子束团与 M 个负电子束团沿环以对撞点 (IP) 为对称点对称分布, 其运动方向如图所示。设第 n 个正电子在环上的位置用 L_n 表示, 为方便推导, 用无量纲量 $P_n = L_n/C$ 表示, C 为环的周长, 用下标 ‘+-’ 表示正负电子的参量。第 n 个正电子束团中的粒子数目为 N_{n+} , 第 n 个负电子束团中的粒子数目为 N_{n-} 。

第 n 个正电子束团的纵向同步振荡方程可写为^[1]:

$$\ddot{\tau}_{n+} + \omega_s^2 \tau_{n+} = -\frac{e\alpha}{E_0 T} V_{n+}, \quad (1)$$

这里, T 为回旋周期, E_0 为粒子能量, $V_{n+} = V_{nC+} + V_{nR+}$,

$$\begin{aligned} V_{nC+} &= e \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M N_{m+} W_{\#C} (S_{mm++} C + \tau_{m+} (t - S_{mm++} T_0) c - \tau_{n+} (t) c), \\ V_{nR+} &= e \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M N_{m-} W_{\#R} (S_{mm--} C + \tau_{m-} (t - S_{mm--} T_0) c - \tau_{n+} (t) c), \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $S_{mm++} = k + P_m - P_n, S_{mm--} = k + P_m - P_n + \frac{\theta}{\pi}$, $W_{\#C}$ 和 $W_{\#R}$ 分别为同向和反向束团激发的尾场。将尾场展开为级数形式可得:

$$\begin{aligned} V_{nC+} &= e \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M [N_{m+} W_{\#C} (S_{mm++} C) + \\ &\quad N_{m+} W'_{\#C} (S_{mm++} C) (\tau_{m+} (t - S_{mm++} T_0) - \tau_{n+} (t)) c], \\ V_{nR+} &= e \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M [N_{m-} W_{\#R} (S_{mm--} C) + \\ &\quad N_{m-} W'_{\#R} (S_{mm--} C) (\tau_{m-} (t - S_{mm--} T_0) - \tau_{n+} (t)) c], \end{aligned} \quad (3)$$

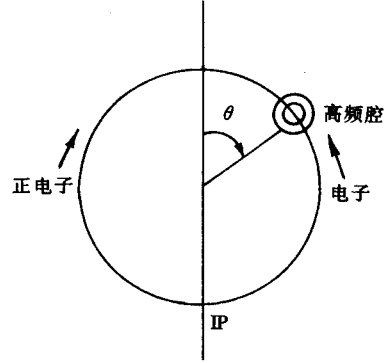


图1 环及腔的位置示意图

上式中的微分指对距离的微分, 括号中第一项的作用是改变束团的同步相位; 第二项中与 τ_{n+} 相关项的作用是改变束团的同步振荡频率; 第二项中与 $\tau_{m\pm}$ 相关的项引起束团之间的耦合, 激发不稳定性, 这里不予考虑.

由于束流负载效应, 第 n 个正电子束团的相位变化和振荡频率变化分别为:

$$\Delta\phi_{n+} = \frac{2e^2\alpha h\omega_0}{E_0 T^2 \omega_s^2} f_{n+}, \quad (4)$$

$$\Delta\omega_{n+}^2 = \frac{2e^2\alpha}{E_0 T^2} g_{n+}, \quad (5)$$

$$f_{n+} = \frac{T}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M [N_{m+} W_{fC}(S_{m++}, C) + N_{m-} W_{fR}(S_{m--}, C)], \quad (6)$$

$$g_{n+} = \frac{Tc}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M [N_{m+} W'_{fC}(S_{m++}, C) + N_{m-} W'_{fR}(S_{m--}, C)], \quad (7)$$

式(6)和(7)中第一项和第二项分别表示相同方向和相反方向束团的影响.

将尾场在频域用阻抗表示^[1]:

$$W_f(t) = \frac{c}{2\pi} \int Z_f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (8)$$

$$W'_f(t) = \frac{ic}{2\pi} \int Z_f(\omega) \omega \exp(i\omega t) d\omega. \quad (9)$$

这样式(6, 7)可写为:

$$f_{n+} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_p N_{m+} Z_{fC}(p\omega_0) \exp(i2\pi p(P_m - P_n)) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_p N_{m-} Z_{fR}(p\omega_0) \exp\left(i2\pi p\left(P_m - P_n + \frac{\theta}{\pi}\right)\right), \quad (10)$$

$$g_{n+} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_p N_{m+} Z_{fC}(p\omega_0) p\omega_0 \exp(i2\pi p(P_m - P_n)) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_p N_{m-} Z_{fR}(p\omega_0) p\omega_0 \exp\left(i2\pi p\left(P_m - P_n + \frac{\theta}{\pi}\right)\right), \quad (11)$$

以上两式中, Z_{fC} 和 Z_{fR} 分别为相同方向和相反方向运动的束团受到的纵向尾场对应的阻抗, 其中 Z_{fC} 就是通常意义上的阻抗(检验电荷和激发电荷沿相同的方向运动). Z_{fR} 通常为复数^[3], 当高频腔沿束团运动方向以腔的中心平面对称时, Z_{fR} 为实数, 并且有 $Z_{fR}/Z_{fC} = \text{sgn}$, 如果高次模场沿束流运动方向以腔的中心前后对称(即对称模), $\text{sgn} = 1$; 如以腔的中心前后反对称(即反对称模), $\text{sgn} = -1$.

同理可得, 第 n 个负电子束团的相位变化和振荡频率变化分别为:

$$f_{n-} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_p N_{m-} Z_{rC}(p\omega_0) \exp(i2\pi p(P_m - P_n)) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_p N_{m+} Z_{rR}(p\omega_0) \exp\left(i2\pi p\left(P_m - P_n - \frac{\theta}{\pi}\right)\right), \quad (12)$$

$$g_{n-} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_p N_{m-} Z_{rC}(p\omega_0) p\omega_0 \exp(i2\pi p(P_m - P_n)) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_p N_{m+} Z_{rR}(p\omega_0) p\omega_0 \exp\left(i2\pi p\left(P_m - P_n - \frac{\theta}{\pi}\right)\right). \quad (13)$$

比较式(10, 11)和(12, 13)可以发现: 正负电子的相移与频移是不同的.

3 连续束情形下的双束流负载效应

考虑环上只有一个束团串的情形, 该束团串由 M 个束团组成, 其中第 n 个束团的位置为 $P_n = (n-1)/h$, 设 M 个束团具有相同的粒子数 N .

设高次模振荡频率 ω_l 在 $p\omega_0$ 附近时, 设 $\omega_l = p\omega_0 + \delta\omega_0$, 由于高频腔高次模的品质因数通常很大, 则式(10—13)中可以只考虑 $\pm p$ 两项, 同时考虑纵向阻抗的实部为偶函数, 虚部为奇函数, 并利用

$$\sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(i2\pi p \frac{m}{h}\right) = \exp\left(i\pi \frac{p}{h} (M-1)\right) a \quad (14)$$

可得:

$$f_{n\pm} \approx \begin{cases} 0 & \text{if } p = \left(k + \frac{l}{M}\right)h, l = 1, 2, \dots, M-1, k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{MNR_s}{1+b^2} (1 + \text{sgn}) & \text{if } p = kh, k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{2aNR_s}{1+b^2} (c + bd) & \text{else,} \end{cases} \quad (15)$$

$$g_{n\pm} \begin{cases} 0 & \text{if } p = \left(k + \frac{l}{M}\right)h, l = 1, 2, \dots, M-1, k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{iMNR_s b}{1+b^2} (1 + \text{sgn}) & \text{if } p = kh, k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{i2aNR_s}{1+b^2} (d - bc) & \text{else,} \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{这里, } a = \frac{\sin\left(\pi \frac{pM}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{p}{h}\right)}, \quad b = \frac{Q\delta\omega_0}{\omega_r}, \quad c = \begin{cases} \cos(\psi_1 \pm 2p\theta) \cos(\pm 2p\theta) \\ -\sin(\psi_1 \pm 2p\theta) \sin(\pm 2p\theta) \end{cases},$$

$$d = \begin{cases} \sin(\psi_1 \pm 2p\theta) \cos(\pm 2p\theta) \\ \cos(\psi_1 \pm 2p\theta) \sin(\pm 2p\theta) \end{cases}, \quad \psi_1 = 2\pi p \frac{M-1}{h} - 4\pi p P_n, \text{ 当模为对称模时, 表达式 } c, d$$

中取上面的项, 为反对称模时, 取下面的项.

当高次模的共振频率为回旋频率的整数倍, 式(15)、(16)变为:

$$f_{n\pm} \approx \begin{cases} 0 & \text{if } p = \left(k + \frac{l}{M}\right)h, l = 1, 2, \dots, M-1, k = 0, 1, 2, \dots \\ MNR_s(1 + \text{sgn}) & \text{if } p = kh, k = 0, 1, 2, \dots \\ aNR_s(\cos\psi_1 + \text{sgn} \cdot \cos\psi_2) & \text{else,} \end{cases} \quad (15a)$$

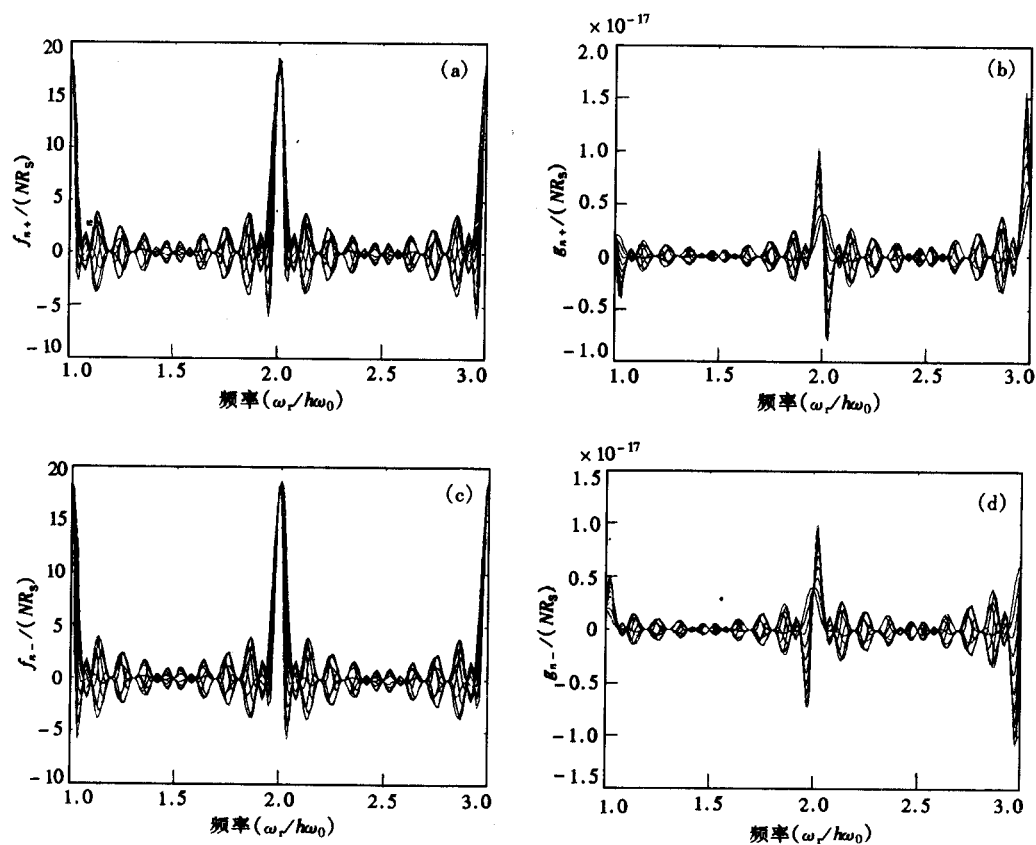


图2 正负电子束团的相移与频移(对称模)

(a),(b)正电子; (c),(d)负电子.

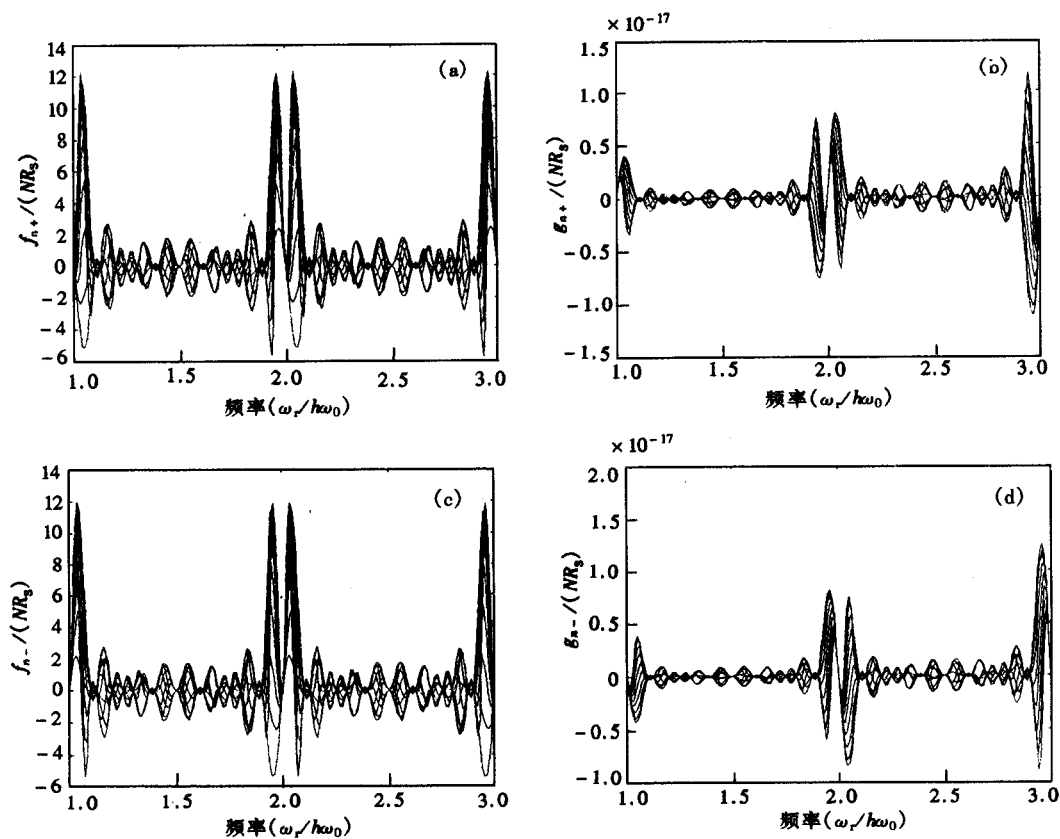


图3 正负电子束团的相移与频移(反对称模)

(a), (b) 正电子; (c), (d) 负电子.

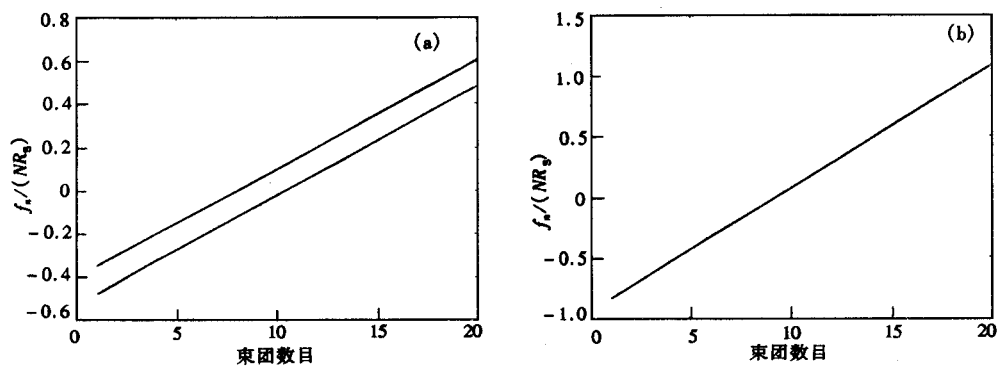


图4 正负电子束团相位改变随束团数目的变化

($\delta = -0.1$, $Q = 10000$, $h = 100$)

(a) 1个腔, $\theta = 0.1$; (b) 2个腔, $\theta = \pm 0.1$.

$$g_{n\pm} \approx \begin{cases} 0 & \text{if } p = \left(k + \frac{l}{M}\right)h, l = 1, 2, \dots, M-1, k = 0, 1, 2, \dots \\ ipN\omega_0 a R_s (\sin\psi_1 + \text{sgn} \cdot \sin\psi_2) & \text{else,} \end{cases} \quad (16a)$$

$$\text{式中, } \psi_2 = 2\pi p \left(\frac{M-1}{k} \pm \frac{2\theta}{\pi} \right) - 4\pi p P_n.$$

由式(15)、(16)、(15a)、(16a)可得到以下结论:

在束团串情形下,当高次模的频率为 $\omega_r = (k + l/M)h\omega_0, l = 1, 2, \dots, M-1$ 时,没有束流负载效应;当共振频率为 $\omega_r = kh\omega_0$ 的反对称模时,相反方向的两个束流的影响恰好抵消,表现为无束流负载效应;当共振频率为 $\omega_r = kh\omega_0$ 的对称模时,两个束流的影响恰好一致,双束流负载效应为单束流的两倍,例如基模;当共振频率在 $kh\omega_0$ 附近时,束流负载效应随高次模品质因数的增大而减小. 反对称模的束流负载效应通常不同于对称模,这与高次模的频率及高频腔的位置有关.

图 2 和图 3 分别给出了对称模和反对称模影响下束团串中各个束团相移与频移随高次模频率的变化规律,两图中 $h = 100, M = 10, \theta = 0.08\pi, Q = 10000, R_s$ 为高次模的阻抗.

束流负载的主要贡献来源于基模. 为了抑制 Robinson 不稳定性,通常将基模的频率稍稍下调(临界能以上),即式(15)、(16)中 $\delta < 0.0$. 由于基模的品质因数很高,由式(15)、(16)可看出: $p = h$ 项对束流负载的贡献就小,而且该项的影响对所有束团是相同的. 这种情形下引起束团之间束流负载差异的主要是 $p = h \pm 1$ 项,对应于该项有 $\psi_1 = \pm 2\pi(M+1-2n)/h, f_n$ 随束团数 n 近似线性变化,如图 4(a)所示,正负电子束团的相位均随束团数目线性变化,而且斜率相同,因此可用谐波腔来校正^[4]. 谐波腔虽然能分别校正正负电子束团相位随束团数目变化,但不能校正正负电子束团之间的相位差异. 上面的分析中只考虑了一个高频腔的影响,但是通常情形高频腔总是关于对撞点对称分布的,例如考虑两个相同的高频腔对称分布于对撞点两侧的情形,则正负电子束团之间就没有差别了,如图 4(b)所示,因此利用谐波腔就可很好地校正束团之间的相位差异.

4 均匀分布情形下的双束流负载效应

当 M 个束团均匀分布于环上时,其中第 n 个束团的位置为 $P_n = (n-1)M/h$,考虑共振频率为 $\omega_r = p\omega_0$ 的高次模的影响,并利用式(14),可得到

$$f_{n\pm} = \begin{cases} 0 & \text{if } p \neq kM, k = 0, 1, 2, \dots \\ MR_s N \left(1 + \text{sgn} \cos \left(4\pi kM \frac{\theta}{\pi} \right) \right) & \text{if } p = kM, k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (17)$$

$$g_{n\pm} = \begin{cases} 0 & \text{if } p \neq kM, k = 0, 1, 2, \dots \\ iMR_s Nk\omega_0 \left(1 + \text{sgn} \sin\left(4\pi kM \frac{\theta}{\pi}\right) \right) & \text{if } p = kM, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (18)$$

由(17)和(18)两式可得到以下结论:

在束团均匀分布情形下, 当高次模的频率 $\omega_r = p\omega_0 \neq kM\omega_0, k = 0, 1, \dots$ 时, 没有束流负载效应; 当高次模的频率为 $\omega_r = kM\omega_0 = \pi(2l+1)\omega_0/(4\theta), l = 0, 1, \dots$ 时, 对称模对束流负载效应的作用为零, 反对称模的束流负载效应为单束流的两倍; 当高次模的频率为 $\omega_r = \pi k\omega_0/(2\theta)$ 时, 对称模的束流负载效应为单束流的两倍, 反对称模对束流负载效应的作用为零.

图 5 给出了反对称模影响下均匀分布情形各个束团相移与频移随高次模频率的变化规律, 图中 $h = 200, M = 10, \theta = 0.08\pi$.

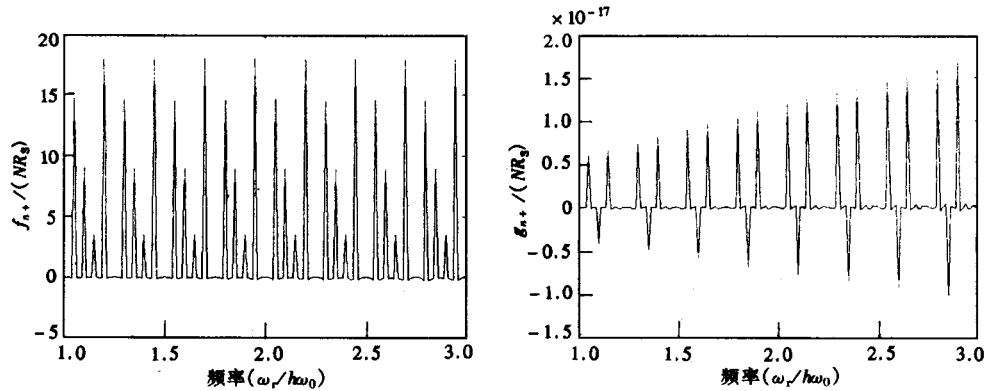


图 5 均匀分布情形正电子束团相移与频移随高次模频率的变化

束团均匀分布时, 虽然分别对于正负电子束, 各束团的束流负载效应是相同的, 但是正负电子束之间存在差异, 且该差异不能用谐波腔来校正. 当高频腔关于对撞点对称分布时(一般满足该条件), 正负电子束之间的差异就没有了.

5 结论

本文用解析的方法, 研究了双束流情形下纵向尾场激发的势阱扰动, 利用该研究可很方便地得到每个正负电子束团的相移、频移, 有助于优化高频腔的工作模式和调节环上束团的分布, 以尽量减小势阱扰动效应. 当高频腔关于对撞点对称分布时, 正负电子的束流负载效应相同, 可以用补偿单束流负载效应的方法来补偿正负电子束团的相位.

参 考 文 献

- 1 Chao Alexander Wu. Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators. Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc. 1992
- 2 Laclare J L. Bunch Beam Coherent Instabilities, CERN 87-03, 1987, 1:264—326
- 3 Wang Lanfa. BEPC Multibunch Collision and Coupled Bunch Instabilities. PH. D. thesis(in Chinese). IHEP. 1997
(王兰法. BEPC 多束团对撞与耦合束不稳定性. 博士论文. 中国科学院高能物理研究所. 1997)
- 4 Kubo K, Higo T, Sakanaka. Compensation of Bunch Position Shift Using Sub-RF Cavity in a Damping Ring. Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference. 1993. 3503

Beam Loading Effects for A Two-Beam Ring

Wang Lanfa Lin Yuzheng Tong Dechun

(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract An analytic treatment of multi-bunch potential well distortion for a two-beam storage ring is presented. The longitudinal wake effects are separated into: the mode loss, the synchrotron tune shift (both due to potential well distortion) and the coherent multi-bunch coupling. Here, only the first two effects are studied. Resulting simple analytic formulas describe the mode loss and the synchrotron tune shift experienced by a given bunch within the two-beam, as a function of the high order mode's parameters. One can get immediately a simple quantitative answer in term of the mode loss and the synchrotron tune shift experienced by each bunch from these formulas, so we can know how to modify the existing configuration of parasitic cavity resonance (via frequency tuning) so that the resulting potential well distortion effects are minimized. When the RF cavities are symmetrically distributed about the interaction points, the two beams will have same beam loading effects, so we can compensate the phase shift of the two beam using the same method as in one beam case.

Key words beam loading, potential distortion, storage ring, two-beam