

Fermi-Dirac 关联与 $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ 分布

戴启润 李积梅 马占卿

(信阳师范学院物理系 河南 464000)

赵 树 松

(云南大学物理系 昆明 650091)

1995-10-30 收稿

摘 要

根据非微扰理论提出一种源分布—— $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ 分布。由此计算两质子的 Fermi-Dirac 关联。拟合的曲线与实验数据吻合得较好，这是 $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ 分布比 Gauss 源分布优越之处。由全同质子的 F-D 关联计算出发射源半径及 Fermi 场的反常量纲。

关键词 多重强子产生，强子发射源，Fermi-Dirac 关联， $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ 分布。

1 引 言

在中低能 ($E/A < 200$ MeV) 核反应研究中，由于多重产生的截面比较小，往往不能通过 π 介子关联研究发射源的时空结构。实验表明，出射粒子中核子(主要为质子)和复合轻粒子所占比例增大。在此情况下，研究两质子之间关联，对于揭示中低能反应的物理机制、发射源的时空结构就具有十分重要的意义。

实验上，两 Fermi 子关联函数 $R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 可以用联合产额 (coincidence yield) $Y_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ 和单粒子产额 (single-particle yield) $Y_1(\mathbf{p}_1)$ 和 $Y_2(\mathbf{p}_2)$ 来定义

$$\sum Y_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = c_{12} [1 + R(\mathbf{p}, \mathbf{q})] \sum Y_1(\mathbf{p}_1) Y_2(\mathbf{p}_2), \quad (1)$$

式中 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 是粒子对的总动量和相对动量。

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{q} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) / 2, \quad (2)$$

c_{12} 是归一化常数。它通常由对大的 q 要求 $R(q) = 0$ 来决定。为了获得足够的统计，方程 (1) 中求和必须对所有的探测器以及符合特定限制条件的粒子能量组进行。

实验上主要研究对 \mathbf{q} 角积分后的 $R(q)$ ，即对 \mathbf{q} 的方位角积分，而无需对 \mathbf{p} 的方位角积分。由此，(1) 式又可写为

$$R(q) + 1 = c'_{12} \sum Y_{12}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) / \sum Y_1(\mathbf{p}_1) Y_2(\mathbf{p}_2), \quad (3)$$

理论上, 代替两单粒子产额之积 $\sum Y_1(p_1) \cdot Y_2(p_2)$, 往往采用混合事例方法, 引入一个“无关”产额 $Y_{12}^*(p_1, p_2)$, 即从事例 n 中取粒子 1, 从事例 $n+k$ 中取粒子 2, k 是任意的. 这样, 关联函数变为

$$R(q)+1=C_{12}^* Y_{12}(q) / Y_{12}^*(q), \quad (4)$$

式中 $Y_{12}(q)$ 和 $Y_{12}^*(q)$ 是特定限制条件积分后的联合产额与无关产额. C_{12}^* 是相应的归一化常数.

两质子关联函数的形状反映了 Pauli 不相容原理和质子-质子相互作用共同效应. 1983 年, Lynch et al.^[1] 首次测量了重离子反应中两质子关联函数. 所测关联的大小表明, 它强烈地依赖发射质子对的总动能.

1986 年, Pochodzalla et al.^[2] 研究了 $^{14}\text{N}+^{197}\text{Au}$ 反应的质子关联, 单位核子入射能量 $E/A=35\text{ MeV}$. 关联函数通过(3)式计算. 图 1(a) 给出了实验数据. 能量限 $E_1+E_2=24-50, 50-75, 75-100\text{ MeV}$, E_1 和 E_2 的阈能 $\geq 12\text{ MeV}$. 由图 1 可以看出, 关联

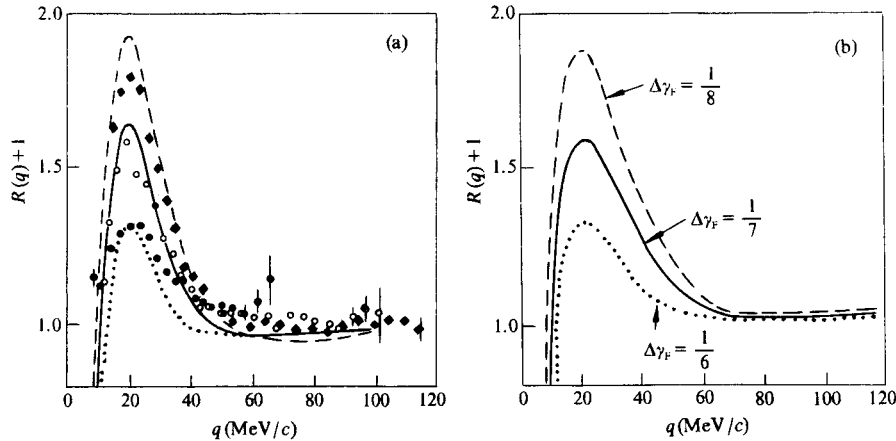


图 1 $\text{N}+\text{Au}$ 反应中 pp 关联的实验数据与拟合

(a) Gauss 源拟合 (b) $Q^{-1}K_v(Q)$ 拟合

$^{197}\text{Au} (^{14}\text{N}, \text{pp}), E/A=35\text{ MeV}, E_1+E_2$: \blacklozenge 75—100 MeV; \circ 50—75 MeV; \bullet 24—50 MeV,

r_0 : --- 3.5 fm; — 4 fm; 5 fm.

函数的极大值在 $q=20\text{ MeV}/c$ 处, 它是由两联合质子间独态 S 波的引力作用导致的. 在小的相对动量 $q \approx 0$ 附近, 关联的极小值是 Pauli 不相容原理和质子对之间库仑斥力作用共同效应. 关联函数极大值的大小由反应区域的体积决定. 即由关联的极大值可推算源半径. 由图 1 还可发现, 关联函数的极大值随质子对总动能 E_1+E_2 的增大而增大. 图 1(a) 中的三条曲线是理论上的关联函数, 它是由忽略寿命的 Gauss 模型拟合的. 其分布函数为

$$\rho(r)=\rho_0 \exp(-r^2/r_0^2), \quad (5)$$

对应的 Gauss 源半径 $r_0=3.5; 4.0; 5.0\text{ fm}$.

由图 1(a) 可以看出, Gauss 源拟合的关联函数与实验数据还是有较大的差别. 近年

来, 几乎所有中能核反应的实验结果与模型拟合基本上与 $N+Au$ 反应类似.

2 全同质子的 Fermi-Dirac 关联

在 $a+b \rightarrow N$ 强子反应中, 强子产生几率正比于截腿 Green 泛函 $G^{(N+2)}(x_{ab}, x_B, x_F)$ 的模方^[3]. 其中, $x_B = x_1, x_2, \dots, x_{N_B}$, 为产生强子中 N_B 个 Bose 子坐标; $x_F = x_1, x_2, \dots, x_{N_F}$, 为 N_F 个 Fermi 子坐标. 且 $N_B + N_F = N$. 对除了 i, k 标记的强子之外的其它所有坐标积分, 得到两点截腿 Green 泛函 $G^{(2)}(x_i, x_k)$.

为了研究干涉效应, 考虑发射强子的非点状结构的局域效应, 如图 2 所示. 写出 $G^{(2)}(x_i, x_k)$

$$\begin{aligned} & e^{-i[p_1 \cdot (x_i + x_A) + p_2 \cdot (x_k + x_B)]} G^{s, \tau}(x_i, x_k) \\ &= \iint G^{s, \tau}(p'_i - p_1, p'_k - p_2) e^{-i[p'_i \cdot (x_i + x_A) + p'_k \cdot (x_k + x_B)]} d^D p'_i d^D p'_k, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $p'_i = p_i + p_1$, $p'_k = p_k + p_2$; s, τ 是强子的自旋与同位旋. $G^{(2)}(p)$ 是 $G^{(2)}(x)$ 的 Fourier 变换. 从 $G^{(2)}(p_1, p_2)$ 出发, 用中值定理, 得到

$$\begin{aligned} & G^{s, \tau}(p_1, p_2) \delta^D(x_i + x_A) \delta^D(x_k + x_B) \\ &= (2\pi)^{-D} G^{s, \tau}(x_i + X_A, x_k + x_B) \\ & \cdot e^{-i[p_1 \cdot (x_i + x_A) + p_2 \cdot (x_k + x_B)]}, \end{aligned} \quad (7)$$

D 是闵氏空间维度.

考虑到多重产生中强子非点状结构, 必须用波包代替平面波. 进一步考虑量子场论中广义函数表述必须从单粒子的真空幅出发,

经过简单的数学运算, 再用非微扰场论中 LSZ 公式, 立即得到枚举两粒子产生几率

$$\begin{aligned} |G^{s, \tau}(p_1, p_2)|^2 &= \iint |G^{(2)}(x_{12})|^2 d^D x_{12} \\ &+ \frac{(-1)^{2s}}{2s+1} \iint |G^{(2)}(x_{12})|^2 |G_\Lambda(x_{AB})|^2 e^{-iQ \cdot (x_{12} + x_{AB})} d^D x_{12} d^D x_{AB}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $Q^\mu = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} (p_1 - p_2)_\mu (p_1 - p_2)_\nu$, $g_{\mu\nu}$ 为闵氏度规张量. $x_{12} = x_i - x_k$, $x_{AB} = x_A - x_B$; $G_\Lambda(x_{AB})$ 表示 Fresnel 干涉效应(图 2). 测不准关系显示 $(x_{12})_{\min} = [(2\Lambda)^2 + (x_{AB})_{\max}^2]^{1/2}$, 能量守恒要求 $\text{tg} \frac{\theta}{2} \geq \pi / |Q^\mu| \Lambda$.

注意 $\delta^D(x)$ 的维度, 有

$$|G_\Lambda(x_{AB})|^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^D \frac{3\Lambda_I^{1-4\gamma}}{2(x_{AB}^2 + \Lambda_I^2 \pm i0)^{\alpha_I^2}} | \langle 0 | \psi_1^{(0)} \psi_2^{(0)} | p_1 p_2 \rangle_{s, \tau} |^2 \delta_{ss'} \delta_{\tau\tau'}, \quad (9)$$

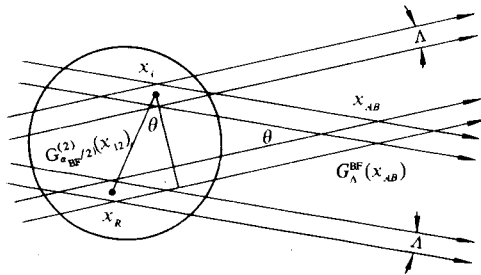


图 2 Fresnel 干涉的局域限制

式中 $\alpha_\Lambda^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} (\alpha_\Lambda)_\mu (\alpha_\Lambda)_\nu = (D+1)/2 + 2\gamma(g_R)$, $\gamma(g_R)$ 是量子场的反常量纲. $\Lambda_I = \Lambda\alpha_\Lambda$, ψ_1 , ψ_2 是场算子. 从(8)、(9)两式, 可以得到当 $\Lambda_\mu \rightarrow 0$ 时, 非点状结构源的 Fresnel 干涉的局域极限

$$\iint |G_\Lambda(x_{AB})|^2 e^{-iQ \cdot x_{AB}} d^D x_{AB} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - 2\gamma\right)} [(\Lambda_I Q)^2 \mp i0]^{2\gamma}, \quad (10)$$

将(10)式及 $G^{(2)}(Q)$ 的显示表式^[4]代入(8)式, 同时注意到几率及能量守恒, 就可得到全同强子的干涉截面为

$$\begin{aligned} \frac{[\sigma_T(h^\pm h^\pm)]^{-1}}{N(N-1)} \frac{d^D \sigma_N(h^\pm h^\pm)}{d^D(Q/\langle Q \rangle)} &= \mathcal{I}(Q) \iint |G^{(2)}(x_{12})|^2 d^D x_{12} \\ &+ \frac{(-1)^{2s}}{2s+1} \cdot \frac{2^{1-\nu} \cdot \pi}{\Gamma(\nu)} \cdot \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - 2\gamma\right)} \left(\beta \frac{Q}{\langle Q \rangle}\right)^{4\nu+\nu} K_\nu\left(\beta \frac{Q}{\langle Q \rangle}\right), \quad (11) \end{aligned}$$

式中 $\nu = \alpha - (D-1)$, σ_N 是产生截面, $\sigma_T = \sum_N \sigma_N$ 为总截面. $\beta = \Lambda_I / \langle Q \rangle$, N 是多重数. K_ν 是第二类变形 Bessel 函数, 这一分布又简称 $Q^{-\nu}K_\nu(Q)$ 分布^[3]. 显然, (11)式是 Lorentz 不变的.

对 Bose 子, (11)式中积分为一单位函数. 由此即得 Bose-Einstein 关联^[3].

对 Fermi 子, (11)式中积分比较复杂. 原因在于 Pauli 原理禁止 $x_{12} = \{0_+, 0_-\}$ 支承集合上的组态 $\{x_{12}, s_1, s_2\} = \{0, \uparrow\uparrow\}$. 此时积分可分成两部分: $x_{12} \neq 0$ 和 $x_{12} = 0$. 对后一部分可在 $D-1$ 维流形中进行. 经过这些分析和计算, 就可以得到 $(p^\pm p^\pm)$ 对的 F-D 关联截面

$$\begin{aligned} \frac{[\sigma_T(p^\pm p^\pm)]^{-1}}{N(N-1)} \frac{d^D \sigma_N(p^\pm p^\pm)}{d^D(Q/\langle Q \rangle)} \\ = \frac{2^{-2\gamma_F}}{\Gamma(1-2\gamma_F)} - \frac{\pi \cdot 2^{\frac{1}{2}-2\gamma_F} \Gamma(1-2\gamma_F)}{\Gamma(\nu_F) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - 2\gamma_F\right)} \left(\beta_F \frac{Q}{\langle Q \rangle}\right)^{4\gamma_F+\nu_F} K_{\nu_F}\left(\beta_F \frac{Q}{\langle Q \rangle}\right), \quad (12) \end{aligned}$$

式中 γ_F 是 Fermi 场的反常量纲, $\beta_F = 2\Gamma(2+2\gamma_F)\Gamma(1-2\gamma_F) / \Gamma\left(\frac{3}{2} + 2\gamma_F\right)$. 对于渐近自由的量子场, 有 $\gamma_B < 0$ 而 $\gamma_F > 0$. 例如量子色动力学(QCD)中, $-3\gamma_B = \alpha_s$, γ_F 的最大值是 $3\alpha_s = 0.27 \pm 0.09$ 就证明了这一点. 对相互作用量子场, γ_F 往往是负的. 假定采用异电荷对作参考样本. 那么, 从上式就可得到 $\sigma(p^\pm p^\pm)$ 与 $\sigma(p^\pm p^\mp)$ 之比, 即 F-D 关联的枚举比率

$$R(Q)+1 = \frac{\Gamma(v_F) \cdot \beta_F}{[\Gamma(v_F/2)]^2} \left[\frac{1}{2} \Delta\gamma_F + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{\sqrt{\pi/3}}{\Delta\gamma_F} x_Q^2 Ai(x_Q) \right], \quad (13)$$

这里 $Ai(x)$ 是 Airy 函数; Q 是三维动量差, $Q = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| = 2q$, $\beta_F = 4 / (3\pi\Delta\gamma_F)$, $x_Q = (3\beta_F Q / 2\langle Q \rangle)^{2/3}$, $\gamma_F(g_R) = -(0.45 \pm 0.05)$, $\Delta\gamma_F = (D-2) / 2 + 2\gamma_F$, 它反映了反常量纲的改变, $v_F = \frac{1}{2} + 2\gamma_F$.

$Ai(z)$ 与 $K_\nu(z)$ 的关系为

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\zeta); \quad \zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}, \quad (14)$$

上式中令 z 为 x_Q , 有

$$\zeta = \frac{2}{3} x_Q^{3/2} = \beta_F Q / \langle Q \rangle, \quad (15)$$

将(15)代入(13)式即得

$$R(Q)+1 = \frac{\Gamma(v_F)\beta_F}{[\Gamma(v_F/2)]^2} \left[\frac{1}{2} \Delta\gamma_F + c' \zeta^{5/3} K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \right], \quad (16)$$

其中 $c' = 0.07297 / \Delta\gamma_F$.

为了使(16)式能与实验数据比较, 并符合实验上归一化要求, 将(16)式改写为

$$R(Q) = c_\infty \zeta^{5/3} K_{\frac{1}{3}}(\zeta), \quad (17)$$

c_∞ 是归一化常数, 它使 $Q \rightarrow \infty$ 时, $R(Q) \rightarrow 0$. 特别应注意的是, 实验上往往测的是比率 $R(Q)+1$, 这一点作图时尤应留心.

应用(17)拟合实验数据时, 由于 γ_F 有一个变化范围, $\Delta\gamma_F$ 也有一个取值范围. 同时由 $\langle Q \rangle$ 可计算出源半径.

用(17)式拟合 $E/A=25$ MeV 下 O+Au 反应的 pp 关联数据^[1], 其结果十分漂亮.

所选参数为 $\Delta\gamma_F = \frac{1}{6}$, $c_\infty = 1.8$, $\langle Q \rangle = 42.4$ MeV / c . 图 3 是拟合的 pp 关联曲线. 由

$$r_0 = \pi / 3\langle Q \rangle, \quad (18)$$

算出 $r_0 = 4.65$ fm.

用(17)式拟合 $E/A=35$ MeV 下 N+Ag 反应的数据^[5]. 所选参数为 $\Delta\gamma_F = \frac{1}{6}$, $c_\infty = 0.744$, $\langle Q \rangle = 51$ MeV / c . 图 4 是拟合的 pp 关联曲线. 由图可以看出, 在 $q=30-50$ MeV / c 一段符合得差些, 其余部分符合得很好. 由此算出 $r_0 = 3.9$ fm.

用(17)式拟合 $E/A=35$ MeV 下的 N+Au 反应中 pp 关联数据^[2]. 如前所述, 数据是在 $E_1+E_2=24-50, 50-75, 75-100$ MeV 下得到的. Pochodzalla et al. 用 Gauss 模型拟合出三条曲线, 可以看出符合得不太好, 如图 1(a) 所示. 我们也拟合出三条曲线, 为便于比较, 将其与图 1(a) 放在一起, 即图 1(b). 所选参数分别为: (1)

$\Delta\gamma_F = \frac{1}{8}$, $\langle Q \rangle = 79.2 \text{ MeV}/c$, 算出 $r_0 = 2.5 \text{ fm}$; (2) $\Delta\gamma_F = \frac{1}{7}$, $\langle Q \rangle = 59.4 \text{ MeV}/c$, 算出 $r_0 = 3.3 \text{ fm}$; (3) $\Delta\gamma_F = \frac{1}{6}$, $\langle Q \rangle = 42.4 \text{ MeV}/c$, 算出 $r_0 = 4.65 \text{ fm}$.

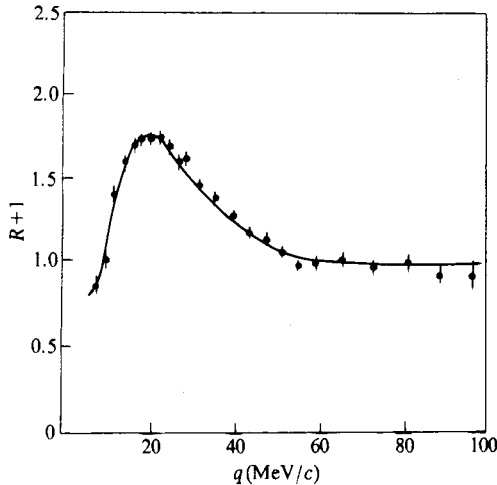


图 3 O+Au 反应的 pp 关联

$^{16}\text{O} + ^{197}\text{Au} \rightarrow 2p + x$, 400 MeV, $\nu' \tau = 0$.

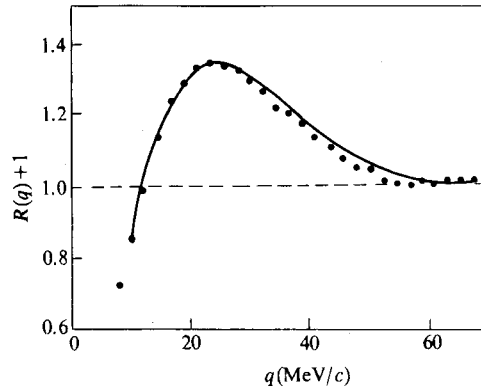


图 4 N+Ag 反应的 pp 关联

$E/A = 35 \text{ MeV}$

与图 1(a) 比较可知, 拟合的曲线在 $q = 30 - 50 \text{ MeV}/c$ 之间与数据吻合得稍差些, 而在其余区间均比 Gauss 模型拟合得更好些. 前面的图 4 也有类似情况, 这说明公式(17)尚有待于进一步改进.

3 结论与讨论

(1) 三十多年来, 还不清楚强子发射源究竟是混沌的(象热源), 还是相干的(象激光). 通过动力学关联研究, 即通过研究发射强子的非点状结构局域效应可以得出与实验数据吻合较好的分布—— $Q^{-1}K_v(Q)$ 分布, 由此可初步得出结论: 强子发射源更可能是相干的. 这一点与微观体系的波粒二象性是一致的.

(2) 通过 pp 对的 F-D 关联计算, 得出核-核反应源半径为 3—5 fm. 与其它模型计算结果(如 Gauss 模型)相符.

(3) 由质子对的 F-D 关联确定 $\gamma_F = -(0.45 \pm 0.05)$, 这是一个较大数值. 此外, 质子对的 F-D 关联对 Fermi 场的反常量纲 γ_F 及其变化 $\Delta\gamma_F$ 十分敏感, 这应该是量子场反常量纲及其改变存在的证据之一. 这一结论与重整化的量子场理论(如重正化群的 Callan-Symanzik 方程等)是一致的.

(4) $Q^{-1}K_v(Q)$ 分布来源于非微扰场论, 它不仅可计算两粒子枚举的 F-D 关联, 也可以计算两全同 Bose 子对的 Bose-Einstein 关联^[9], 且与实验数据吻合得较好, 这不仅证明了 $Q^{-1}K_v(Q)$ 分布的正确性, 亦说明了该分布的普适性.

此外,从本文可以发现,在关联极值点 $\langle Q \rangle$ 附近,即 $Q > \langle Q \rangle$ 的一个小区域,理论与数据有一些差距,且具有共性,这表明理论尚有待于深入研究与改进.我们认为,由于 $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ 分布主要是从Fresnel干涉的局域效应出发得到的,虽然考虑了Pauli原理、末态相互作用,但作为动力学关联,亦应考虑核内核子的运动状态.这一点值得深入探讨.

参 考 文 献

- [1] Lynch *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 1850.
- [2] Pochodzalla *et al.*, *Phys. Lett.*, **B161** (1986) 275.
- [3] 戴启润 赵树松, *物理学报*, **44** (1995) 1203.
- [4] S. S. Zhao *et al.*, *KEXUE TONGBAO*, **31** (1986) 371.
- [5] Cebra *et al.*, *Phys. Lett.*, **B227** (1989) 336.

Fermi-Dirac Correlation and $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ Distribution

Dai Qirun Li Jimei Ma Zhanqing

(Department of Physics, Xinyang Normal College, Henan 464000)

Zhao Shusong

(Department of Physics, Yunnan University, Kunming 650091)

Received 30 October 1995

Abstract

The Fermi-Dirac correlation of identical protons is studied. Based on the non-perturbative theory of quantum fields, we put forward a kind of source distribution—the $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ distribution. The Fermi-Dirac correlation of $(p^{\pm}-p^{\pm})$ -pairs is calculated from this distribution. The fitted curves agree with experimental data. The $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ distribution has more advantages than the Gauss Source distribution. The radii of the source emitting hadrons and the anomalous dimensions of the Fermi field are calculated from the Fermi-Dirac correlation of identical protons.

Key words multihadron production, source emitting hadrons, Fermi-Dirac correlation, $Q^{-\nu}K_{\nu}(Q)$ distribution.