

# 裂变碎片动能和质量分布的 三维朗之万研究\*

包景东

(北京气象学院基础科学系 北京 100081)

**摘要** 采用一个具有协变形式的朗之万方程组来描述不对称热核裂变. 基于核表面  $\{c, h, \alpha\}$  三参数模型, 用数值方法模拟了核系统从鞍点到断点的扩散过程, 从而完成了碎片动能和质量分布的计算. 研究了核的两体摩擦或一体耗散机制以及有限颈部作为核断裂条件对裂变碎片输出量的影响.

**关键词** 核裂变 Langevin 方程 碎片动能和质量分布

## 1 引言

在过去的十余年里, 积累了大量的令人感兴趣的有关重离子诱发核裂变反应的实验数据<sup>[1]</sup>, 裂变动力学理论与实验的比较研究着眼于轻粒子发射、碎片平均动能、动能和质量分布的涨落宽度等<sup>[2-4]</sup>. 从最近的一些工作中, 人们获得了若干有价值的结论, 例如: 裂变是一个慢过程<sup>[5]</sup>; 热核的断裂发生在其具有一个扁平脖子的构形处<sup>[6]</sup>. 众所周知, 核的单体耗散模型给出的粘滞性要比两体摩擦模型大许多, 但在两体摩擦模型中有一个可调的粘滞系数 $\eta_0$ <sup>[7]</sup>, 人们可增大 $\eta_0$ 的值以降低核的裂变速率, 但同时又要看是否能给出正确的碎片平均动能, 因此仍然需要将两者进行比较研究.

在80年代中期, 前苏联学者 AdeeV 等<sup>[8]</sup>, 基于 Fokker-Planck 方程, 将核裂变作为一个复杂的大振幅集体运动, 经过对方程中的惯性和粘滞张量的常数化处理, 用矩展开方法计算了裂变输出量. 进入90年代以来, 一些作者用 Langevin 方程的数值解代替 Fokker-Planck 方程的解析解, 这样就可以考虑坐标有关的惯性、粘滞张量和真实的裂变势能曲面. 目前, 有关二维对称裂变碎片动能分布的 Langevin 研究已有报道<sup>[9-12]</sup>, 但计算给出的动能涨落宽度仍比实验值小, 且不能计算不对称裂变碎片的质量分布. 本文希望发展一个考虑了不对称自由度的三维裂变扩散模型, 首先探索在这种框架下能否使动能涨落宽度的计算值增大, 同时也可以就不对称裂变碎片的质量涨落宽度进行研究. 本文的另外一个目的还在于考察不同的核耗散机制和断裂条件对动能分布的影响.

1997-08-22收稿, 1998-04-05收修改稿

\* 国家自然科学基金资助(19605002)

## 2 模型和方程的解

从如下的一个具有协变形式的  $2N$  维 Langevin 方程组出发

$$\dot{q}^i = m^{ij} p_j, \quad (1)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial U}{\partial q^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m^{jk}}{\partial q^i} p_j p_k - \eta_{ij} m^{jk} p_k + g_i^k \Gamma_k(t). \quad (2)$$

噪声强度  $g$  与扩散张量  $D$  之间满足广义涨落耗散定理

$$D_{ij} = g_i^k g_j^k = T \eta_{ij}, \quad (3)$$

无规力函数  $\Gamma_i(t)$  的系综平均遵守

$$\langle \Gamma_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} \delta(t-t'). \quad (4)$$

在以上方程中, 使用了 Einstein 求和约定. 势能  $U(\{q\})$  和温度  $T$  是标量, 即它们不随坐标的变换而改变, 动量  $p_i$  和集体坐标  $q^i$  分别是协变和逆变矢量,  $m_{ij}(\{q\})$  和  $\eta_{ij}(\{q\})$  为坐标有关的二阶协变惯性和粘滞张量, 惯性张量的倒数  $m^{ij}$  是一个逆变张量, 并且存在着如下的关系式

$$m_{ij} m^{jk} = \delta_i^k \quad \text{和} \quad \frac{\partial m^{jk}}{\partial q^i} = -m^{j'l} \frac{\partial m_{ll'}}{\partial q^i} m^{l'k}. \quad (5)$$

本文之所以将 Langevin 方程组写成上述的协变形式, 是因为在与时间无关的非线性坐标变换下,  $2N$  维相空间的该方程组的形式完全不变, 进而任何可观测物理量也将是不随坐标的变换而变化. 同时, 还为我们由原曲线坐标系  $(c, h, \alpha)$  变换到新坐标系  $(\rho, h, \alpha)$  中计算惯性、粘滞张量和势场梯度矢量及曲率张量提供了方便.

描述裂变核系统的宏观形状变化至少需要三个基本自由度, 它们是: 核的伸长、颈部厚度和碎片不对称参数.  $\{c, h, \alpha\}$  核表面方程<sup>[13]</sup>就是能满足这一要求的简单和有效的选择, 这里  $c$  是以球形核半径  $R_0$  为单位的核长度之半,  $h$  描写核颈部厚度的变化, 而  $\alpha$  则是反映两碎片体积不对称的参量. 柱坐标系中核表面方程为

$$P_s^2(z) = c^{-2}(c^2 - z^2)(A_s c^2 + Bz^2 + \alpha cz), \quad (B \geq 0); \quad (6a)$$

$$P_s^2(z) = c^{-2}(c^2 - z^2)[(A_s c^2 + \alpha cz) \exp(Bcz^2)], \quad (B < 0), \quad (6b)$$

式中,  $B = 2h + (c - 1) / 2$  和  $A_s = c^{-3} - B / 5$ . 在实际的计算中, 常用两碎片之间的质心距  $\rho$  代替  $c$  作为一个伸长变量, 为

$$\rho = \rho(c, h, \alpha) = -\frac{\int_{-c}^{z_n} z P_s^2 dz}{\int_{-c}^{z_n} P_s^2 dz} + \frac{\int_{z_n}^c z P_s^2 dz}{\int_{z_n}^c P_s^2 dz}, \quad (7)$$

这里颈部坐标  $z_n$  由核表面半径在该处取极小值来确定, 就是

$$\frac{dP_s^2(z_n)}{dz} = \alpha c + 2(B - A_s)z_n - \frac{3\alpha}{c} z_n^2 - \frac{4B}{c^2} z_n^3 = 0, \quad (8)$$

同时还要满足  $\frac{d^2 P_s^2(z_n)}{dz^2} > 0$ , 如果该式不满足, 则令  $z_n = 0$ .

现在把  $\{\rho, h, a\}$  三参数作为一组广义集体坐标, 来计算 Langevin 方程组中的系数. 裂变势能  $U(\rho, h, a)$  根据 Myers-Swiatecki 参数  $a_c = 0.7053\text{MeV}$ ,  $a_s = 17.9439\text{MeV}$  和  $k = 1.7826$  的液滴模型<sup>[14]</sup> 计算得到; 惯性张量采取 Werner-Wheeler 近似<sup>[7]</sup> 给出; 粘滞张量用两种方法计算, 一个是阱加窗的单体耗散模型<sup>[15]</sup>, 另一个为无旋不可压缩的两体摩擦机制<sup>[7]</sup>; 核系统温度由激发能  $E^*$  和能级密度参数  $a = A/10\text{MeV}$  确定:  $T = \sqrt{E^*/a}$ <sup>[12]</sup>.

下面用随机 Runge-Kutta 方法和单步迭代方法相结合, 即对动量项泰勒展开并对坐标项进行预估修正, 求解方程组 (1) 和 (2). 这样既可以避免产生高阶张量, 又与文献 [11] 的关于二维 Langevin 方程的二阶算法具有相同结构的确定项和随机项. 最终的多维 Langevin 方程的数值解是

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + \frac{1}{2}(h_i + h_i^*)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial h_i}{\partial p_j} h_j \Delta t^2 + \frac{1}{2}(g_i^j + g_i^{j*})\tilde{\Gamma}_j^{(1)}(t) + \frac{\partial h_i}{\partial p_j} g_j^k \tilde{\Gamma}_k^{(2)}(t), \quad (9)$$

$$q^i(t + \Delta t) = q^i(t) + \frac{1}{2}(v^i + v^{i*})\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial v^i}{\partial p_j} h_j \Delta t^2 + \frac{\partial v^i}{\partial p_j} g_j^k \tilde{\Gamma}_k^{(2)}(t), \quad (10)$$

式中

$$v^i = m^{ij}(\{q(t)\})p_j, \quad (11)$$

$$h_i = -\frac{\partial U(\{q(t)\})}{\partial q^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m^{kk}(\{q(t)\})}{\partial q^i} p_l p_k - \eta_{ij}(\{q(t)\}) m^{jk}(\{q(t)\}) p_k, \quad (12)$$

以及

$$v^{i*} = m^{ij}(\{q(t + \Delta t)\})p_j, \quad (13)$$

$$h_i^* = -\frac{\partial U(\{q(t + \Delta t)\})}{\partial q^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m^{kk}(\{q(t + \Delta t)\})}{\partial q^i} p_l p_k - \eta_{ij}(\{q(t + \Delta t)\}) m^{jk}(\{q(t + \Delta t)\}) p_k, \quad (14)$$

$$g_i^{j*} = g_i^j(\{q(t + \Delta t)\}). \quad (15)$$

(9) 式和 (10) 式中出现的无规力冲量的表达式为

$$\tilde{\Gamma}_j^{(1)} = \int_t^{t+\Delta t} dt' \Gamma_j(t') = \sqrt{2\Delta t} \omega_{ij}(t), \quad (16)$$

$$\tilde{\Gamma}_k^{(2)} = \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} ds \Gamma_k(s) = \sqrt{2\Delta t} \Delta t \left( \frac{1}{2} \omega_{1k}(t) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \omega_{2k}(t) \right). \quad (17)$$

这里,  $\omega_{ia}(t) (i = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3)$  是一组互相独立的标准高斯分布随机数.

### 3 结果和讨论

我们将 Langevin 方程的初始条件选在势能曲面的鞍点处. 其为: 沿伸长自由度的坐标呈  $\delta$  分布, 动量为非零均值的超前高斯分布, 其它自由度上的坐标和动量均处于热平衡态分布. 裂变核的断点坐标和对应的动量由模拟获得的 Langevin 轨道与核的断点面的交点来确定. 假设在三维空间, 断点坐标满足的方程是  $\Phi(\rho, h, \alpha) = 0$ , 而轨道在断点面附近的方程可用如下的直线方程来表示:

$$\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{h - h_1}{h_2 - h_1}, \quad \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (18)$$

这里, 两组时空坐标  $(\rho_1, h_1, \alpha_1, t_1)$  和  $(\rho_2, h_2, \alpha_2, t_2)$  满足  $t_2 - t_1 = \Delta t$ ,  $\Phi(\rho_1, h_1, \alpha_1) < 0$ ,  $\Phi(\rho_2, h_2, \alpha_2) > 0$ . 裂变核在每个方向上的动量则由插值得到.

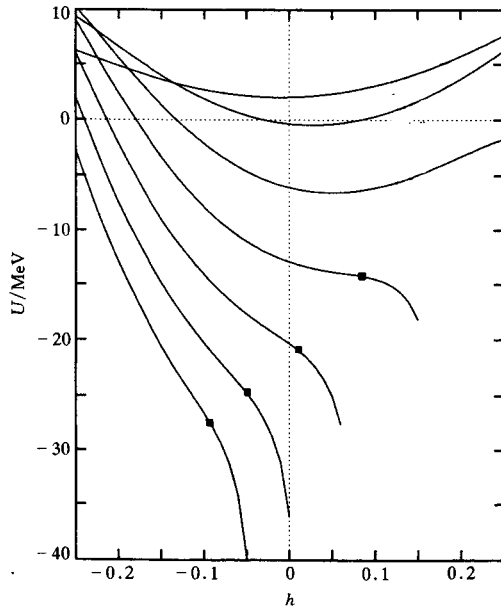


图1  $^{256}\text{Fm}$ 核的裂变势能随 $h$ 的变化及断点(方块点)的位置

落宽度  $\sigma_{E_k}^2$  分别是

$$\bar{E}_k = \langle V_C \rangle + \langle E_{ps} \rangle, \quad \sigma_{E_k}^2 = \langle (V_C + E_{ps})^2 \rangle - \langle (V_C + E_{ps}) \rangle^2. \quad (19)$$

两碎片中任意一个的质量数为

本文考虑两种有限颈部半径的核断裂条件, 其一是过鞍点后的裂变势脊线方程 (即沿颈部自由度方向一侧势壁消失, 也称能量判据)  $\left( \frac{\partial^2 U}{\partial h^2} \right)_{\rho, \alpha} = 0$ ; 另一个是碎片平均动能的计算值与实验数据相拟合的经验公式<sup>[16]</sup>  $P_s(z_n) = \text{常数}$ . 对 $^{256}\text{Fm}$ 核, 若选单体耗散, 这个颈部半径为 2.1fm, 若选两体耗散, 为 1.85fm; 对 $^{215}\text{Fr}$ 核, 若选单体耗散, 这个颈部半径为 1.95fm, 若选两体耗散, 为 1.80fm. 图 1 显示了过鞍点后对  $\langle \alpha \rangle = 0$  时,  $^{256}\text{Fm}$ 核的裂变势每间隔  $\Delta\rho = 0.3$  随  $h$  的变化及第一种断裂条件所给出的断点的位置.

裂变碎片的总动能为两碎片的库仑斥能  $V_C$  与沿伸长自由度上的运动动能  $E_{ps} = \frac{1}{2} m_{pp}^{-1} p_p^2$  之和. 碎片的平均动能  $\bar{E}_k$  和它的涨

$$M_1 = \frac{3}{4} A \left[ A_s c^2 (z_n + c) + \frac{1}{2} \alpha c (z_n^2 - c^2) + \frac{1}{3} (B - A_s) (z_n^3 + c^3) + \frac{\alpha}{4c} (c^4 - z_n^4) - \frac{B}{5c} (z_n^5 + c^5) \right], \quad (20)$$

式中  $A$  是核子数, 不对称裂变碎片的质量涨落宽度是:  $\sigma_M^2 = \langle M_1^2 \rangle - \langle M_1 \rangle^2$ .

本文对两种典型核  $^{256}\text{Fm}$  和  $^{215}\text{Fr}$  的碎片动能和质量分布进行了研究, 分别考虑了上述的两种核摩擦机制和两种断裂条件. 积分 Langevin 方程所用的时间步长为  $\Delta t = 0.004 \times 10^{-21}\text{s}$ , 介于文献 [10] (一阶算法,  $\Delta t = 0.0033 \times 10^{-21}\text{s}$ ) 和文献 [11] (二阶算法,  $\Delta t = 0.00658 \times 10^{-21}\text{s}$ ) 之间. 计算结果见表 1 和表 2 (用能量断裂条件), 其中  $1\text{TP} = 6.24 \times 10^{-22}\text{MeV} \cdot \text{s} \cdot \text{fm}^{-3}$ , 两表里后三列为实验数据<sup>[1]</sup>.

表1 在不同的粘滞系数下由两体摩擦所计算的结果

核	粘滞系数 $\eta_0/\text{TP}$	$\langle \rho_{sc} \rangle (R_0)$	$\bar{E}_k/\text{MeV}$	$\sigma_{E_k}/\text{MeV}$	$\sigma_A/A$	$\bar{E}_k/\text{MeV}$	$\sigma_{E_k}/\text{MeV}$	$\sigma_A/A$
$^{256}\text{Fm}$	0.02	1.872	185.9	37.7	15.7	181	20.5	23.3
	0.06	2.274	157.8	36.5	26.1	181	20.5	23.3
$^{215}\text{Fr}$	0.02	1.789	159.1	33.6	13.1	154	16.5	13.8
	0.06	1.821	157.1	29.5	17.5	154	16.5	13.8

表2 在不同的断裂条件下由一体耗散所计算的结果

核	断裂条件	$\langle \rho_{sc} \rangle (R_0)$	$\bar{E}_k/\text{MeV}$	$\sigma_{E_k}/\text{MeV}$	$\sigma_A/A$	$\bar{E}_k/\text{MeV}$	$\sigma_{E_k}/\text{MeV}$	$\sigma_A/A$
$^{256}\text{Fm}$	能量判据	1.674	187.5	23.4	19.1	181	20.5	23.3
	$P_s(z_n)=C$	1.902	179.6	18.9	21.3	181	20.5	23.3
$^{215}\text{Fr}$	能量判据	1.812	157.0	18.1	9.8	154	16.5	13.8
	$P_s(z_n)=C$	1.860	153.1	14.5	11.9	154	16.5	13.8

结果表明, 在同一断裂条件下, 对于鞍点与断点距离较远的核系统 (如  $^{256}\text{Fm}$ ), 由两体摩擦机制计算的核在断点处的平均碎片质心距  $\langle \rho_{sc} \rangle$  一般比单体的要大, 以致使根据两体摩擦计算的裂变碎片平均动能比一体耗散值小. 这是因为两体摩擦给出的核的粘滞性小, 核系统在裂变道上所受的阻尼力也就小, 并且核可以拉得很长而不到达断点面. 又因为反比于两碎片质心距的库仑斥能对总动能起主要贡献,  $V_c$  小则  $\bar{E}_k$  也就小. 相反, 单体耗散给出的粘滞阻尼非常大, 则使得裂变核系统在  $\rho$  不是很大时可满足断裂条件而通过断点面. 结果还表明: 由两体摩擦机制计算的碎片动能和质量涨落宽度却比单体耗散的大, 也比实验数据大. 原因也在于两体粘滞阻尼小, 促进裂变核在断点面附近大的构型变化, 而核形状的涨落对动能和质量分布的二次矩的大小起着决定性作用.

核断裂判据的不同是影响碎片断点输出量与实验值拟合好坏的另一重要因素. 上述的第一种断裂条件所预期的核平均颈部半径比第二种的小. 从表 2 可知, 由于大的断裂颈部半径意味着短的两碎片质心距, 则平均动能过大, 在此基础上的涨落宽度必然也就

大. 如果这些计算值比实验数据同时都大, 则不可取. 相反, 已有的研究也表明零颈部半径的断裂条件给出的  $\bar{E}_k$  比实验值小. 故从这两个角度讲, 能量判据在物理上较为合理.

由于引入了不对称自由度, 对碎片的  $\bar{E}_k$  的影响并不大, 但由于它使得两碎片的体积发生不同的涨落变化, 进而使两碎片间的库仑斥能的变化范围和剧烈程度都加大, 故三维计算得到的碎片动能涨落宽度比二维的大. 总之, 基于核的单体耗散和能量断裂条件, 所计算的碎片平均动能、动能和质量涨落宽度可以同时较好地与实验值相附合.

## 4 小结

本文提出用协变的 Langevin 方程组和  $\{c, h, \alpha\}$  三参数模型同时研究热核裂变碎片的动能和质量分布, 考虑了单体和两体耗散机制以及两种有限颈部的断裂条件. 对于计算鞍点与断点距离较远的中重核和重核的断点输出量, 人们可以仅考虑鞍点到断点这一区间的扩散过程. 进一步将 Langevin 方程和轻粒子发射相耦合, 并从基态出发的三维扩散模型的蒙特卡罗研究正在进展之中.

感谢与德国哈恩-迈特纳研究所的 P. Fröbrich 教授、日本京都大学汤川秀树研究所的 Y. Abe 教授以及中国原子能科学研究所的卓益忠和吴锡真研究员的有益讨论.

## 参 考 文 献

- [1] Hinde D J, Hilsche D, Rossner H et al. Phys. Rev., 1992, **C45**:1229—1259
- [2] Delargrange H, Gregoire C, Scheuter F et al. Z. Phys., 1986, **A323**:437—446
- [3] Mavlitov N D, Fröbrich P, Gonchar I I. Z. Phys., 1992, **A342**:195—197
- [4] Adeev G D, Gonchar I I, Pashkevich V V et al. Sov. J. Part. Nucl., 1988, **19**:529—542
- [5] Wada T, Abe Y, Carjan N. Phys. Rev. Lett., 1993, **70**:3538—3541
- [6] Brosa U, Grossmann S, Müller A. Phys. Rep., 1990, **197**:167—262.
- [7] Davies K T R, Sierk A J, Nix J R. Phys. Rev., 1976, **C13**:2385—2404
- [8] Adeev G D, Gonchar I I. Z. Phys., 1985, **A320**:517—524; *ibid.* 1985, **322**:479—486; Scheuter F, Gregoire C, Hofmann H et al. Phys. Lett., 1984, **B49**:303—308
- [9] Fröbrich P. Nucl. Phys., 1992, **A545**:87c—98c
- [10] Tillack G R. Phys. Lett., 1992, **B278**:403—406
- [11] Wada T, Carjan N, Abe Y. Nucl. Phys., 1992, **A538**:283c—290c
- [12] Bao Jingdong, Zhuo Yizhong, Wu Xizhen. Z. Phys., 1995, **A352**:321—325.
- [13] Brack M et al. Rev. Mod. Phys., 1972, **44**:320—376
- [14] Myers W D, Swiatecki W J. Ark. Fys., 1967, **36**:343—351
- [15] Sierk A J, Nix J R. Phys. Rev., 1980, **C21**:982—987
- [16] Davies K T R, Managan R A, Nix J R et al. Phys. Rev., 1977, **C16**:1890—1901

## Three-Dimensional Langevin Approach to Kinetic Energy and Mass Distribution of Fission-Fragments<sup>\*</sup>

Bao Jingdong

(*Department of Basic Science, Beijing Meteorological College, Beijing 100081*)

**Abstract** A three-dimensional Langevin equation with covariant form is applied to describe the asymmetric nuclear fission. The calculations for kinetic energy and mass distribution of fission-fragments are performed in terms of the  $\{c, h, \alpha\}$  parameterization, and the descent process of the fissioning nucleus from the saddle point to the scission point is simulated numerically. The dependence of the model on the choices for two types of nuclear dissipation such as two-body viscosity and one-body dissipation, as well as the scission configurations of nuclear system with finite neck is investigated.

**Key words** nuclear fission, Langevin equation, kinetic energy and mass distribution of fission fragments

---

Received 22 August 1997 Revised 5 April 1998

<sup>\*</sup> Supported by the National Natural Science Foundation of China (19605002)