

高能碰撞二维相空间自仿射分形的 解析研究*

林海¹⁾ 张阳 刘连寿

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

1995-01-12 收稿

摘 要

对二维相空间的自仿射 α 模型, 进行详细的讨论, 导出了 Hurst 指数 $H=0.5$ 的自仿射分形按自相似统计的归一化几率矩 C_N^2 和 C_N^3 的解析表达式. 通过解析计算模型基元几率的各阶矩以及相关矩, 得到在自相似统计下的 Levy 稳定性指数, 并将它和原模型的 Levy 指数进行比较. 用 Monte Carlo 模拟验算解析计算的结果, 发现两者一致, 同时也定性地解释了 NA22 实验组关于二维相空间的最新实验数据.

关键词 高能碰撞, 间歇现象, Levy 稳定性, 自仿射分形, 随机级联模型.

1 引 言

在高能碰撞多重产生中, 作为相空间中粒子分布具有分形结构的信号, 归一化阶乘矩 F_q 随相空间元胞的减小有奇异标度行为^[1]

$$F_q \sim \delta^{-\varphi_q}. \quad (1)$$

这已经受到实验的广泛检验^[2]. 几乎所有的实验组都发现, 标度率 (1) 式并不严格成立: 当相空间分辨率很小时, 一维的 $\ln F_q - \ln(1/\delta)$ 曲线趋于饱和, 而高维中此曲线上翘, 不符合 (1) 式所预言的直线行为. 这促使人们提出相空间的分形可能是自仿射的^[3]. 同时, 为了符合不同维数的实验及模型结果, 人们把 (1) 式推广, 得到一个新的关于阶乘矩的经验公式^[4]

$$F_q(\delta) = b_q [g(\delta)]^{\varphi_q}. \quad (2)$$

其中 $g(\delta)$ 是一个不依赖于 q 的任意函数, 由此得到

$$\ln F_q(\delta) = \ln b_q + \frac{\varphi_q}{\varphi_2} \ln F_2 = \bar{b}_q + r_q \ln F_q, \quad (3)$$

* 国家自然科学基金、国家教委优秀年轻教师基金和武汉市青年科技晨光计划资助.

1) 永久通信处: 山西省雁北师范学院物理系, 大同 037000.

r_q 与相空间分形维数成正比. 按自相似级联过程的 Levy 稳定性理论^[5-7], r_q 的值还可以与 Levy 指数 μ 联系起来, 即

$$\frac{d_q}{d_2} = \frac{r_q}{(q-1)} = \frac{q^\mu - q}{2^\mu - 2} \frac{1}{q-1} \quad (0 < \mu \leq 2), \quad (4)$$

其中 d_q 是分形维数. 而 Levy 指数 μ 反映了级联过程中动力学起伏的大小: 当动力学起伏很小时, 高斯极限近似成立, $\mu \approx 2$; 而如果分形行为是由二级相变引起, 则动力学起伏最大, $\mu = 0$, 这对应于单分形结构, 即 $d_q = d_2$.

对于自相似级联模型的 Levy 稳定性, 人们已进行了一系列研究^[5, 6, 8], 结果表明, 其 Levy 指数 μ 随动力学起伏的变化与 Levy 稳定性理论的预言一致. 但如果认为高维相空间的级联过程是自仿射的^[3], 则应考虑自仿射随机级联过程的 Levy 稳定性. 这里出现一个问题, 即: 实验上事先并不了解相空间有怎样的自仿射性质, 特别是, 不知道自仿射的特征量——Hurst 指数的值. 因此, 尽管从理论上讲, 对于一个自仿射分形体, 应该按由 Hurst 指数决定的自仿射方式, 各向异性地进行分割来计算阶乘矩, 在实验上却首先只能按自相似方式各同性地进行分割. 我们称这种做法为“自仿射分形的自相似分析”.

到目前为止, 多重产生过程的自仿射分形的研究, 还只停留在计算机 Monte Carlo 模拟上. 本文详细讨论了自仿射随机级联模型, 得到了 Hurst 指数 $H = 0.5$ 的二维自仿射分形按自相似分析的阶乘矩的解析表达式. 同时, 由推得的阶乘矩表达式求出了自相似统计的 Levy 指数, 并按自仿射统计的 Levy 指数进行了比较. 结果发现, Levy 指数的大小与系统的动力学起伏强弱有关. 对于不同的起伏参量 α , 所得结果与 Monte Carlo 模拟结果完全一致, 没有超出 Levy 稳定性分析的限制 $0 < \mu \leq 2$. 同时, 利用 Monte Carlo 模拟还计算了几种不同自仿射分形的 Levy 指数.

另外, 我们也对 NA22 实验组 250 GeV/c π^+p 及 K^+p 的二维相空间实验数据^[9] 进行了 Levy 稳定性分析. 发现, 对于不同的二维变量组合, Levy 指数不相同. 这说明不同的变量组合有不同的分形性质.

2 二维自仿射分形的随机级联模型

在实验分析中, 二维相空间的变量往往取为 $(y, \ln p_\perp)$ 或 (y, φ) , 其中 $y, \ln p_\perp, \varphi$ 分别为粒子的快度, 横动量的对数, 以及方位角. 为了叙述方便起见, 我们把纵向和横向坐标写做 x_\parallel, x_\perp .

在相空间自仿射分形的假定中, 每次横向和纵向的分割数 λ_\parallel 与 λ_\perp 可能不相等, 但系统的 Hurst 指数 $H = \ln \lambda_\parallel / \ln \lambda_\perp$ 应保持不变. 通过分析 NA22 关于阶乘矩标度不变性的实验结果^[9], 发现对 250 GeV/c 的强子-强子碰撞, 当取 $x_1 = y, x_2 = \ln p_\perp$ 时, 有 $H = 0.516 \pm 0.012$ ^[10]. 因此, 本文中在分析自仿射系统的 Levy 稳定性时, 作为实验结果的一种近似, 我们选取 $H = 0.5$, 并取与此相应的简单分割数 $\lambda_\parallel = 2, \lambda_\perp = 4$.

考虑单位面积的正方形相空间, 如图 1 设一个粒子一定在此相空间中出现, 即粒子在此区域出现的几率为 1. 首先取 $\lambda_\parallel = 2, \lambda_\perp = 4$, 把 x_\parallel 方向的长度等分为 2, x_\perp 方向

的长度等分为 4. 这样就把原区间分成了 8 个小矩形区间. 我们称这样的分割为 2-4 分割, 由 2-4 分割级联得到的分形为 2-4 分形. 应用每代分割几率守恒的 α 模型^[3], 得到粒子出现在第 i 个窗口的几率为

$$w_i^{(1)} = \frac{1 + \alpha r_i}{8 + \alpha \sum_{j=1}^8 r_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, 8), \quad (5)$$

它就是 α 模型的基元几率. 其中 α 为表示起伏强度的模型参数, 取值范围为 $[0, 1]$. 而 $r_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ 为均匀随机数, 其取值范围为 $[-1, 1]$. $w_i^{(1)}$ 的上角标表示分割的代数.

第二代的分割是将上一代的每个小窗口仍按 2-4 自仿射分形分割, 得到 8^2 个更小的窗口. 这样, 在每个更小的窗口中粒子出现的几率为

$$\rho_n^{(2)} = w_i^{(1)} w_j^{(2)}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8 \quad n = 1, 2, \dots, 8^2), \quad (6)$$

$w_j^{(2)}$ 表示从第一代到第二代分割过程中的基元几率, 它与 (5) 式有类似的形式. 依此类推, 当分割到第 v 代时, 有 8^v 个小窗口, 每个小窗口出现粒子的几率为

$$\rho_n^{(v)} = w_i^{(1)} w_j^{(2)} \dots w_k^{(v)}, \quad (n = 1, 2, \dots, 8^v, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 8), \quad (7)$$

图 1 示意了这种自仿射随机级联过程.

我们对不同的 α 值计算了间歇指数的比, 结果见表 1; 同时也计算了 Levy 指数, 结

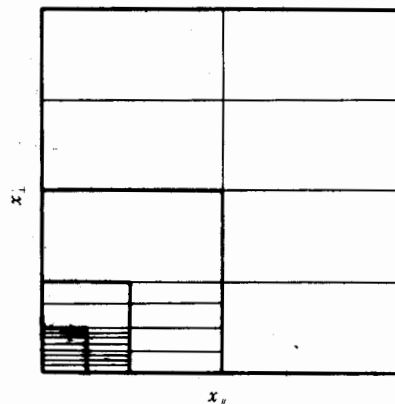


图 1 $\lambda_{\parallel} = 2, \lambda_{\perp} = 4$ 时二维自仿射随机级联示意图

其中细线代表自仿射级联分割过程, 粗线代表自相似统计时所用的分割.

表 1 对于不同 α 和不同 $\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$ 的自仿射分形的 r_3

	$\alpha = 0.1$	0.4	0.6	0.8
$r_3^{(2-3)}$	2.978	2.885	2.712	2.560
$r_3^{(2-4)}$	3.096	2.867	2.722	2.565
$r_3^{(2-5)}$	2.838	2.775	2.660	2.540
$r_3^{(2-6)}$	3.073	2.852	2.713	2.567

表 2 对于不同 α 和不同 $\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$ 的自仿射分形的 Levy 指数 μ

	$\alpha = 0.1$	0.4	0.6	0.8
$\mu^{(2-3)}$	1.972	1.736	1.495	1.246
$\mu^{(2-4)}$	2.018	1.746	1.503	1.252
$\mu^{(2-5)}$	1.846	1.701	1.472	1.228
$\mu^{(2-6)}$	2.007	1.743	1.502	1.254

果见表2其中, $r_3^{(a)}$ ($a=2-3, 2-4, 2-5, 2-6$) 代表按这几种 $\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$ 分割时, 第3阶和第2阶间歇指数的比值, 即 $r_3^{(a)} = \varphi_3^{(a)} / \varphi_2^{(a)}$, 而 $\mu^{(a)}$ 则表示相应分形的 Levy 指数.

3 二维自仿射分形的自相似分析

3.1 自相似分析中归一化矩的递推公式

由于实验数据处理过程中, 事先并不知道系统横向和纵向的分割数的对数比, 即 Hurst 指数的值, 因此在处理实验结果时, 总是先对横向和纵向等比例地缩小, 即按自相似的方法进行统计. 为了和实验结果进行比较, 下面我们也将由自仿射分形模型得到的样本, 按自相似的方法进行统计, 在第 v 代中计算边长为 $1/2^v$ 的正方形子区间内的几率, 即 2-2 自相似统计.

由自仿射分形示意图1可以看出, 如果我们定义一个函数 X_m , 它满足递推公式

$$X_m = w^{(m)} (X_{m-1}(1) + X_{m-1}(2) + X_{m-1}(3) + X_{m-1}(4)), \quad (8)$$

则 2-2 自相似统计中第 v 代分割的正方形窗口中的几率矩 z_v 可表示成

$$z_v = \begin{cases} w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(m-1)} X_m, & v = 2m \\ w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(m)} [X_m(1) + X_m(2)], & v = 2m + 1 \end{cases} \quad (9)$$

其中, $w^{(v)}$ 表示第 v 代的基元分割几率. 由于模型分割的平权性, 同代分割中各子窗口的几率的平均值相同. 故在上式中我们已经将 $w^{(v)}$ 的下标略去.

3.2 2, 3 阶几率矩的解析表达式

当 $v = 2m$ 时, 由 (9) 式知

$$\langle z_v^q \rangle = \langle w^q \rangle^{m-1} \langle X_m^q \rangle, \quad (10)$$

$$\langle z_v^q \rangle = \langle w^q \rangle^{(m-1)} \langle X_m^q \rangle = \frac{\langle X_m^q \rangle}{8^{q(m-1)}}, \quad (11)$$

因为 $\langle z_v \rangle = 1/4^{2m}$ 所以

$$\langle X_m \rangle = \frac{1}{2^{m+3}}. \quad (12)$$

故 q 阶归一化几率矩为:

$$C_v^q = \frac{\langle z_v^q \rangle}{\langle z_v \rangle^q} = 8^{q(m-1)} \langle w^q \rangle^{(m-1)} \frac{\langle X_m^q \rangle}{\langle X_m \rangle^q}, \quad (13)$$

下面对 $q=2, 3$ 两种情况推出 C_v^q 矩的解析形式.

当 $q=2$ 时, 根据 (8) 式可以得到递推关系式

$$\langle X_m^2 \rangle = 4 \langle w^2 \rangle \left(\langle X_{m-1}^2 \rangle + \frac{3 \langle w_1 w_2 \rangle}{4(m-1)} \right). \quad (14)$$

令

$$a = 4 \langle w^2 \rangle, \quad b = 3 \langle w_1 w_2 \rangle \quad (15)$$

其中 $\langle w^2 \rangle$, $\langle w_1 w_2 \rangle$ 分别为基元分割几率的二阶矩及相关矩. 则 (14) 式的递推结果为

$$\langle X_m^2 \rangle = \frac{a^{m+1}}{4} + a^m b + \frac{a^m b - \frac{ab}{4^{m-1}}}{4a-1}. \quad (16)$$

代入 (13) 式得到二阶归一化几率矩为:

$$\begin{aligned} C_v^2 &= 8^{2m} \left(a^{2m} + 4a^{2m-1}b + \frac{4a^{2m-1}b - \frac{4a^m b}{4^{m-1}}}{4a-1} \right) \\ &= 8^v \left(a^v + 4a^{v-1}b + \frac{4a^{v-1}b - \frac{a^{v/2}b}{2^{v-4}}}{4a-1} \right) \\ v &= 0, 2, 4, \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

v 为分割的代数.

当 $q=3$ 时, 根据 (8) 式可推得

$$\langle X_m^3 \rangle = 4\langle w^3 \rangle \langle X_{m-1}^3 \rangle + 6 \cdot 4^3 \langle w_1 w_2 w_3 \rangle \langle X_{m-2}^3 \rangle + 9 \langle X_{m-1}^2(1) X_{m-1}(2) \rangle. \quad (18)$$

其中 $\langle X_{m-2}^3 \rangle$ 可由 (12) 式计算. 对于 $\langle X_{m-1}^2(1) X_{m-1}(2) \rangle$, 根据 (8), (14) 式可得

$$\langle X_{m-1}^2(1) X_{m-1}(2) \rangle = \langle w_1^2 w_2 \rangle \frac{A_m}{2^{(m-1)}}, \quad (19)$$

$$A_m = a^{m-1} + 4a^{m-2}b + \frac{4a^{m-2}b - \frac{b}{4^{m-3}}}{4a-1}. \quad (20)$$

令

$$t = 4\langle w^3 \rangle, \quad u = 6\langle w_1 w_2 w_3 \rangle, \quad s = 9\langle w_1^2 w_2 \rangle, \quad (21)$$

$\langle w^3 \rangle$, $\langle w_1 w_2 w_3 \rangle$, $\langle w_1^2 w_2 \rangle$ 分别代表了基元分割几率的 3 阶矩和相关矩. 将 (19), (20), (21) 式代入 (18) 式可得 $\langle X_m^3 \rangle$ 的递推关系

$$\langle X_m^3 \rangle = t \left(\langle X_{m-1}^3 \rangle + \frac{s \cdot A_m}{2^{m-1}} + \frac{u}{8^{m-1}} \right). \quad (22)$$

递推结果为

$$\begin{aligned} \langle X_m^3 \rangle &= \frac{t^{m+1}}{4} + \left(\frac{u}{8^m} - \frac{bs}{4a-1} \frac{16}{8^m} \right) \left\{ \frac{8t - (8t)^{m+1}}{1-8t} \right\} \\ &\quad + s \left(\frac{16b}{4a-1} + 1 \right) \frac{a^m}{2^m} \left\{ \frac{\frac{2t}{a} - \left(\frac{2t}{a} \right)^{m+1}}{1 - \frac{2t}{a}} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

代入 (13) 式可得三阶归一化几率矩

$$C_v^3 = 8^3 (128t)^{\frac{v}{2}-1} \left\{ 8^{v/2} \frac{t^{\frac{v}{2}+1}}{4} + \left(u - \frac{16bs}{4a-1} \right) \left(\frac{8t - (8t)^{\frac{v}{2}+1}}{1-8t} \right) \right. \\ \left. + s(4a)^{v/2} \left(\frac{16b}{4a-1} + 1 \right) \left(\frac{\frac{2t}{a} - \left(\frac{2t}{a} \right)^{\frac{v}{2}+1}}{1 - \frac{2t}{a}} \right) \right\}, \\ v=0, 2, 4, \dots \quad (24)$$

v 为分割的代数.

当 $v=2m+1$ 时, 从 (9) 式的第二式出发可以推得

$$C_v^2 = 4a^m 8^{2m+1} \left(\langle X_m^2 \rangle + \frac{b}{3 \cdot 4^m} \right), \quad (25)$$

$$C_v^3 = \frac{2t^m 8^{4m+2}}{4^m} \left(\langle X_m^3 \rangle + \frac{s}{3a} \frac{1}{2^{(m-2)}} \langle X_m^2 \rangle \right), \quad (26)$$

其中 a, b, s, t 由 (15), (21) 式定义, $\langle X_m^2 \rangle$ 和 $\langle X_m^3 \rangle$ 参见 (16), (23) 式.

4 二维自相似分析的 Levy 指数

4.1 NA22 的实验结果

NA22 实验组以 (y, φ) 和 $(y, \ln p_{\perp})$ 作变量. 先把变量 x_a 作积分变换^[11]

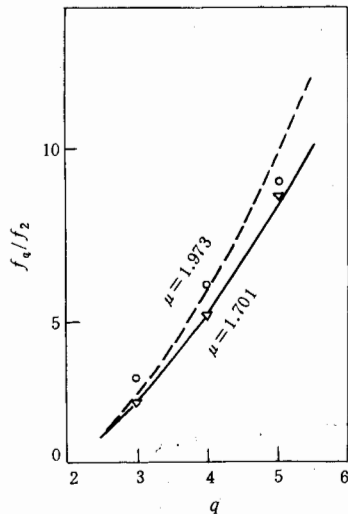


图2 NA22 实验数据与(4)式拟合的曲线
○ $y-\varphi$, ▽ $y-\ln p_{\perp}$.

$$X(x_a) = \frac{\int_{x_a \min}^{x_a} \rho(x_a) dx_a}{\int_{x_a \min}^{x_a \max} \rho(x_a) dx_a}, \quad (27)$$

然后把二维分析的 2 至 5 阶乘矩与 (3) 式拟合. 表 3 列出了他们得到的 r_3, r_4, r_5 .

表3 二维相空间选不同变量组合时对应的
 r_3, r_4, r_5 数据表

	r_3	r_4	r_5
$y-\varphi$	3.4 ± 0.2	6.1 ± 0.6	9 ± 2
$y-\ln p_{\perp}$	2.75 ± 0.07	5.2 ± 0.2	8.6 ± 0.4

把表 3 中的数据与 (4) 式拟合, 我们得到对应于不同变量组合的 Levy 指数为

$$\mu = \begin{cases} 1.973, & (y - \varphi) \\ 1.701, & (y - \ln p_{\perp}) \end{cases} \quad (28)$$

所拟合的曲线见图 2.

显然, 对于不同的变量组合, Levy 指数不同. 这意味着对于不同的变量组合, 动力学起伏有不同的行为. 但所有结果都不超出 Levy 稳定性理论的限制 $0 < \mu \leq 2$.

4.2 二维自仿射分形自相似分析的 Levy 指数的解析计算及 Monte Carlo 模拟

由 (17), (24)–(26) 式知, C_v^2, C_v^3 与 a, b, t, u, s 有关. 因此, 我们需要算出五个矩 $\langle w^2 \rangle, \langle w_1 w_2 \rangle, \langle w^3 \rangle, \langle w_1^2 w_2 \rangle, \langle w_1 w_2 w_3 \rangle$. 关于这五个矩的计算及解析表达式见附录. 它们仅仅是起伏参数 α 的函数. 参数 α 取不同值时这五个矩的数值计算结果见表 4. 其中 $M_1 = \langle w^2 \rangle \times 10^2$, $M_2 = \langle w_1 w_2 \rangle \times 10^2$, $M_3 = \langle w^3 \rangle \times 10^3$, $M_4 = \langle w_1^2 w_2 \rangle \times 10^3$, $M_5 = \langle w_1 w_2 w_3 \rangle \times 10^3$.

表 4 M_1, M_2, M_3, M_4 和 M_5 对参数 α 的数值表

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0.05	1.563639	1.562337	1.957398	1.954142	1.952514
0.1	1.567062	1.561848	1.970239	1.957197	1.950681
0.2	1.580807	1.559884	2.021880	1.969455	1.943322
0.4	1.636667	1.551901	2.233070	2.019119	1.913460
0.6	1.733347	1.538107	2.602820	2.104240	1.862100
0.8	1.876503	1.517642	3.163619	2.228780	1.786480
1	2.065690	1.490616	3.929909	2.389570	1.687840

利用 (17), (24)–(26) 式以及表 4 给出的数据, 对于不同的 α , 我们把分割做到第 20 代, 得到的 $\ln C^3 - \ln C^2$ 呈线性关系. 这与 (3) 式的预言一致. 对于不同的 α , 将这些曲线与 (3) 式拟合可得 $r_3(\alpha)$. 然后构造误差函数

$$f(\alpha, \mu) = \left(\frac{3^\mu - 3}{2^\mu - 2} - r_3(\alpha) \right)^2, \quad (29)$$

求出和该函数的极小值对应的 $\mu(\alpha)$. μ 就是我们要计算的 Levy 稳定性指数. 对于不同 α 的 r_3 及 μ 值的计算结果见表 5.

表 5 对于不同 α 的 r_3 和 μ 的解析计算结果

	$\alpha=0.05$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
r_3	2.998	2.992	2.970	2.888	2.768	2.635	2.508
μ	1.997	1.990	1.961	1.853	1.681	1.475	1.255

由计算结果可以看出, Levy 指数 μ 的变化趋势是随着 α 的减小, 即随着动力学起伏的减弱, 逐渐趋近于 2 反之, 当 α 增大时, 即动力学起伏变强时, Levy 指数变小. 这与 Levy 稳定性理论的预言完全一致^[5, 6, 8].

由于我们在模型中按 NA22 的间歇实验数据取了 Hurst 指数 $H=0.5$, 因而其结果也可近似地适用于 $x_1=y$, $x_2=\ln p_{\perp}$ ^[10]. 将表 5 和表 3 及式 (28) 中变量组合为 $(y, \ln p_{\perp})$ 的实验结果比较可见, $\alpha=0.6$ 的模型计算结果和实验近似地符合.

我们也相应地做了 20000 个事件的 2-4 自仿射分形自相似分析的 Monte Carlo 模拟, 计算 Levy 指数. 与 $\alpha=0.01, 0.1, 0.4, 0.6, 0.8$ 相对应的 Levy 指数见表 6 第二行. 它们和表 5 上列出的解析计算结果相符.

表 6 自仿射分形自相似分析 Levy 指数 μ 的 Monte Carlo 模拟结果

$\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$	$\alpha=0.01$	0.1	0.4	0.6	0.8
2-3	1.996	1.981	1.865	1.735	1.595
2-4	2.000	1.986	1.824	1.662	1.491
2-5	2.008	1.992	1.871	1.744	1.600
2-6	1.999	1.990	1.867	1.734	1.588
3-4	2.055	2.032	1.841	1.673	1.493

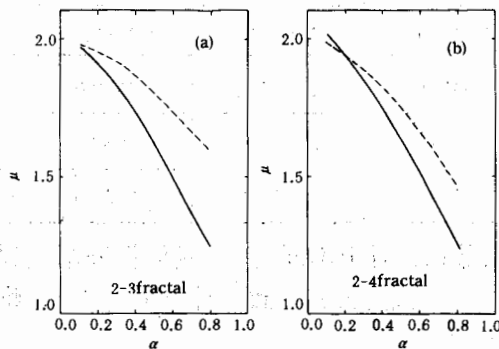


图 3 自仿射分形的 Levy 指数 μ 随 α 的变化曲线
(a) $\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp} = 2-4$, (b) $\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp} = 2-3$, 实线为模型本身的 Levy 指数, 虚线为自相似分析的 Levy 指数.

对于变量组合 (y, φ) , Hurst 指数 H 和描述动力学起伏大小的参数 α 与变量组合 $(y, \ln p_{\perp})$ 时的值不同. 这表明对于不同的变量组合动力学起伏有不同的行为.

5 结 论

本文在二维相空间中, 采用自仿射分形自相似统计的方法, 对 $H=0.5$ 的自仿射随机级联模型进行了解析研究, 得到了相应的归一化几率矩 C_N^2 和 C_N^3 的解析表达式. 它

为了考察 Levy 指数对 Hurst 指数的依赖性, 我们也模拟并统计了其它 Hurst 指数下的 Levy 指数 (见表 6). 与 2-4 分形结果类似, μ 总是随 α 增大而变小, 但都不超过 Levy 稳定性限制, 即 $0 < \mu \leq 2$. 从表 6 中也可以看出, 当动力学起伏较大时 ($\alpha \geq 0.5$), Levy 指数对 H 有明显的依赖性; 随着 α 的减小, 不同 H 的 Levy 指数 μ 都趋于极限值 2, 对 H 的依赖性消失. 图 3 中画出了自仿射分形的 $\mu - \alpha$ 关系 (实线) 和按自相似分析得到的 $\mu - \alpha$ 关系 (虚线).

将表 6 和表 3 及式 (28) 比较可见, 对于

们是基元分割几率的五个矩 $\langle w^2 \rangle$, $\langle w_1 w_2 \rangle$, $\langle w^3 \rangle$, $\langle w_1^2 w_2 \rangle$, $\langle w_1 w_2 w_3 \rangle$ 的函数.

对二维自仿射空间的解析计算及 Monte Carlo 模拟研究表明:

(1) 在二维相空间中, Levy 指数 μ 的变化范围是 $0 < \mu \leq 2$. 最大值 $\mu_{\max} \approx 2$ 不超过 2;

(2) Levy 指数 μ 依赖于动力学起伏. 动力学起伏越大时, μ 越小, 反之亦然. 当动力学起伏较大时, Levy 指数 μ 仍表现出对系统的 Hurst 指数有依赖性.

(3) NA22 的二维实验结果表明, 不同变量组合的 Levy 指数不同, 这意味着对应于不同变量组合的级联过程, 动力学起伏有不同的行为.

参 考 文 献

- [1] A. Bialas, R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B273** (1986)703; **B308** (1988)857.
 [2] N. Schmizt, in Proc. XXI Int. Symp. on Multiparticle Dynamics, Wuhan, China, 1991, Eds, Wu Yuanfang, Liu Lianshou, World Scientific, Singapore 1992, p.377.
 [3] Wu Yuanfang, Liu Lianshou, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993)3197.
 [4] W. Ochs, *Phys. Lett.*, **B247** (1990)101.
 [5] Ph. Brax, R. Peschanski, *Phys. Lett.*, **B253** (1991)225.
 [6] Zhang Yang, Lin Hai, Liu Lianshou, "Levy Stability Analysis of Random Cascade Model", *Commun. Theor. Phys.*, (to be published).
 [7] J. P. Bouchaud, A. Georges, *Phys. Rep.*, **195** (1990)127; B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Addison Wesley, Reading, MA, 1954).
 [8] 林海、张阳、刘连寿, 高能物理与核物理, **18** (1994)858.
 [9] N. Agababyan et al (NA22), Nijmegen Preprint, HEN-353 (1993).
 [10] 吴元芳、刘连寿, 中国科学, **24** (1994)1299.
 [11] J. M. Alberty, A. Bialas, *Z. Phys.*, **C50** (1991)315.

附录

自仿射级联模型基元几率的 2, 3 阶矩及相关矩的计算

在本附录中, 我们对五个矩 $\langle w^2 \rangle$, $\langle w_1 w_2 \rangle$, $\langle w^3 \rangle$, $\langle w_1^2 w_2 \rangle$, $\langle w_1 w_2 w_3 \rangle$ 进行计算, 求出它们的解析表达式.

根据 α 模型基元几率的表达式 (见文中 (5) 式) 可得

$$\langle w^2 \rangle = \frac{1}{2^8} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \frac{(1 + \alpha r_1)^2}{[8 + \alpha(r_1 + r_2 + \dots + r_8)]^2} dr_1 dr_2 \dots dr_8. \quad (\text{A.1})$$

从积分变量 r_8 开始逐次积分一直到完成对 r_2 的积分为止, 可得

$$\langle w^2 \rangle = - \frac{1}{120 \cdot 2^8 \alpha^8} \sum_{n=0}^7 (-1)^n C_7^n f_1(\alpha, n). \quad (\text{A.2})$$

其中

$$f_1(\alpha, n) = \alpha \int_{-1}^1 dr_1 (1 + \alpha r_1)^2 [8 + \alpha r_1 + \alpha(7 - 2n)]^3 \ln[8 + \alpha r_1 + \alpha(7 - 2n)]. \quad (\text{A.3})$$

$f_1(\alpha, n)$ 积分结果为

$$f_1(\alpha, n) = Y_1(\alpha, n) - P_1(\alpha, n). \quad (\text{A.4})$$

令

$$x_1(m) = 8 + \alpha(m - 2n), \quad x_2(i) = 7 + \alpha(i - 2n), \quad (\text{A.5})$$

$$y_1(m, i, \alpha, n) = \left(\frac{x_1^8(m)}{8} - \frac{2x_2(i)x_1^7(m)}{7} + \frac{x_2^2(i)x_1^6(m)}{6} \right) \ln x_1(m), \quad (\text{A.6})$$

$$p_1(m, i, \alpha, n) = \frac{x_1^8(m)}{8^2} - \frac{2x_2(i)x_1^7(m)}{7^2} + \frac{x_2^2(i)x_1^6(m)}{6^2}. \quad (\text{A.7})$$

则 $Y_1(\alpha, n)$, $P_1(\alpha, n)$ 可写为

$$Y_1(\alpha, n) = y_1(8, 7, \alpha, n) - y_1(6, 7, \alpha, n),$$

$$P_1(\alpha, n) = p_1(8, 7, \alpha, n) - p_1(6, 7, \alpha, n), \quad (\text{A.8})$$

将 $f_1(\alpha, n)$ 代入 (A.2) 式求和得

$$\langle w^2 \rangle = - \frac{1}{120 \cdot 2^8 \alpha^8} \left(\sum_{n=0}^7 (-1)^n C_7^n Y_1(\alpha, n) - 7680 \alpha^8 \right). \quad (\text{A.9})$$

同理可得另外四个矩的解析表达式为

$$\langle w_1 w_2 \rangle = - \frac{1}{24 \cdot 2^8 \alpha^8} \left(\sum_{n=0}^6 (-1)^n C_6^n Y_2(\alpha, n) + \frac{768}{7} \alpha^8 \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\langle w^3 \rangle = \frac{1}{24 \cdot 2^9 \alpha^8} \left(\sum_{n=0}^7 (-1)^n C_7^n Y_3(\alpha, n) + 4608 \alpha^8 \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\langle w_1^2 w_2 \rangle = \frac{1}{6 \cdot 2^9 \alpha^8} \left(\sum_{n=0}^6 (-1)^n C_6^n Y_4(\alpha, n) - \frac{384}{7} \alpha^8 \right), \quad (\text{A.12})$$

$$\langle w_1 w_2 w_3 \rangle = \frac{1}{2^{10} \alpha^8} \left(\sum_{n=0}^5 (-1)^n C_5^n Y_5(\alpha, n) + \frac{64}{21} \alpha^8 \right). \quad (\text{A.13})$$

其中

$$Y_2(\alpha, n) = y_2(8, 7, 0, \alpha, n) - y_2(6, 7, 0, \alpha, n) - y_2(6, 5, 1, \alpha, n) + y_2(4, 5, 1, \alpha, n), \quad (\text{A.14})$$

$$y_2(m, i, j, \alpha, n) = \frac{1}{30} \left(- \frac{x_1^8(m)}{8} + \frac{(6z(j) + x_2(i))x_1^7(m)}{7} - x_2(i)z(j)x_1^6(m) \right) \ln x_1(m), \quad (\text{A.15})$$

$$z(j) = 1 + (-1)^j \alpha, \quad (\text{A.16})$$

$$Y_3(\alpha, n) = y_3(8, 7, \alpha, n) - y_3(6, 7, \alpha, n), \quad (\text{A.17})$$

$$y_3(m, i, \alpha, n) = \left(\frac{x_1^8(m)}{8} - \frac{3x_2(i)x_1^7(m)}{7} + \frac{3x_2^2(i)x_1^6(m)}{6} - \frac{x_2^3(i)x_1^5(m)}{5} \right) \ln x_1(m), \quad (\text{A.18})$$

$$Y_4(\alpha, n) = y_4(8, 7, 0, \alpha, n) - y_4(6, 7, 0, \alpha, n) - y_4(6, 5, 1, \alpha, n) + y_4(4, 5, 1, \alpha, n), \quad (\text{A.19})$$

$$y_4(m, i, j, \alpha, n) = \left[- \frac{x_1^8(m)}{8 \cdot 20} + \left(\frac{z(j)}{4} + \frac{x_2(i)}{10} \right) \frac{x_1^7(m)}{7} - \left(\frac{z(j)x_2(i)}{2} + \frac{x_2^2(i)}{20} \right) \frac{x_1^6(m)}{6} + \frac{z(j)x_2^2(i)x_1^5(m)}{20} \right] \ln x_1(m), \quad (\text{A.20})$$

$$Y_5(\alpha, n) = y_5(8, 7, 0, 0, \alpha, n) - y_5(6, 7, 0, 0, \alpha, n) - 2[y_5(6, 5, 0, 1, \alpha, n) - y_5(4, 5, 0, 1, \alpha, n)] + y_5(4, 3, 1, 1, \alpha, n) - y_5(2, 3, 1, 1, \alpha, n), \quad (\text{A.21})$$

$$Y_5(m, i, j, l, \alpha, n) = \left\{ \frac{2}{8 \cdot 6!} x_1^8(m) - \left[\frac{2(z(j)+z(l))}{7 \cdot 5!} + \frac{2x_2(i)}{7!} \right] x_1^7(m) + \left[\frac{2z(j)z(l)}{6 \cdot 4!} + \frac{2(z(j)+z(l))x_2(i)}{6!} \right] x_1^6(m) - \frac{2z(j)z(l)x_2(i)x_1^5(m)}{5!} \right\} \ln x_1(m). \quad (\text{A.22})$$

An Analytic Study of Self-affine Fractal in Two-dimensional Phase Space of High Energy Collisions

Lin Hai Zhang Yang Liu Lianshou

(Institute of particle physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430070)

Received 12 January 1995

Abstract

The self-affine α -model in 2-dimensional phase space is discussed in some detail. The analytic expression of the normalized probability moments, C_N^2 and C_N^3 , are deduced for the self-similar analysis of a self-affine fractal object with Hurst index equal to 0.5. The Levy stability indices for both the self-similar and the self-affine analyses of 2-D self-affine model are calculated. The result of Monte Carlo simulation is shown to be consistent with that of analytic calculation. The recent experimental data from NA22 collaboration are explained qualitatively.

Key words intermittency, Levy stability, self-affine fractal, random cascading model.