第22卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol.22, No.2
1998 年2月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1998

量子引力中曲率的激发

邵常贵　陈中秋　马为川　陈怡汉　林树渊

(湖北大学物理系　武汉　430062)

摘要　求出了 Stelle 可重整引力的量子 Wilson 圈的$\hbar$阶首项，得到了矢量平移被定域曲率的激发量子化的结果，求得了非平坦背景下量子 Wilson 圈的泛函计算式.

关键词　Wlison 圈　曲率激发　矢量平移

熟知，量子引力圈表象中的 Wilson 圈(WL)是时空微分同胚和局部规范变换下的标量[1]．正是这一性质使它成为 Ashtekar 引力中预选的可观测量[2]并是发展该量子引力的态函数的主要工具．如将 4 维量子引力看作是以 GR 为经典极限的有效量子场论，并在微观看成一种更为基本的理论时，WL 中曲率的量子激发对引力中的关联函数以及相互作用的机制的研究也将提供重要信息[3]．

本文在平坦背景下利用文献[4]求得的可重整 Stelle 引力的引力子传播子，计算了其量子 WL．同时，在非平坦背景下[5]用生成泛函给出了对量子 WL 的泛函计算方法．$\hbar$阶的贡献是量子 WL 中的首项，将导致所建立的量子引力有无时空定域曲率的激发．目前一些文献认为 GR 的量子 WL 中的$\hbar$阶项为零．本文在平坦背景下求得了 Stelle 引力的量子 WL 的$\hbar$阶贡献不为零的结果．

1　Wilson 圈

令 $P = P(M, SO(3,1))$为 Lorentz 标架主丛，l 为时空流形 M 中的一光滑圈[6,7]．$V(x)$ 为 P 的配丛 E 在点 $x\in M$的矢量．假定矢量 V 从主丛 P 上的一点 p 中的初始位置出发，沿某 l 平移一周返回 p 中后变成 V'，则有

$$\begin{aligned}|V|^2 = |V'|^2 &= V^a V^b \eta_{ab} = V'^a V'^b \eta_{ab}\\ &= V^\mu V^\nu g_{\mu\nu}(x)\\ &= H^a_c(l) V^c H^b_d(l) V^d \eta_{ab},\end{aligned}$$

式中，拉丁字母为活动指标，希腊字母为世界指标；$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-\ +\ +\ +)$；$g_{\mu\nu}(x)$为 M的度规；矩阵$H(l)\in SO(3,1)$，且支配矢量 V的平移．在本文情况下，将规定矢量平移的

1997-02-03收稿

holonomy 记为 $H(l)$，则有

$$H(l) = P\exp\left[\oint_l \mathrm{d}x^a \Gamma_a(x)\right], \tag{1}$$

式中，$\Gamma_a(x)$为取值于李代数$SO(3,1)$上的时空联络，而这里的P将给出联络相乘沿圈l的次序. 从而规定经典 WL 为

$$W(l) = -4 + \mathrm{Tr}P\exp\left[\oint_l \mathrm{d}x^a \Gamma_a(x)\right]$$

$$= -4 + \mathrm{Tr}P\exp\left[\oint_l \mathrm{d}x^\mu \Gamma_\mu(x)\right]. \tag{2}$$

令S为引力的作用量，本文用生成泛函

$$Z = \int \mathrm{d}(g)\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(g)]. \tag{3}$$

规定该引力的量子化，将经典 WL 量子化后的真空量子平均记为$\langle\omega\rangle_0$，则有

$$\langle\omega\rangle_0 = \langle W(l)\rangle_0 = -4 + \mathrm{Tr}P\exp\left\langle\left[\oint_l \mathrm{d}x^\mu \Gamma_\mu(x)\right]\right\rangle_0 =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\oint_l \mathrm{d}x_1^{\mu_1}\oint_l \mathrm{d}x_2^{\mu_2}\cdots\oint_l \mathrm{d}x_i^{\mu_i}\langle\Gamma^{\alpha}_{\mu_1\beta_1}(x_1)\Gamma^{\beta_1}_{\mu_2\beta_2}(x_2)\cdots\cdots\Gamma^{\beta_{i-1}}_{\mu_i\alpha}(x_i)\rangle_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\langle\omega^{(i)}\rangle_0,$$

$\langle\omega\rangle_0$可作为量子引力的后选可观测量[9]. 上式中求和的各项，将以$\hbar$的方次展开，其中最低阶项为$\hbar$阶，该项为

$$\langle\omega^{(2)}\rangle_0 = \oint_l \mathrm{d}y^\mu \oint_l \mathrm{d}x^\nu \langle\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}(x)\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}(y)\rangle_0. \tag{4}$$

2 Stelle 引力的曲率激发

该引力的作用量为

$$S = -\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,(\alpha R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \beta R^2 + k^{-2}\gamma R), \tag{5}$$

式中，α,β,γ为常数，$k = 32\pi G$，其余符号见文献[4]. 用展式

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + kh^{\mu\nu}, \tag{6}$$

并采用无权的谐和规范$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$，通过(3)由(5)得如下引力子传播子:

$$\langle \mathrm{T}h_{\mu\nu}(x)h_{\alpha\beta}(y)\rangle_0 = \mathrm{i}D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y),$$

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x) = -\frac{2}{\gamma}\left(\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)D(x) + \frac{2}{\gamma}\left(\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)D^{M_1}(x) -$$

$$\frac{1}{2\gamma}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}D^{M_2}(x), \tag{7}$$

式中

$$D(x) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{p^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} = \frac{1}{4\pi^2x^2}\text{为无质标量场传播子,}$$

$$D^M(x) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{p^2+M^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\text{为质量为 }M\text{ 的标量场传播子,}$$

且

$$M_1^2 = \frac{\gamma}{\alpha k^2},\ M_2^2 = \frac{\gamma}{(4\beta-\alpha)k^2},\ x^2 = \boldsymbol{x}^2 - x^{02} - \mathrm{i}\varepsilon\ ,$$

$$\Box D(x) = -\delta^4(x),\ (\Box - M^2)D^M(x) = -\delta^4(x)\ .$$

利用(6)可得$\hbar$阶量子化 Wilson 圈为

$$\langle\omega^{(2)}\rangle_0 = \oint_l \mathrm{d}x^\mu\oint_l \mathrm{d}y^\nu\langle\Gamma^\alpha_{\mu\beta}(x)\Gamma^\beta_{\nu\alpha}(y)\rangle_0 =$$

$$\frac{\mathrm{i}k^2}{4\gamma}\oint_l \mathrm{d}x^\mu\oint_l \mathrm{d}y^\nu\{16\partial_\mu\partial_\nu\frac{1}{4\pi^2(x-y)^2} - \partial_\mu\partial_\nu(19D^{M_1}(x-y) -$$

$$- 3D^{M_2}(x-y)) + \frac{7\gamma}{\alpha k^2}D^{M_1}(x-y) - \frac{\gamma}{(4\beta-\alpha)k^2}D^{M_2}(x-y)\}. \tag{8}$$

(8)中的第一项来自作用量 S 中的 R 项，其余均来自 $R^2 + R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$项. 显然，(8)中的最后两项不为零，它们将表明该种引力中存在着曲率的量子激发.

3　矢量在引力场中的平移

为了解析地给出量子 WL 对矢量平移的作用，假定矢量 $V(x)$在此引力场中平移一圈后变成 $V'(x)$，$V'(x)$与 $V(x)$长度相等，所差的角度用$\varphi_1\oplus\varphi_2$表述. 这里角度$\varphi_1\oplus\varphi_2$为群 $SO(1,1)\otimes SO(2)$在切空间 $T_x(M)$中给出的转动. 则 $V'(x)$相对 $V(x)$所差的转动可由如下矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}\cosh\varphi_1 & \sinh\varphi_1 & 0 & 1\\ \sinh\varphi_1 & \cosh\varphi_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2\\ 1 & 0 & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix}\in SO(1,1)\otimes SO(2)\ .$$

由于角度$\varphi_1\oplus\varphi_2$较小，从而可令

$$\mathrm{Tr}H(l) = 2\cosh\varphi_1 + 2 - \varphi_2^2\ , \tag{9}$$

并且有

$$W(l) = -2 + 2\cosh\varphi_1 - \varphi_2^2\ ,$$

角度$\varphi_1 \oplus \varphi_2$为规范与微分同胚变换下的不变量．若引力场是量子化的，则有矢量平移一周后的转角也是量子化的结果，即此时有

$$\langle \omega \rangle_0 = \langle \omega(l) \rangle_0 = -2 + 2\cosh\langle \varphi_1 \rangle_0 - \langle \varphi_2^2 \rangle_0 . \tag{10}$$

作为一般的讨论，如果某引力的$\hbar$阶的量子 Wilson 圈$\langle \omega^{(2)} \rangle_0$由传播子计算为零，则角度的真空平均$\langle \varphi_1 \rangle_0 \oplus \langle \varphi_2 \rangle_0$将为零．这意味着进入生成泛函(3)的弱场联络位形不具备曲率，决定矢量平移的 holonomy $H(l)$为单位元．也就是说，在该种泛函近似下，可能的弯曲联络位形一概被排斥，这是种不理想的结果．然而对于 Stelle 引力，由于$\langle \omega^{(2)} \rangle_0$ 不为零，从而$\langle \varphi_1 \rangle_0 \oplus \langle \varphi_2 \rangle_0$不为零，矢量沿圈$l$平移过程中将发生随机转动．这是定域化曲率进入量子化生成泛函(3)中的结果，曲率在生成泛函中通过引力传播子激发后使平移矢量发生转动．引力的 3 顶角、4 顶角……将对应着高阶的量子 Wilson 圈$\langle \omega^{(3)} \rangle_0$, $\langle \omega^{(4)} \rangle_0$……的贡献．所以引力的 WL 是否为零，是该引力的一个重要的量子行为．它直接把引力曲率的激发与引力相互作用以及时空中的矢量场的平移特性联系起来.

4 非平坦背景的 Wilson 圈

若在时空中引入一定强度的外源 $J(x)$， $J(x)$将打破时空的 Poincar'e 对称性，时空度规可写成

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^0_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}, \tag{11}$$

式中 $h^0_{\mu\nu}$为外源 $J(x)$通过 Einstein 方程产生的经典场，$\hat{h}_{\mu\nu}$视为非平坦背景上的量子扰动．则生成泛函略去指标后，可写成

$$Z[J] = Q^{-1}\int \mathrm{d}[h]\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(S[h] + \int \mathrm{d}x h(x)J(x))], \tag{12}$$

式中 Q 为归一化常数，$h = h^0 + \hat{h}$．若 $W(h)$是由(11)规定的 WL，则其真空量子平均可记为$\langle W(h) \rangle_0$，且有

$$\langle W(h) \rangle_0 = Q^{-1}\int \mathrm{d}[\hat{h}]\, W(h)\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(S[h] + \int \mathrm{d}x h(x)J(x))]. \tag{13}$$

在(12)中将 $S[h]$在 h^0展开，并取鞍点近似可得

$$Z[J] = Q^{-1}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(S[h^0] + \int \mathrm{d}x h^0(x)J(x))\right]\int \mathrm{d}[\hat{h}]$$

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}(\int \mathrm{d}x\int \mathrm{d}y G^{-1}(x,y)\hat{h}(x)\hat{h}(y) + S_3)\right], \tag{14}$$

式中 $G(x,y) = \left[\left(\frac{\delta^2 S}{\delta h(x)\delta h(y)}\right)\bigg|_{h=h^0}\right]^{-1}$ 为背景 h^0中的引力子传播子，S_3为 $\hat{h}$的 3 阶小量．由计算得

$$G(x,y) = N - kNV^{(3)}h^0N + \mathrm{O}(k^2), \tag{15}$$

式中 N为平坦背景中的引力传播子，$V^{(3)}$为 Einstein 引力的 3 顶角．由(14)令 $Z(0) = 1$ 求得 Q 之后，将 Q 代入(13)得

$$\langle \omega(h) \rangle_0 = \frac{\int \mathrm{d}[\hat{h}]\, W(h^0+\hat{h}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y G^{-1}(x,y)\hat{h}(x)\hat{h}(y) + S_3\right)\right]}{\int \mathrm{d}[\hat{h}] \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y G^{-1}(x,y)\hat{h}(x)\hat{h}(y) + S_3\right)\right]} . \tag{16}$$

由于(16)中的 S_3高于$\hbar$阶，所以对(16)式的$\hbar$阶贡献将由(15)式提供，(15)式中首项的贡献为零，第二项的贡献通常不为零，其量级为$\hbar k^3$. 从而由外源引入产生的非平坦时空背景中，存在的引力量子场通常可能产生$\hbar$阶的量子化 Wilson 圈，它将使矢量沿回路的平移在时空 M中发生转动，M中不存在自平移的物理矢量场.

参 考 文 献

[1] Morales-Tecotl H A. Rovelli C. Nucl. Phys., 1995, **B451**: 331—331

[2] Ashtekar A. Lectures on: Non-Pertubative Canonical Gravity, Lecture, Notes, Singapore: World Scientific, 1991. 150—200

[3] Modanese G. Phys. Lett., 1992, **B288** : 69—72

[4] Shao Changgui, Chen Zhongqio, Chen Yihan. Acta Mathematica Scientia (in Chinese), 1997, **16**: 364—374 (邵常贵，陈中秋，陈怡汉．数学物理学报，1997，**16**：364—374)

[5] t'Hooft G. Nucl. Phys., 1973, **B62**: 444—449

[6] Bassetto A, de Biasio F, Griguolo L. Phys. Rev. Lett., 1994, **72**: 3141—3144

[7] Gambini R. Phys. Lett., 1994, **B255**: 180—183

[8] Kerrik D M. Phys. Rev. Lett., 1995, **75**: 2074—2079

[9] Smolin L. Phys. Rev., 1994, **D49**: 4028—4033

Curvature Excitation in Quantum Gravity

Shao Changgui　　Chen Zhongqiu

Ma Weichuan　　Chen Yihan　　Lin Shuyuan

(*Physics. Department, Hubei University, Wuhan* 430062)

Abstract The leading term of qantum Wilson loop for Stelle gravity is calculated. The qantum result of vector papallel transport is obtained using the excitation of curvature, and a functional expression for calculating the quantum Wilson loop under the nonflat background is presented.

Key words Wilson loop, curvature excitation, parallel transport of vector

---

Received 3 February 1997