双参数变形多模玻色算符的代数结构及其应用(II)

于肇贤[1)]　张德兴
(大庆石油学院电子工程系　安达 151400)

刘　业　厚
(重庆石油高等专科学校　重庆　630042)

摘要　给出了双参数变形量子代数 $SU(2)_{q,s}$ 和 $SU(1,1)_{q,s}$ 的多模 Jordan-Schwinger 实现.

关键词　量子代数 $SU(2)_{q,s}$　量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$　多模，Jordan-Schwinger实现

1　引　言

近年来,量子代数、量子杨-Baxter方程的研究引起了物理学和数学工作者的极大兴趣. 人们发现,量子代数与当前理论物理与数学研究的一些热门课题,如统计可解模型[1]、量子反散射方法[2]、共形场论[3]等问题有着密切的联系. 为了更有效地研究量子代数在物理学中的应用,必须系统地发展它的表示理论. 类似于通常的简谐振子可以给出角动量理论的 Jordan-Schwinger实现,1989 年几位作者独立地提出了变形振子的概念[4—6],来给出最简单的量子代数 $SU(2)_q$ 的玻色子实现. 近年来,人们又进一步提出了双参数变形振子的概念[7,8],并藉此得到了量子代数 $SU(2)_{q,s}$ 和 $SU(1,1)_{q,s}$ 的 Jordan-Schwinger实现[7—9].

本文将构造满足量子 Heisenberg-Weyl 代数的双参数变形多模玻色算符,藉以给出双参数变形量子代数 $SU(2)_{q,s}$ 和 $SU(1,1)_{q,s}$ 的多模 Jordan-Schwinger实现.

2　双参数变形多模玻色算符及其代数结构

引入两组彼此独立的双参数变形玻色振子 $\{a_i^+, a_i, n_i^a\}(i = 1, 2, \cdots, k)$ 和 $\{b_j^+, b_j, n_j^b\}$

1997-01-28收稿

1) 胜利油田职工大学,山东东营,257004.

$(j=1,2,\cdots,k)$，它们满足[8]

$$a_i^+a_i=[n_i^a]_{q,s},\quad a_ia_i^+=[n_i^a+1]_{q,s},\quad [n_i^a,a_i^+]=a_i^+,\quad [n_i^a,a_i]=-a_i,\tag{1a}$$

$$a_ia_i^+-s^{-1}qa_i^+a_i=(sq)^{-n_i^a},\quad a_ia_i^+-(sq)^{-1}a_i^+a_i=(s^{-1}q)^{n_i^a}.\tag{1b}$$

$$b_j^+b_j=[n_j^b]_{q,s^{-1}},\quad b_jb_i^+=[n_j^b+1]_{q,s^{-1}},\quad [n_j^b,b_j^+]=b_j^+,\quad [n_j^b,b_j]=-b_j,\tag{2a}$$

$$b_jb_j^+-sqb_j^+b_j=(sq^{-1})^{n_j^b}.\tag{2b}$$

式中记号 $[x]_{q,s}=s^{1-x}[x]=s^{1-x}(q^x-q^{-x})/(q-q^{-1})$, $[x]_{q,s^{-1}}=s^{x-1}[x]$, x可以是算符或普通的数.

定义两个独立的双参数变形 k 模玻色算符 A_k和 B_k:

$$A_k=a_1a_2\cdots a_k\left\{\frac{[n_1^a]_{q,s}[n_2^a]_{q,s}\cdots[n_k^a]_{q,s}}{\min([n_1^a]_{q,s},[n_2^a]_{q,s},\cdots,[n_k^a]_{q,s})}\right\}^{-1/2},\tag{3}$$

$$B_k=b_1b_2\cdots b_k\left\{\frac{[n_1^b]_{q,s^{-1}}[n_2^b]_{q,s^{-1}}\cdots[n_k^b]_{q,s^{-1}}}{\min([n_1^b]_{q,s^{-1}},[n_2^b]_{q,s^{-1}},\cdots,[n_k^b]_{q,s^{-1}})}\right\}^{-1/2}.\tag{4}$$

其中记号$\min([n_1^a]_{q,s},[n_2^a]_{q,s},\cdots,[n_k^a]_{q,s})$表示在 k 个独立的双参数变形玻色振子 $\{a_i^+,a_i,n_i^a\}$ $(i=1,2,\cdots,k)$中，取 $[n_i^a]_{q,s}$作用于对应振子本征态时本征值最小的那个算符．记号$\min([n_1^b]_{q,s^{-1}},[n_2^b]_{q,s^{-1}},\cdots,[n_k^b]_{q,s^{-1}})$的意义与之相似．

容易证明

$$A_kA_k^+-s^{-1}qA_k^+A_k=(sq)^{-N_k^a},\quad A_kA_k^+-(sq)^{-1}A_k^+A_k=(s^{-1}q)^{N_k^a},\tag{5a}$$

$$[N_k^a,A_k^+]=A_k^+,\quad [N_k^a,A_k]=-A_k.\tag{5b}$$

$$B_kB_k^+-sqB_k^+B_k=(sq^{-1})^{N_k^b},\tag{6a}$$

$$[N_k^b,B_k^+]=B_k^+,\quad [N_k^b,B_k]=-B_k.\tag{6b}$$

式中

$$N_k^a=\min\{n_1^a,n_2^a,\cdots,n_k^a\},\quad N_k^b=\min\{n_1^b,n_2^b,\cdots,n_k^b\}.\tag{7}$$

式中记号 $\min\{\cdots\}$的意义与(3)、(4)两式中出现的记号相类似.

比较 $\{A_k^+,A_k,N_k^a\}$和 $\{a_i^+,a_i,n_i^a\}$，$\{B_k^+,B_k,N_k^b\}$和 $\{b_j^+,b_j,n_j^b\}$，可以发现，它们都分别满足量子 Heisenberg–Weyl代数的对易关系．$\{A_k^+,A_k,N_k^a\}$和 $\{B_k^+,B_k,N_k^b\}$分别等效于两个双参数变形玻色振子.

3　量子代数 $SU(2)_{q,s}$的多模 Jordan–Schwinger实现

为了构造出多模量子代数 $SU(2)_{q,s}$，引入下面的三角矩阵

$$L_k^+=\begin{bmatrix}(qs^{-1})^{(J_k)_0} & s\lambda(J_k)_+\\ 0 & (qs)^{-(J_k)_0}\end{bmatrix},\quad L_k^-=\begin{bmatrix}(qs)^{-(J_k)_0} & 0\\ -s\lambda(J_k)_- & (qs^{-1})^{(J_k)_0}\end{bmatrix},\tag{8}$$

式中$\lambda=q-q^{-1}$(以下同，不再注明)．将(8)式代入关系式

$$R(L_k^{\alpha}\otimes 1)(1\otimes L_k^{\beta}) = (1\otimes L_k^{\beta})(L_k^{\alpha}\otimes 1)R, \tag{9}$$

式中$(\alpha,\beta)=(+,+),(+,-)$和$(-,-)$. R为普适矩阵

$$R=\begin{bmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix}. \tag{10}$$

R满足杨–Baxter方程

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{11}$$

容易发现,L_k的元素满足多模量子代数$SU(2)_{q,s}$的对易关系式

$$[(J_k)_0,\ (J_k)_\pm] = \pm(J_k)_\pm,\quad s^{-1}(J_k)_+(J_k)_- - s(J_k)_-(J_k)_+ = s^{-2(J_k)_0}[2(J_k)_0]. \tag{12}$$

玻色子实现的方法是研究群表示理论的一个有效方法. 为了构造量子代数$SU(2)_{q,s}$的多模 Jordan–Schwinger实现,利用第2节给出的玻色振子$\{A_k^+, A_k, N_k^a\}$和$\{B_k^+, B_k, N_k^b\}$,可将$SU(2)_{q,s}$的生成元写为

$$(J_k)_+ = A_k^+B_k,\quad (J_k)_- = B_k^+A_k,\quad (J_k)_0 = \frac{1}{2}(N_k^a - N_k^b). \tag{13}$$

容易验证(13)式满足(12)式.

由(5)、(6)两式定义的振子的 Hilbert 空间基矢为

$$|n,\ n,\cdots\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]_{q,s}!}}(A_k^+)^n|0,0,\cdots\rangle, |\widetilde{m,m,\cdots}\rangle = \frac{1}{\sqrt{[m]_{q,s^{-1}}!}}(B_k^+)^m|0,0,\cdots\rangle。 \tag{14}$$

式中n,m均为非负整数,且有

$$|n,\ n,\cdots\rangle = |n\rangle_1|n\rangle_2\cdots|n\rangle_k,\quad |\widetilde{m,m,\cdots}\rangle = |\tilde m\rangle_1|\tilde m\rangle_2\cdots|\tilde m\rangle_k, \tag{15a}$$

$$|0,\ 0,\ \cdots\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2\cdots|0\rangle_k. \tag{15b}$$

在这组基矢上,算符A_k^+, A_k, N_k^a以及B_k^+, B_k, N_k^b的作用分别为

$$A_k^+|n,n,\cdots\rangle = \sqrt{[n+1]_{q,s}}\,|n+1,n+1,\cdots\rangle,$$

$$A_k|n,n,\cdots\rangle = \sqrt{[n]_{q,s}}\,|n-1,n-1,\cdots\rangle, \tag{16a}$$

$$N_k^a|n,n,\cdots\rangle = n|n,n,\cdots\rangle. \tag{16b}$$

$$B_k^+|\widetilde{m,m,\cdots}\rangle = \sqrt{[m+1]_{q,s^{-1}}}\,|\widetilde{m+1,\ m+1,\cdots}\rangle,$$

$$B_k|\widetilde{m,m,\cdots}\rangle = \sqrt{[m]_{q,s^{-1}}}\,|\widetilde{m-1,\ m-1,\cdots}\rangle, \tag{17a}$$

$$N_k^b|\widetilde{m,m,\cdots}\rangle = m|\widetilde{m,m,\cdots}\rangle. \tag{17b}$$

对于每一个量子数$j=0,\dfrac{1}{2},1,\cdots$,量子代数$SU(2)_{q,s}$的多模么正不可约表示的基矢为

$$|j,m;j,m;\cdots\rangle = |j+m,j+m,\cdots\rangle\otimes|\widetilde{j-m,\ j-m,\cdots}\rangle =$$

$$\frac{(A_k^+)^{j+m}}{\sqrt{[j+m]_{q,s}!}}|0,0,\cdots\rangle\otimes\frac{(B_k^+)^{j-m}}{\sqrt{[j-m]_{q,s^{-1}}!}}|0,0,\cdots\rangle. \tag{18}$$

式中 $|j,m;j,m;\cdots\rangle=|j,m\rangle_1|j,m\rangle_2\cdots|j,m\rangle_k$. m 是整数或半整数，$-j\leqslant m\leqslant j$. 在这个基矢上，生成元 $(J_k)_0$, $(J_k)_\pm$ 的作用分别为

$$(J_k)_+|j,m;j,m;\cdots\rangle=\sqrt{[j-m]_{q,s^{-1}}[j+m+1]_{q,s}}\,|j,m+1;j,m+1;\cdots\rangle, \tag{19a}$$

$$(J_k)_-|j,m;j,m;\cdots\rangle=\sqrt{[j+m]_{q,s}[j-m+1]_{q,s^{-1}}}\,|j,m-1;j,m-1;\cdots\rangle, \tag{19b}$$

$$(J_k)_0|j,m;j,m;\cdots\rangle=m|j,m;j,m;\cdots\rangle. \tag{19c}$$

至此，(13)、(18)式即为量子代数 $SU(2)_{q,s}$的多模 Jordan–Schwinger实现.

4　量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$的多模 Jordan–Schwinger实现

为了构造出多模量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$的正分立和负分立的生成元，引入三角矩阵

$$(M_k^{a(b)})^+=\begin{bmatrix}(qs^{-1})^{(L_k^{a(b)})_0} & s\lambda(L_k^{a(b)})_+\\ 0 & (qs)^{-(L_k^{a(b)})_0}\end{bmatrix},\quad (M_k^{a(b)})^-=\begin{bmatrix}(qs)^{-(L_k^{a(b)})_0} & 0\\ s^{-1}\lambda(L_k^{a(b)})_- & (qs^{-1})^{(L_k^{a(b)})_0}\end{bmatrix}. \tag{20}$$

式中上标 a、b 分别代表正分立和负分立情形，为不致与(7)式中出现的上标混淆，在以下的讨论中，正分立用 (a) 表示，负分立用 (b) 表示. 将 (20)式代入下面的关系式

$$R^{(a)}\{(M_k^{(a)})^\alpha\otimes1\}\{1\otimes(M_k^{(a)})^\beta\}=\{1\otimes(M_k^{(a)})^\beta\}\{(M_k^{(a)})^\alpha\otimes1\}R^{(a)}, \tag{21a}$$

$$R^{(b)}\{(M_k^{(b)})^\alpha\otimes1\}\{1\otimes(M_k^{(b)})^\beta\}=\{1\otimes(M_k^{(b)})^\beta\}\{(M_k^{(b)})^\alpha\otimes1\}R^{(b)}. \tag{21b}$$

式中 $(\alpha,\beta)=(+,+),(+,-)$和$(-,-)$. $R^{(a)}$、$R^{(b)}$为普适矩阵(与(10)式相同)，它们分别满足(11)式. 容易发现，$M_k^{(a)}$、$M_k^{(b)}$的元素满足多模量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$的对易关系

$$\begin{aligned}&[(L_k^{(a)})_0,(L_k^{(a)})_\pm]=\pm(L_k^{(a)})_\pm,\\ &s^{-1}(L_k^{(a)})_+(L_k^{(a)})_- - s(L_k^{(a)})_-(L_k^{(a)})_+ = -s^{-2(L_k^{(a)})_0}[2(L_k^{(a)})_0].\end{aligned} \tag{22a}$$

$$\begin{aligned}&[(L_k^{(b)})_0,(L_k^{(b)})_\pm]=\pm(L_k^{(b)})_\pm,\\ &s^{-1}(L_k^{(b)})_+(L_k^{(b)})_- - s(L_k^{(b)})_-(L_k^{(b)})_+ = -s^{-2(L_k^{(b)})_0}[2(L_k^{(b)})_0].\end{aligned} \tag{22b}$$

为了得到多模量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$的生成元，再定义两个彼此独立的多模双参数变形玻色算符 C_k和 D_k:

$$C_k=c_1c_2\cdots c_k\left\{\frac{[n_1^c]_{q,s}[n_2^c]_{q,s}\cdots[n_k^c]_{q,s}}{\min([n_1^c]_{q,s},[n_2^c]_{q,s},\cdots,[n_k^c]_{q,s})}\right\}^{-1/2}, \tag{23}$$

$$D_k=d_1d_2\cdots d_k\left\{\frac{[n_1^d]_{q,s^{-1}}[n_2^d]_{q,s^{-1}}\cdots[n_k^d]_{q,s^{-1}}}{\min([n_1^d]_{q,s^{-1}},[n_2^d]_{q,s^{-1}},\cdots,[n_k^d]_{q,s^{-1}})}\right\}^{-1/2}. \tag{24}$$

式中

$$c_i^+ c_i = [n_i^c]_{q,s},\ c_i c_i^+ = [n_i^c + 1]_{q,s},\ [n_i^c, c_i^+] = c_i^+,\ [n_i^c, c_i] = -c_i, \tag{25a}$$

$$c_i c_i^+ - s^{-1} q c_i^+ c_i = (sq)^{-n_i^c},\ c_i c_i^+ - (sq)^{-1} c_i^+ c_i = (s^{-1}q)^{n_i^c}, \tag{25b}$$

$$d_j^+ d_j = [n_j^d]_{q,s^{-1}},\ d_j d_j^+ = [n_j^d + 1]_{q,s^{-1}},\ [n_j^d, d_j^+] = d_j^+,\ [n_j^d, d_j] = -d_j, \tag{26a}$$

$$d_j d_j^+ - sq d_j^+ d_j = (sq^{-1})^{n_j^d}. \tag{26b}$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, k$. 容易证明

$$C_k C_k^+ - s^{-1} q C_k^+ C_k = (sq)^{-N_k^c},\ C_k C_k^+ - (sq)^{-1} C_k^+ C_k = (s^{-1}q)^{N_k^c}, \tag{27a}$$

$$[N_k^c, C_k^+] = C_k^+,\ [N_k^c, C_k] = -C_k. \tag{27b}$$

$$D_k D_k^+ - sq D_k^+ D_k = (sq^{-1})^{N_k^d}, \tag{28a}$$

$$[N_k^d, D_k^+] = D_k^+,\ [N_k^d, D_k] = -D_k. \tag{28b}$$

式中

$$N_k^c = \min\{n_1^c, n_2^c, \cdots, n_k^c\},\ N_k^d = \min\{n_1^d, n_2^d, \cdots, n_k^d\}. \tag{29}$$

于是,可以构造出量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$ 的多模正分立、负分立的生成元

$$(L_k^{(a)})_+ = s^{-1} A_k^+ C_k^+,\quad (L_k^{(a)})_- = s^{-1} C_k A_k,\quad (L_k^{(a)})_0 = \frac{1}{2}(N_{k,a}^{(a)} + N_{k,c}^{(a)} + 1), \tag{30a}$$

$$(L_k^{(b)})_+ = s B_k D_k,\quad (L_k^{(b)})_- = s D_k^+ B_k^+,\quad (L_k^{(b)})_0 = -\frac{1}{2}(N_{k,b}^{(b)} + N_{k,b}^{(b)} + 1). \tag{30b}$$

式中记号

$$N_{k,a}^{(a)} = N_k^a,\quad N_{k,c}^{(a)} = N_k^c,\quad N_{k,b}^{(b)} = N_k^b,\quad N_{k,d}^{(b)} = N_k^d. \tag{31}$$

$N_k^a, N_k^b, N_k^c, N_k^d$ 的表达式见(7)式及(29)式. 容易验证 (30)式满足(22)式.

量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$ 有两个无穷分立的多模不可约么正表示

$$|l, r; l, r; \cdots\rangle^a = |r-l-1; r-l-1; \cdots\rangle^a \otimes |r+l; r+l; \cdots\rangle^a, \tag{32a}$$

$$|l, r; l, r; \cdots\rangle^b = |-r-l-1; -r-l-1; \cdots\rangle^b \otimes |-r+l; -r+l; \cdots\rangle^b, \tag{32b}$$

式中 $|l, r; l, r; \cdots\rangle$ 的意义与第 3 节中的 $|j, m; j, m; \cdots\rangle$ 相同. 这里 $l = -\frac{1}{2}, -1, \cdots$. (32a)中 $r \geqslant -l > 0$,(32b)中 $r \leqslant l < 0$.

(30)式对(32)式的作用分别为

$$(L_k^{(a)})_+ |l, r; l, r; \cdots\rangle^a = s^{-1}\sqrt{[r-l]_{q,s}[r+l+1]_{q,s}}\ |l, r+1; l, r+1; \cdots\rangle^a, \tag{33a}$$

$$(L_k^{(a)})_- |l, r; l, r; \cdots\rangle^a = s^{-1}\sqrt{[r+l]_{q,s}[r-l-1]_{q,s}}\ |l, r-1; l, r-1; \cdots\rangle^a, \tag{33b}$$

$$(L_k^{(a)})_0 |l, r; l, r; \cdots\rangle^a = r|l, r; l, r; \cdots\rangle^a. \tag{33c}$$

$$(L_k^{(b)})_+ |l, r; l, r; \cdots\rangle^b = s\sqrt{[-r-l-1]_{q,s^{-1}}[-r+l]_{q,s^{-1}}}\ |l, r+1; l, r+1; \cdots\rangle^b, \tag{34a}$$

$$(L_k^{(b)})_- |l, r; l, r; \cdots\rangle^b = s\sqrt{[-r-l]_{q,s^{-1}}[-r+l+1]_{q,s^{-1}}}\ |l, r-1; l, r-1; \cdots\rangle^b, \tag{34b}$$

$$(L_k^{(b)})_0 |l, r; l, r; \cdots\rangle^b = r|l, r; l, r; \cdots\rangle^b. \tag{34c}$$

这样，(30)、(32)式就是量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$的多模 Jordan-Schwinger实现．

5 结 束 语

本文构造了满足量子 Heisenberg-Wegl代数的双参数变形多模玻色算符，这种算符和双参数变形振子的湮没算符具有同样的性质．特别地，当 $s\to 1, k=2$ 时，这种算符即为文献 [10]所研究过的．可以预言，有关李代数 $SU(2)$、$SU(1,1)$和谐振子的许多经典结果可以移植到双参数变形的多模情况．关于这方面的工作我们将另文讨论．这对于发展量子代数在物理学中的应用将是有益的．

参 考 文 献

[1] R. J. Baxter. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics (Academic Press, London, 1982)

[2] L. D. Faddeev. Sov. Sci. Rev. Maths., 1981, **C1:** 107

[3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov. Nucl. Phys., 1984, **B241:** 333

[4] A. J. Macfarlane. J. Phys., 1989, **A22:** 4581

[5] L. C. Biedenharn. J. Phys., 1989, **A22:** L873

[6] C. P. Sun, H. C. Fu. J. Phys., 1989, **A22**: L983

[7] R. Chakrabarti, R. Jagannathan. J. Phys., 1991, **A24**: L711

[8] Jing Sicong. Journal of China University of Science and Technology (in Chinese), 1993, **23**: 55; Mod. Phys. Lett., 1993, **A8**: 543

[9] S. C. Jing, Frank Cuypers. Commun. Theor. Phys., 1993, **19**: 495

[10] A. I. Solomon, J. Katriel. J. Phys., 1993, **A26**: 5443

Algebraic Structure of Two-Parameter Deformed Multi-mode Bose Operators and Their Applications (II)

Yu Zhaoxian　Zhang Dexing

(Department of Electronic Engineering, Daqing Institute of Petroleum, Anda 151400)

Liu Yehou

(Chongqing petroleum Advanced College, Chongqing 630042)

Abstract The multi-mode Jordan-Schwinger realizations of the doubleparameter deformed quantum algebras $SU(2)_{q,s}$ and $SU(1,1)_{q,s}$ are given.

Key words quantum algebra $SU(2)_{q,s}$, quantum algebra $SU(1,1)_{q,s}$, multi-mode, Jordan-Schwinger realization

Received 28 January 1997