

# 束流负载与束团相位补偿

王兰法 林郁正

(清华大学工程物理系 北京 100084)

**摘要** 分析研究了电子储存环上的势阱扰动,分析解给出了各束团同步相移、频移随高次模参数变化的规律. 该研究结果可帮助我们优化高频腔的工作模式(通过调节调谐杆的位置来改变高次模的频率)和环上束团的分布,以减小束流负载效应,还可帮助我们利用谐波腔来补偿束团相位的变化.

**关键词** 束流负载 相位补偿 储存环

## 1 引言

许多文章研究了束团均匀分布情形时的势阱扰动<sup>[1,2]</sup>,但在许多加速器上,如同步辐射光源、JLC、CESR等都采用了束团串运行的方式. 本文用解析的方法,研究了一般情形下每个束团的同步相移、频移与束团分布及高次模参数之间的关系,并进一步分析了束团串情形下的束流负载效应. 由于束团分布不均匀,引起束团的相位不相等,可以利用该研究去优化高频腔的工作模式和环上束团的分布,以减小束流负载效应,从而减小束团之间的相位差异,同时还可利用该研究来进一步补偿束团之间的相位,这比模拟方法<sup>[3,4]</sup>更简单、物理意义更清楚.

## 2 一般情形下的势阱扰动

设沿环有  $M$  个束团任意分布,其中第  $n$  个束团在环上的位置用  $L_n$  表示,为方便,用无量纲量  $P_n = L_n/C$  表示,  $C$  为环的周长,第  $n$  个束团中的粒子数目设为  $N_n$ .

第  $n$  个束团的纵向同步振荡方程可写为<sup>[1]</sup>:

$$\ddot{\tau}_n + \omega_s^2 \tau_n = -\frac{e\alpha}{E_0 T} V_n. \quad (1)$$

这里,

$$V_n = e \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M N_m W_{\parallel} (S_{km} C + \tau_m (t - S_{km} T_0) c - \tau_n (t) c), \quad (2)$$

其中,  $S_{mn} = k + P_m - P_n$ ,  $c$  为光速,  $W_{\parallel}$  为束团激发的纵向尾场. 将尾场展开为级数形式可得:

$$V_n = e \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M N_m [W_{\parallel}(S_{mn}C) + W'_{\parallel}(S_{mn}C) (\tau_m(t - S_{mn}T_0) - \tau_n(t))c]. \quad (3)$$

上式中的微分指对距离的微分, 括号中第一项的作用是改变同步相位, 第二项中与  $\tau_n$  相关项的作用是改变同步振荡频率, 第二项中与  $\tau_m$  相关的项引起束团之间的耦合, 激发不稳定性, 这里不考虑此项.

由于束流负载效应, 第  $n$  个束团的相位变化和振荡频率变化分别为:

$$\Delta\phi_n = \frac{e^2 \alpha h \omega_0}{E_0 T^2 \omega_s^2} f_n, \quad (4)$$

$$\Delta\omega_n^2 = i \frac{e^2 \alpha}{E_0 T^2} g_n, \quad (5)$$

$$f_n = T \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M N_m W_{\parallel}(S_{mn}C), \quad (6)$$

$$g_n = Tc \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M N_m W'_{\parallel}(S_{mn}C). \quad (7)$$

将尾场在频域用阻抗表示<sup>[1]</sup>:

$$W_{\parallel}(t) = \frac{c}{2\pi} \int Z_{\parallel}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (8)$$

$$W'_{\parallel}(t) = \frac{ic}{2\pi} \int Z_{\parallel}(\omega) \omega \exp(i\omega t) d\omega. \quad (9)$$

这样式(6,7)可写为:

$$f_n = \sum_{m=1}^M \sum_p N_m Z_{\parallel}(p\omega_0) \exp(i2\pi p(P_m - P_n)), \quad (10)$$

$$g_n = \sum_{m=1}^M \sum_p N_m Z_{\parallel}(p\omega_0) p\omega_0 \exp(i2\pi p(P_m - P_n)). \quad (11)$$

以上两式中,  $p$  为任意整数,  $Z_{\parallel}$  为纵向尾场对应的纵向阻抗.

### 3 束团串均匀分布情形时的束流负载效应

进一步考虑环上有  $N_t$  个束团串均匀分布的情形, 每个束团串由  $M$  个连续分布的束团组成, 束团串之间的间隔为  $N_g$  个束团间隔. 设所有束团具有相同的粒子数  $N$ , 高频腔谐波

数为  $h$ . 由于对称性, 只研究第一串中  $M$  个束团的束流负载效应, 对于第一个束团串中的第  $n$  个束团有

$$f_n = \sum_p \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N_t} NZ_{\parallel}(p\omega_0) \exp(i2\pi p(P_m - P_n)) \exp\left(i2\pi p \frac{(M + N_g)(k-1)}{h}\right), \quad (12)$$

$$g_n = \sum_p \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N_t} NZ_{\parallel}(p\omega_0) p\omega_0 \exp(i2\pi p(P_m - P_n)) \exp\left(i2\pi p \frac{(M + N_g)(k-1)}{h}\right). \quad (13)$$

利用

$$\sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(i2\pi p \frac{m}{h}\right) = \exp\left(i\pi \frac{p}{h} (M-1)\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{pM}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{p}{h}\right)}, \quad (14)$$

可得

$$f_n = \sum_p NZ_{\parallel}(p\omega_0) \exp\left(i\pi p \frac{M+1-2n}{h}\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{pM}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{p}{h}\right)} \exp\left(i\pi p \frac{(M + N_g)(N_t - 1)}{h}\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{p(M + N_g) N_t}{h}\right)}{\sin\left(\pi p \frac{M + N_g}{h}\right)}, \quad (15)$$

$$g_n = \sum_p NZ_{\parallel}(p\omega_0) p\omega_0 \exp\left(i\pi p \frac{M+1-2n}{h}\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{pM}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{p}{h}\right)} \exp\left(i\pi p \frac{(M + N_g)(N_t - 1)}{h}\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{p(M + N_g) N_t}{h}\right)}{\sin\left(\pi p \frac{M + N_g}{h}\right)}. \quad (16)$$

考虑到  $(M + N_g)N_t = h$ , 则式(15)和(16)可化为:

$$f_n = \sum_p NN_t Z_{\parallel}(pN_t\omega_0) \exp\left(i\pi p N_t \frac{M+1-2n}{h}\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{pN_t M}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{pN_t}{h}\right)}, \quad (17)$$

$$g_n = \sum_p NN_t Z_{\parallel}(pN_t\omega_0) pN_t\omega_0 \exp\left(i\pi pN_t \frac{M+1-2n}{h}\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{pN_t M}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{pN_t}{h}\right)}. \quad (18)$$

$$\text{定义: } \delta_p\omega_0 = \omega_r - pN_t\omega_0, \quad f_n = NR_s \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{f}_{np} (2 - \delta_{0p}), \quad g_n = NR_s \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}_{np} (2 - \delta_{0p}),$$

$$\delta_{0p} = \begin{cases} 1 & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}.$$

$$\text{并利用} \quad Z_{\parallel}(\omega) = \frac{R_s}{1 + iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)}. \quad (19)$$

其中  $R_s$ ,  $\omega_r$ ,  $Q$  分别为模的分路阻抗, 共振频率和品质因数.

并对  $f_n$  取实部,  $g_n$  取虚部可得:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{np} \approx N_t \frac{\sin\left(\pi \frac{pN_t M}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{pN_t}{h}\right)} \frac{1}{1 + Y_p^2} \left[ \cos\left(\pi pN_t \frac{M+1-2n}{h}\right) + \right. \\ \left. Y_p \sin\left(\pi pN_t \frac{M+1-2n}{h}\right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{np} \approx N_t pN_t\omega_0 \frac{\sin\left(\pi \frac{pN_t M}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{pN_t}{h}\right)} \frac{1}{1 + Y_p^2} \left[ \cos\left(\pi pN_t \frac{M+1-2n}{h}\right) + \right. \\ \left. Y_p \sin\left(\pi pN_t \frac{M+1-2n}{h}\right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

以上两式中,  $Y_p = \frac{2Q\delta_p\omega_0}{\omega_r}$ , 式(20)、(21)描述了谱线  $pN_t\omega_0$  对应阻抗对束流负载的贡献.

由以上两式可得:

(1) 当  $p = \left(k + \frac{l}{M}\right) \frac{h}{N_t}$ ,  $l = 1, 2, \dots, M-1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  时,  $\tilde{f}_{np} = 0$ . 在  $\tilde{f}_{np}$  的两个零点之间  $\tilde{f}_{np}$  有最大值. 可以证明式(20)中中括号里的项与它前一项乘积的最大值为 1, 因此  $\sin(\pi pN_t M/h)/\sin(\pi pN_t/h)$  给出了  $\tilde{f}_{np}$  可能的最大值随频率的变化, 频率越接近  $N_t h k$ ,  $\tilde{f}_{np}$  可能的最大值也就越大.

(2) 当  $p = \frac{kh}{N_i}$  时,

$$\tilde{f}_{np} = MN_i [1 + Y_p^2]^{-1}. \quad (22)$$

(3) 当  $p = \left(k + \frac{l}{M}\right) \frac{h}{N_i}$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, M$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  时,  $\tilde{g}_{np} = 0$ . 在  $\tilde{g}_{np}$  的两个零点之间  $\tilde{g}_{np}$  有最大值,  $\tilde{g}_{np}$  可能的最大值随频率的变化由  $pN_i \sin(\pi p N_i M/h) / \sin(\pi p N_i/h)$  给出, 频率越接近  $N_i h k$ ,  $\tilde{g}_{np} / (pN_i)$  可能的最大值也就越大.

(4) 由式(20)知道,  $\tilde{f}_{np} \propto (1 + Y_p^2)^{-1/2}$ , 由于通常  $Q \gg 1$ ,  $Y_p \gg 1$ , 因此一般情形有  $\tilde{f}_{np} \propto 1/Y_p \propto 1/Q$ , 近似有  $f_n \propto \frac{R_s}{Q}$ ,  $g_n$  有相同的结论.

对于基模,  $p = h/N_i$  项对各束团相位变化的影响相同, 而且该相移随失谐角的增大而很快减小(式(22)); 引起束团之间相位差异的项来源于其它项,

$$\tilde{f}_{np} \propto \frac{\sin(mM\psi)}{\sin(m\psi)} \frac{1}{m} \sin m\varphi. \quad (23)$$

上式中,  $m = p - h$ ,  $\psi = \pi N_i/h$ ,  $\varphi = \pi N_i(M + 1 - 2n)/h$ . 基模引起的束团相移随束团近似线性变化, 且  $df_n/dn > 0.0$ .

图 1 给出了 10 个连续分布的束团组成的束团串中每个束团的相移与频移随高次模频率的变化规律(图中高频腔谐波数为 100).

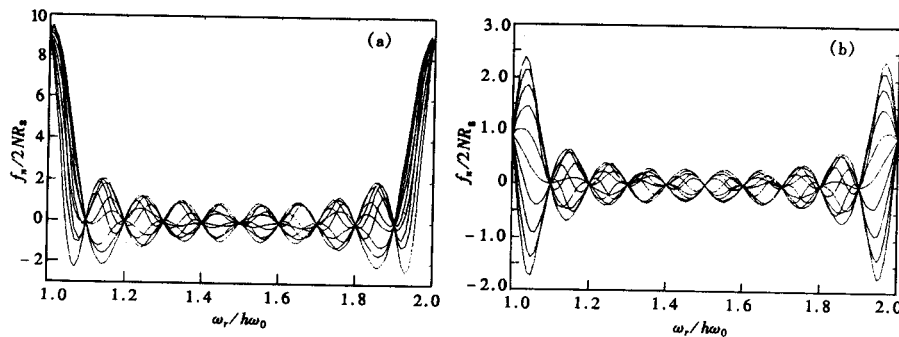


图1 束团相移与频移随高次模频率的变化

(a)  $Q=1.0 \times 10^4$ ; (b)  $Q=1.0 \times 10^5$ .

## 4 相位补偿

补偿束团相位的方法有多种, 如  $\Delta f^{[4]}$ 、主动谐波腔、被动谐波腔<sup>[3]</sup>及调节腔输入等方法. 在文献[3]中, 用模拟的方法研究了被动谐波腔对束团相位的补偿. 这里, 我们试图利用上面的分析结果给出被动谐波腔补偿束团相位的物理实质. 研究表明: 当全环的束团数目小于主加速腔谐波数的一半时, 束团相位可以补偿得很好; 相反, 当全环的束团数目大于主加速腔谐波数的一半时, 束团相位就不能很好地补偿, 束团数目越多, 补偿效果

越差. 因此, 谐波校正方法的适用范围为全环的束团数目小于主加速腔谐波数的一半.

被动谐波腔方法是指利用频率合适的谐波腔, 通过微调其频率在不加微波输出的情形下来完成束团相位的补偿. 文献 [3] 指出, 被动谐波腔的频率应满足  $f_{\text{sub}} = f_{\text{RF}} - mN_t f_{\text{rev}}$ . 这里  $f_{\text{RF}}$  为主加速腔的频率,  $f_{\text{rev}}$  为回旋频率,  $m$  为一整数. 这可由式 (20) 和 (21) 看出: 只有频率在  $pN_t f_{\text{rev}}$  附近的高次模才对束流负载有贡献. 但是并不是所有满足  $f_{\text{sub}} = f_{\text{RF}} - mN_t f_{\text{rev}}$  的模都可以用来补偿束团相移.

(1) 满足  $f_{\text{sub}} = mf_{\text{RF}}$  的谐波腔不能用来补偿束团的相位, 这是因为该腔无论向什么方向失谐, 其引起的束团相位变化趋势总与主加速腔基模效果相同, 达不到补偿的目的.

(2) 满足  $f_{\text{sub}} = kf_{\text{RF}} + mf_{\text{rev}}h/M$ ,  $m = 1, 2, \dots, M-1$ ,  $h/M$  为整数时, 谐波腔不能用来补偿束团的相位.

(3) 满足  $f_{\text{sub}} = kf_{\text{RF}} + mN_t f_{\text{rev}}$ ,  $|2mN_t| < h$ , 这时式 (20) 中  $p = kh + m$  的项起主要作用:

$$f_n \approx 2NR_s N_t \frac{\sin\left(\pi \frac{mN_t M}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{mN_t}{h}\right)} \cos\theta \cos\left(\pi mN_t \frac{M+1-2n}{h} - \theta\right). \quad (24)$$

这里,  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2(f_{\text{work}} - f_{\text{sub}})Q}{f_{\text{sub}}}\right)$  是谐波腔的失谐角,  $R_s$  和  $Q$  为谐波腔的阻抗和有载品质因数. 当失谐角接近  $90^\circ$  时:

$$f_n \approx 2NR_s N_t \frac{\sin\left(\pi \frac{mN_t M}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{mN_t}{h}\right)} \cos\theta \sin\left(\pi mN_t \frac{M+1-2n}{h}\right). \quad (25)$$

当失谐角接近  $-90^\circ$  时:

$$f_n \approx -2NR_s N_t \frac{\sin\left(\pi \frac{mN_t M}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{mN_t}{h}\right)} \cos\theta \sin\left(\pi mN_t \frac{M+1-2n}{h}\right). \quad (26)$$

当  $mN_t M/h < 1/2$  时, 束团相位随束团数目近似线性变化:

$$df/dn \approx \mp 4NR_s N_t \frac{\sin\left(\pi \frac{mN_t M}{h}\right)}{\sin\left(\pi \frac{mN_t}{h}\right)} \frac{\pi mN_t}{h} \cos\theta. \quad (27)$$

式中“ $\mp$ ”分别对应失谐角接近  $+90^\circ$  和  $-90^\circ$  的情形.

当  $mN_t M/h > 1/2$  时,  $f_n$  随  $n$  变化的非线性增强. 由于  $m = \pm 1$  时,  $f_n$  最接近线性, 因此通常选用  $m = \pm 1$  的谐波腔. 该情形下, 当  $N_t M/h < 1/2$  (即全环的束团数目小于主加速腔谐波数的一半) 时,  $f_n$  随  $n$  很好地线性变化; 如果束团总数目大于主加速腔谐波数的一半, 线性变差. 当  $|m| > 1$  时,  $f_n$  为类似正弦或余弦波形 (参考式 (24)), 不利于补偿束团相位的线性变化.

由于基模引起的  $df_n/dn > 0.0$ , 所以要补偿相位要求谐波腔引起的  $df_n/dn < 0.0$ . 由式 (24) 可知, 当选用  $m = +1$  的谐波腔时, 要调节失谐角使其偏向  $+90^\circ$  方向; 选用  $m = -1$  的谐波腔时, 则要调节失谐角使其偏向  $-90^\circ$  方向. 作者利用模拟的方法<sup>[5]</sup> 验证了该结论的正确性, 而文献 [3] 利用模拟方法只给出了  $m < 0$  的情形, 且其解释不够准确.

图 2 是当环上束团较少时, ( $N_t = 5$ ,  $M = 20$ ,  $h = 330$ ,  $f_{rev} = 2.16\text{MHz}$ ),  $m$  分别为  $-1$  和  $-2$  时 ( $f_{sub} = f_{RF} + mN_t f_{rev}$ ,  $Q = 8000$ ), 每个束团的相位与谐波腔频率变化的关系. 由图可看出,  $m = -1$  时, 束团的相位更接近线性变化. 通过调节谐波腔的频率就可较好地补偿束团的相位变化.

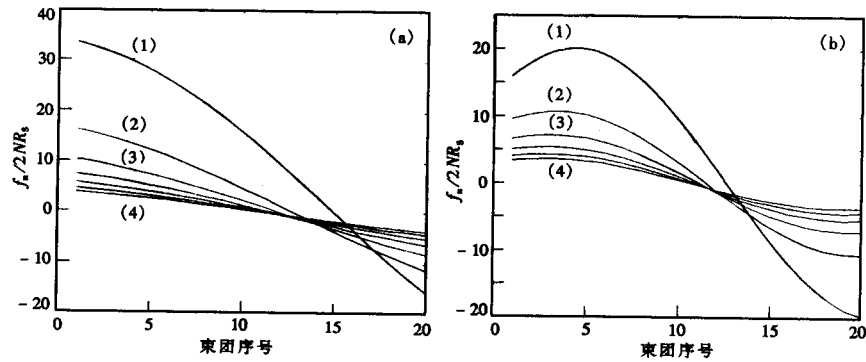


图2 束团相位随束团的变化

(a)  $m = -1$  ((1)  $\Delta k = -100\text{kHz}$ ; (2)  $\Delta k = -200\text{kHz}$ ; (3)  $\Delta k = -300\text{kHz}$ ; (4)  $\Delta k = -700\text{kHz}$ );  
 (b)  $m = -2$  ((1)  $\Delta k = -100\text{kHz}$ ; (2)  $\Delta k = -200\text{kHz}$ ; (3)  $\Delta k = -300\text{kHz}$ ; (4)  $\Delta k = -600\text{kHz}$ ).

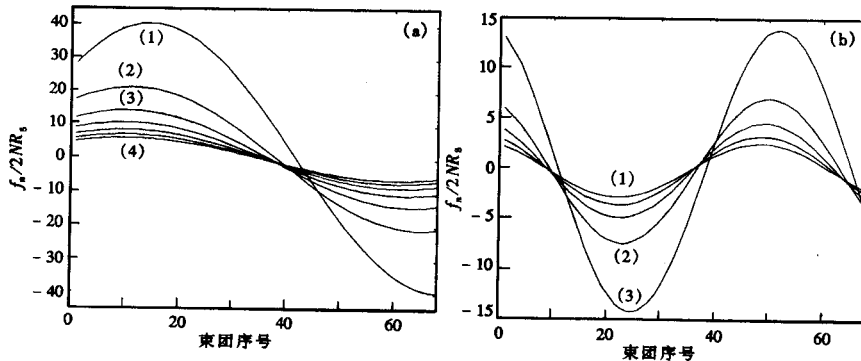


图3 束团相位随束团的变化

(a)  $m = -1$  ((1)  $\Delta k = -100\text{kHz}$ ; (2)  $\Delta k = -200\text{kHz}$ ; (3)  $\Delta k = -300\text{kHz}$ ; (4)  $\Delta k = -700\text{kHz}$ );  
 (b)  $m = -2$  ((1)  $\Delta k = -500\text{kHz}$ ; (2)  $\Delta k = -200\text{kHz}$ ; (3)  $\Delta k = -100\text{kHz}$ ).

对于环上束团较多的情形,即使利用  $m = -1$  的谐波腔,束团相位随束团数目的变化已不是线性的,这种情形下,相位的补偿效果会差些;对于  $m = -2$  的谐波腔,线性更差. 图 3 是  $N_t = 3$ ,  $M = 68$ ,  $h = 330$ ,  $f_{\text{rev}} = 2.16\text{MHz}$ ,  $m$  分别为  $-1$  和  $-2$  时 ( $f_{\text{sub}} = f_{\text{RF}} + mN_t f_{\text{rev}}$ ,  $Q = 8000$ ), 每个束团的相位与谐波腔频率的变化规律. 图 4 是文献 [3] 用模拟方法得到对应图 3 情形 (a) 时束团平衡位置随束团的变化. 需要指出的是,文献 [3] 中相位的正负号定义与本文的相反. 比较图 3 (a) 与图 4, 可发现分析结果与模拟结果非常相似.

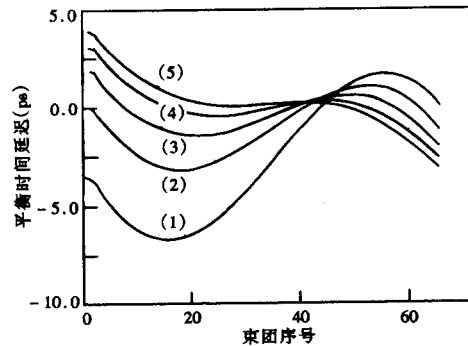


图 4 束团平衡时间延迟随束团的变化 ( $m=-1$ )

(1)  $\Delta f=300\text{kHz}$ ; (2)  $\Delta f=400\text{kHz}$ ; (3)  $\Delta f=500\text{kHz}$ ; (4)  $\Delta f=600\text{kHz}$ ; (5)  $\Delta f=700\text{kHz}$ .

## 5 结论

本文用解析的方法,研究了一般情形下纵向尾场作用激发势阱扰动引起的同步相移、频移,利用公式可很方便地得到每个束团的相移、频移. 可以参考这些结论去优化高频腔的工作模式和环上束团的分布,以尽量减小势阱扰动效应;同时还可利用该研究来完成相位补偿,这种解析的方法比模拟方法更简单、物理意义更清楚.

## 参 考 文 献

- 1 Chao Alexander Wu. Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., 1992
- 2 Laclare J L. Bunch Beam Coherent Instabilities, CERN 87-03, 1987, 1:264—326
- 3 KUBO K, Higo T, Sakanaka S. Compensation of Bunch Position Shift Using Sub-RF Cavity in a Damping Ring, IEEE 1993, 3503—3505
- 4 Zimmermann F, Raubenheimer T O, Thompson K A. Multi-bunch Energy Compensation in the NLC Bunch Compressor, SLAC-PUB-7141
- 5 Wang Lanfa, Zhang Chuang, Wang Shuhong. High Energy Physics & Nuclear Physics (in Chinese), 1998, 22(12):1174  
(王兰法,张闯,王书鸿等. 高能物理与核物理, 1998, 22(12):1174)



## Potential Well Distortion Effects and Bunch Shift Compensation

Wang Lanfa    Lin Yuzheng

*(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)*

**Abstract** An analytic treatment of multi-bunch potential well distortion for general bunch distribution case along one storage ring is presented. Resulting simple analytic formulas describe the mode loss and the synchrotron tune shift experienced by a given bunch within the beam, as a function of the resonance frequency. We can know how to modify the existing configuration of parasitic cavity resonance (via frequency tuning) so that the resulting potential well distortion effects are minimized. We can also know how to compensate the bunch shift by using sub-RF cavity.

**Key words** beam loading, shift compensation, storage ring