第20卷 第1期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol. 20, No.1
1996年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1996

# 具有 $U_{qp}(U_3)\supset U_{qp}(U_2)\supset U_{qp}(SO_2)$ 对称的双参数形变二维相互作用玻色子模型

周 焕 强
(重庆大学应用物理系 重庆 630044)

管习文 贺劲松
(青岛职工大学 青岛 266021) (渝州大学物理系 重庆 630033)

1994-12-20 收稿

**摘 要**

构造了具有 $U_{qp}(U_3)\supset U_{qp}(U_2)\supset U_{qp}(SO_2)$ 对称的双参数 $qp$- 形变二维相互作用玻色子模型(**IBM**)，并给出了其能谱和跃迁矩阵元. 结果表明，能谱和跃迁矩阵元极其敏感地依赖于第二个形变参数.

**关键词** 量子代数，双参数形变，相互作用玻色子模型.

## 1 引 言

量子代数理论[1-3]的研究在过去的十年间受到数学界和物理学界广泛的关注. 从物理应用角度讲，量子代数理论已被成功地用于物理学的许多分支，尤其是核物理学中. 这方面的工作包括核转动谱[4-6]，二维相互作用玻色子模型[7]和 $U(3)$ 壳层模型[8]. 然而，正如文献[9]所指出的，量子代数理论的物理应用大多数局限于单参数形变情形. 其原因在于 Drinfeld 的一个定理[10]. 该定理断言，半单纯李代数普遍包络代数的双参数形变，本质上等同于单参数形变. 因此，为了获得非平凡的双参数形变量子代数，必须对非半单纯李代数进行形变. 正是基于这样的考虑，Kibler[11] 给出了非平凡的双参数量子代数 $U_{qp}(U_2)$，并据此成功地构造了描述核转动带的 $U_{qp}(U_2)$ 模型[9].

本文的目的是给出非平凡的双参数量子代数 $U_{qp}(U_3)$ 的对易关系的明显形式，并据此构造了具有 $U_{qp}(U_3)\supset U_{qp}(U_2)\supset U_{qp}(SO_2)$ 对称的双参数 $qp$- 形变二维相互作用玻色子模型.

## 2 量子代数 $U_{qp}(U_3)$ 和子代数链 $U_{qp}(U_3)\supset U_{qp}(U_2)\supset U_{qp}(SO_2)$

这里先给出量子代数 $U_{qp}(U_3)$ 的明显构造. 为此引入如下的记号:

$$[A,\ B]_\alpha = AB - \alpha BA, \tag{1}$$

这里，$\alpha = p^{\pm1}$，$q^{\pm1}$. 据此，可以写出 $U_{qp}(U_3)$ 的对易关系的明显形式(见表 1).

**表 1　$U_{qp}(U_3)$ 的对易关系**

| | $A_{11}$ | $A_{22}$ | $A_{33}$ | $A_{12}$ | $A_{23}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_{11}$ | 0 | 0 | 0 | $A_{12}$ | 0 |
| $A_{22}$ | 0 | 0 | 0 | $-A_{12}$ | $A_{23}$ |
| $A_{33}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-A_{23}$ |
| $A_{12}$ | $-A_{12}$ | $A_{12}$ | 0 | 0 | $A_{13}(q)$ |
| $A_{23}$ | 0 | $-A_{23}$ | $A_{23}$ | $-q^{-1}A_{13}(q^{-1})$ | 0 |
| $A_{13}$ | $-A_{13}$ | 0 | $A_{13}$ | $0(p^{-1})$ | $0(p)$ |
| $A_{21}$ | $A_{21}$ | $-A_{21}$ | 0 | $-(qp)^{A_{22}}[A_{11}-A_{22}]$ | 0 |
| $A_{32}$ | 0 | $A_{32}$ | $-A_{32}$ | 0 | $-(qp)^{A_{33}}[A_{22}-A_{32}]$ |
| $A_{31}$ | $A_{31}$ | 0 | $A_{31}$ | $q^{A_{22}}p^{A_{11}}A_{32}$ | $-A_{21}q^{A_{22}}p^{A_{33}}$ |

| | $A_{13}$ | $A_{21}$ | $A_{32}$ | $A_{31}$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_{11}$ | $A_{13}$ | $-A_{21}$ | 0 | $-A_{31}$ |
| $A_{22}$ | 0 | $A_{21}$ | $-A_{32}$ | 0 |
| $A_{33}$ | $-A_{13}$ | 0 | $A_{32}$ | $A_{31}$ |
| $A_{12}$ | $0(p)$ | $(qp)^{A_{22}}[A_{11}-A_{22}]$ | 0 | $-q^{A_{22}}p^{A_{11}}A_{32}$ |
| $A_{23}$ | $0(p^{-1})$ | 0 | $(qp)^{A_{33}}[A_{22}-A_{33}]$ | $A_{21}q^{A_{22}}p^{A_{33}}$ |
| $A_{13}$ | 0 | $-A_{23}q^{A_{11}}p^{A_{22}}$ | $p^{A_{22}}q^{A_{33}}A_{12}$ | $(qp)^{A_{22}+A_{33}}[A_{11}-A_{33}]$ |
| $A_{21}$ | $A_{23}q^{A_{11}}p^{A_{22}}$ | 0 | $-p^{-1}A_{31}(p^{-1})$ | $0(q^{-1})$ |
| $A_{32}$ | $-p^{A_{22}}q^{A_{33}}A_{12}$ | $-A_{31}(p)$ | 0 | $0(q)$ |
| $A_{31}$ | $-(qp)^{A_{22}+A_{33}}[A_{11}-A_{33}]$ | $0(q)$ | $0(q^{-1})$ | 0 |

对易关系以 $[A,B]_\alpha = C$ 形式给出，且 $A$ 在第一列给出，$B$ 在第一行内给出，$C$ 在包括 $A$ 的行与包括 $B$ 的列的相交处给出；同时，当 $\alpha \neq 1$ 时，其值在 $C$ 后的括号内给出.

与单参数情形类似，量子代数 $U_{qp}(U3)$ 可由双参数 $qp-$ 形变玻色算符实现. 后者满足如下的对易关系：

$$a_\alpha a_\alpha^+ - pa_\alpha^+ a_\alpha = q^{N_\alpha},\ a_\alpha a_\alpha^+ - qa_\alpha^+ a_\alpha = p^{N_\alpha}, \tag{2}$$
$$\alpha = 1,\ 2,\ 3.$$

$$[a_\alpha,\ a_\beta] = [a_\alpha^+,\ a_\beta^+] = 0, \tag{3}$$
$$\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3.$$

$$[a_\alpha,\ a_\beta^+] = [a_\alpha^+,\ a_\beta] = 0, \tag{4}$$
$$\alpha \neq \beta,\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3.$$

且满足

$$a_\alpha^+ a_\alpha = [N_\alpha]_{qp},\ a_\alpha a_\alpha^+ = [N_\alpha + 1]_{qp} \tag{5}$$
$$\alpha = 1,\ 2,\ 3.$$

其中

$$[x]_{qp} = \frac{q^x - p^x}{q - p}, \tag{6}$$

且 $x$ 是通常的数或算符，则玻色实现的明显形式为：

$$A_{11} = N_1,\ A_{22} = N_2,\ A_{33} = N_3,$$
$$A_{12} = a_1^+ a_2,\ A_{21} = a_2^+ a_1,\ A_{23} = a_2^+ a_3, \tag{7}$$

$$A_{32}=a_3^+a_2 \quad A_{13}=A_{12}A_{23}-qA_{23}A_{12}=a_1^+a_3p^{N_2},$$
$$A_{31}=A_{32}A_{21}-pA_{21}A_{32}=a_3^+a_1q^{N_2}.$$

略去包含 $a_3$ 和 $a_3^+$ 的生成元，则剩下的四个生成元正好形成 $U_{qp}(U_2)$代数，其生成元为 $qp$ 形变球角动量算符:

$$J_+=a_1^+a_2,\ J_-=a_1a_2^+,\ J_3=\frac{1}{2}(N_1-N_2),\qquad(8)$$
$$J_0=\frac{1}{2}(N_1+N_2).$$

它们满足下面的对易关系:

$$[J_3,\ J_\pm]=\pm J_\pm,$$
$$[J_+,\ J_-]=(qp)^{J_0-J_3}[2J_3]_{qp},\qquad(9)$$
$$[J_0,\ J_\alpha]=0,\ \alpha=+,\ -,\ 3.$$

同时，若进一步略去 $J_\pm$ 和 $J_0$，则余下的生成 $U_{qp}(SO_2)$子代数，故有子代数链

$$U_{qp}(U_3)\supset U_{qp}(U_2)\supset U_{qp}(SO_2).\qquad(10)$$

为了下面的应用，这里顺便讨论一下量子代数 $U_{qp}(U_2)$的表示问题. 为此目的，引入两套彼此独立的 $qp$ 形变玻色算符 $a_i^+$，$a_i$ 和 $b_i^+$，$b_i(i=1,\ 2)$，且真空态 $|0\rangle$为 $a_1$、$a_2$ 和 $b_1$、$b_2$ 所零化. 显然，

$$\begin{aligned}J_0&=N_1+N_2+\overline{N}_1+\overline{N}_2,\\ J_+&=a_1^+a_2+b_1^+b_2,\\ J_-&=a_2^+a_1+b_2^+b_1,\\ J_3&=\frac{1}{2}(N_1-N_2)+\frac{1}{2}(\overline{N}_1-\overline{N}_2),\end{aligned}\qquad(11)$$

提供了 $U_{qp}(U_2)$的一个实现. 现在引入基底态矢量

$$|\Lambda n_1\,n_2\rangle=N_{\Lambda n_1n_2}\left(a_1^+b_2^+\frac{\overline{N}_2+1}{[\overline{N}_2+1]_{qp}}-a_2^+b_1^+\frac{N_2+1}{[N_2+1]_{qp}}\right)^\Lambda(a_1^+)^{n_1}(a_2^+)^{n_2}|0\rangle,\qquad(12)$$

其中 $N_{\Lambda n_1n_2}$ 为归一化因子. 由于

$$\begin{aligned}J_0|\Lambda n_1n_2\rangle&=(2\Lambda+n_1+n_2)|\Lambda n_1n_2\rangle,\\ J_+|\Lambda n_1n_2\rangle&=\sqrt{[n_1+1]_{qp}[n_2]_{qp}}\,|\Lambda n_1+1\ \ n_2-1\rangle,\\ J_-|\Lambda n_1n_2\rangle&=\sqrt{[n_1]_{qp}[n_2+1]_{qp}}\,|\Lambda n_1-1\ \ n_2+1\rangle,\\ J_3|\Lambda n_1n_2\rangle&=\frac{n_1-n_2}{2}|\Lambda n_1n_2\rangle.\end{aligned}\qquad(13)$$

故对于每一个给定的 $\Lambda$ 值，可得 $U_{qp}(U_2)$的一个相应的 $2j+1$ 维表示. 为使与通常的约定一致，令$j=\frac{1}{2}(n_1+n_2)$和 $m=\frac{1}{2}(n_1-n_2)$，则有

$$|\Lambda j\,m\rangle=N_{\Lambda jm}\left(a_1^+b_2^+\frac{\overline{N}_2+1}{[\overline{N}_2+1]_{qp}}-a_2^+b_1^+\frac{N_2+1}{[N_2+1]_{qp}}\right)^\Lambda(a_1^+)^{j+m}(a_2^+)^{j-m}|0\rangle,$$

$$(14-1)$$

$$\begin{aligned} J_0|\Lambda j m\rangle &= (2\Lambda+2j)|\Lambda j m\rangle, \\ J_+|\Lambda j m\rangle &= \sqrt{[j+m+1]_{qp}[j-m]_{qp}}\ |\Lambda j m+1\rangle, \\ J_-|\Lambda j m\rangle &= \sqrt{[j+m]_{qp}[j-m+1]_{qp}}\ |\Lambda j m-1\rangle, \\ J_3|\Lambda j m\rangle &= m|\Lambda j m\rangle. \end{aligned} \tag{14-2}$$

下面的讨论将只限于考虑$\Lambda=0$的情形. 对于每个量子$qp$谐振子，其基底为[12,13]:

$$|n_i\rangle=\frac{(a_i^+)^{n_i}}{[n_i]_{qp}!}|0\rangle, \tag{15}$$

其中 $[n]_{qp}!=[n]_{qp}[n-1]_{qp}\cdots[2]_{qp}[1]_{qp}$，且

$$\begin{aligned} N_i|n_i\rangle &= n_i|n_i\rangle, \\ a_i^+|n_i\rangle &= \sqrt{[n_i+1]_{qp}}\ |n_i+1\rangle, \end{aligned} \tag{16}$$

和

$$a_i|n_i\rangle=\sqrt{[n_i]_{qp}}\ |n_i-1\rangle.$$

故此，对于量子代数$U_{qp}(U_3)$，整个基底可选为

$$|N,n_d,M\rangle=\frac{(a_3^+)^{N-n_d}(a_1^+)^{\frac{n_d}{2}+\frac{M}{4}}(a_2^+)^{\frac{n_d}{2}-\frac{M}{4}}}{[N-n_d]_{qp}!\left[\frac{n_d}{2}+\frac{M}{4}\right]_{qp}!\left[\frac{n_d}{2}-\frac{M}{4}\right]_{qp}!}|0\rangle, \tag{17}$$

其中$N=N_1+N_2+N_3$为总玻色子数，$n_d=N_1+N_2$是具有角动量 2 的玻色子数，$M$ 是$L=4J_3$的本征值. 这里$n_d$的取值范围为 0 至$N$，同时对于给定的$n_d$值，$M$可取$\pm 2n_d$，$\pm 2(n_d-1)$，$\cdots\pm 2$或者 0 (视$n_d$是奇数或偶数而定).

对于量子代数$U_{qp}(U_2)$，其二阶 Casimir 算符为

$$C_2(U_{qp}(U_2))=\frac{1}{2}(J_+J_-+J_-J_+)+\frac{1}{2}[2]_{qp}(qp)^{J_0-J_3}[J_3]_{qp}^2. \tag{18}$$

在上述基底下，此 Casimir 算符的本征值为

$$C_2(U_{qp}(U_2))|N,n_d,M\rangle=\left[\frac{n_d}{2}\right]_{qp}\left[\frac{n_d}{2}+1\right]_{qp}|Nn_dM\rangle. \tag{19}$$

## 3　双参数形变二维相互作用玻色子模型

对于 Hamiltonian 量具有$U_{qp}(U_2)$动力学对称的系统，其 Hamiltonian 量可由子代数链$U_{qp}(U_3)\supset U_{qp}(U_2)\supset U_{qp}(SO_2)$的 Casimir 算符表示[14－17]:

$$H=E_0+AC_2(U_{qp}(U_2))+BC_2(U_{qp}(SO_2)), \tag{20}$$

其中$E_0$，$A$，$B$为常数，故由上节的讨论，其能谱为

$$E=E_0+A\left[\frac{n_d}{2}\right]_{qp}\left[\frac{n_d}{2}+1\right]_{qp}+BM^2. \tag{21}$$

下面引入双参数$qp$形变二维相互作用玻色子模型的四极跃迁算符[15]:

$$Q_+ = a_1^+ a_3 + a_3^+ a_2 ,\quad Q_- = a_2^+ a_3 + a_3^+ a_1 . \tag{22}$$

利用 $qp$ 玻色算符在 $qp$ 形变基底下的公式(16)，可直接计算上述四极跃迁算符在基底(17)式下的矩阵元:

$$\langle N,\ n_d+1,\ M\pm 2 | Q_\pm | N,\ n_d,\ M\rangle = \sqrt{[N-n_d]_{qp}\left[\frac{n_d}{2}\pm\frac{M}{4}+1\right]_{qp}}, \tag{23-1}$$

和

$$\langle N, n_d-1,\ M\pm 2 | Q_\pm | N, n_d, M\rangle = \sqrt{[N-n_d+1]_{qp}\left[\frac{n_d}{2}\mp\frac{M}{4}\right]_{qp}}. \tag{23-2}$$

与经典情形和单参数情形一致，其选择定则为$\Delta M=\pm 2$ 和 $\Delta n_d=\pm 1$. 显然，带内和带间的跃迁是许可的.

为了获得双参数 $qp$ 形变二维相互作用玻色子模型的能谱和跃迁矩阵元关于形变参数，特别是第二个形变参数的依赖关系，不妨考虑具有 20 个玻色子($N=20$)的系统. 为此，下面分别考虑如下两种情况:

第(i)种情况: $q=S^{-1}e^{\tau}$, $p=S^{-1}e^{-\tau}$, 则 $qp$– 数可写成

$$[x]_{qp}=S^{1-x}\frac{\text{sh}\tau x}{\text{sh}\tau} ; \tag{24}$$

第(ii)种情况: $q=S^{-1}e^{i\tau}$, $p=S^{-1}e^{-i\tau}$, 则相应的 $qp$– 数为

$$[x]_{qp}=S^{1-x}\frac{\sin\tau x}{\sin\tau} . \tag{25}$$

并分别对能谱和四极跃迁算符矩阵元进行数值计算.

为了清楚地看出 $qp$ 形变对模型能谱的影响,为此,对由(21)式所给出的 Hamiltonian

**表 2 双参数$qp$ – 形变情形下能谱基带最低的 10 个成员**

| | 第(i)种情况 | | | | | | 第(ii)种情况 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\tau=0.05$ | | | $\tau=0.1$ | | | $\tau=0.05$ | | | $\tau=0.1$ | | |
| $n_d$ | $S=0.95$ | $S=1$ | $S=1.05$ | $S=0.95$ | $S=1$ | $S=1.05$ | $S=0.95$ | $S=1$ | $S=1.05$ | $S=0.95$ | $S=1$ | $S=1.05$ |
| 1 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| 2 | 2.11 | 2.00 | 1.90 | 2.12 | 2.01 | 1.91 | 2.11 | 2.00 | 1.90 | 2.09 | 1.99 | 1.90 |
| 3 | 4.17 | 3.76 | 3.41 | 4.17 | 3.79 | 3.44 | 4.14 | 3.74 | 3.39 | 4.11 | 3.71 | 3.42 |
| 4 | 7.03 | 6.03 | 5.21 | 7.13 | 6.11 | 5.28 | 6.96 | 5.97 | 5.61 | 6.87 | 5.89 | 5.09 |
| 5 | 10.82 | 8.81 | 7.25 | 11.04 | 8.99 | 7.39 | 10.67 | 8.69 | 7.14 | 10.45 | 8.51 | 7.00 |
| 6 | 15.66 | 12.12 | 9.56 | 16.12 | 12.47 | 9.78 | 15.37 | 11.89 | 9.32 | 14.93 | 11.55 | 9.05 |
| 7 | 21.70 | 15.95 | 11.90 | 25.54 | 16.57 | 12.36 | 21.15 | 15.55 | 11.60 | 20.36 | 14.97 | 11.17 |
| 8 | 29.11 | 20.33 | 14.45 | 30.54 | 21.33 | 15.16 | 28.18 | 19.68 | 13.99 | 26.82 | 18.73 | 13.31 |
| 9 | 38.06 | 25.25 | 17.09 | 40.41 | 26.81 | 18.15 | 36.55 | 24.25 | 16.41 | 34.38 | 22.81 | 15.44 |
| 10 | 48.79 | 30.75 | 19.82 | 52.47 | 33.07 | 21.32 | 46.44 | 29.27 | 18.87 | 43.09 | 27.16 | 17.51 |

这里所考虑的是具有 20 个玻色子($N=20$)的系统，且由(21)所给出的 Hamiltonian 量仅限于 $E_0=0$, $A=1$ 和 $B=0$ 的情形.

量，将仅限于考虑$E_0=0$，$A=1$和$B=0$的情形．正如文献[7,15]所指出的，基带包含了由$M=2n_d$表征的态．表2给出了双参数$qp$形变情形下能谱基带最低的10个成员．结果发现，第一个形变参数$q$对能带的影响与文献[7]结果一致．另一方面，能谱又极其敏感地依赖于第二个形变参数．

表3给出了由20个玻色子所组成的系统的基带(其中$M=2n_d$)的能级间最初的10个跃迁矩阵元．这时，由方程(23)可得其表达式为

$$\langle N,\ n_d+1,\ 2n_d+2\,|\,Q_+\,|\,N,n_d,2n_d\rangle=\sqrt{[N-n_d]_{qp}[n_d+1]_{qp}}\ ,\qquad(26)$$

结果发现，跃迁矩阵元对$q$的依赖关系与文献[7]的结果一致，而第二个形变参数对四极跃迁算符矩阵元的影响仅相当于一个放大因子($S<1$)和衰减因子($S>1$)作用，并且这种影响与$n_d$的取值无关．

**表3　由20个玻色子($N=20$)所组成的系统的基带(其中$M=2n_d$)的能级间最初的十个跃迁矩阵元**

| | 第(i)种情况 | | | | | | 第(ii)种情况 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\tau=0.05$ | | | $\tau=0.1$ | | | $\tau=0.05$ | | | $\tau=0.1$ | | |
| $n_d$ | $S=0.95$ | $S=1$ | $S=1.05$ | $S=0.95$ | $S=1$ | $S=1.05$ | $S=0.95$ | $S=1$ | $S=1.05$ | $S=0.95$ | $S=1$ | $S=1.05$ |
| 0 | 7.29 | 4.85 | 3.05 | 9.80 | 6.02 | 3.79 | 6.67 | 4.10 | 2.58 | 4.92 | 3.02 | 1.89 |
| 1 | 10.79 | 6.63 | 4.17 | 13.19 | 8.10 | 5.11 | 9.28 | 5.70 | 3.58 | 7.07 | 4.34 | 2.73 |
| 2 | 12.79 | 7.86 | 4.94 | 15.38 | 9.45 | 5.94 | 11.15 | 6.85 | 4.31 | 8.74 | 5.37 | 3.38 |
| 3 | 14.28 | 8.77 | 5.52 | 16.94 | 10.41 | 6.55 | 12.58 | 7.73 | 4.86 | 10.13 | 6.22 | 3.91 |
| 4 | 15.42 | 9.47 | 5.96 | 18.09 | 11.11 | 6.99 | 13.72 | 8.43 | 5.31 | 11.28 | 6.93 | 4.36 |
| 5 | 16.28 | 10.00 | 6.29 | 18.92 | 11.62 | 7.31 | 14.62 | 8.98 | 5.64 | 12.24 | 7.52 | 4.73 |
| 6 | 16.95 | 10.41 | 6.55 | 19.53 | 12.00 | 7.55 | 15.30 | 9.40 | 5.91 | 12.99 | 7.98 | 5.02 |
| 7 | 17.42 | 10.70 | 6.73 | 19.96 | 12.26 | 7.77 | 15.81 | 9.71 | 6.11 | 13.56 | 8.33 | 5.24 |
| 8 | 17.71 | 10.88 | 6.84 | 20.23 | 12.43 | 7.82 | 16.15 | 9.92 | 6.24 | 13.93 | 8.56 | 5.39 |
| 9 | 17.86 | 10.97 | 6.90 | 20.37 | 12.51 | 7.87 | 16.31 | 10.02 | 6.30 | 14.11 | 8.67 | 5.45 |

## 4　结　　语

本文首先给出了双参数$qp$形变量子代数$U_{qp}(U_3)$的对易关系的明确形式，进而构造了具有$U_{qp}(U_3)\supset U_{qp}(U_2)\supset U_{qp}(SO_2)$对称的双参数形变二维相互作用玻色子模型．结果表明，所论模型的能谱和跃迁矩阵元对第二个形变参数的依赖是极其敏感的．此外，与Bonatsos等人关于单参数形变模型的结果一致，构造具有现实物理意义的双参数形变核模型[18]是可能的．因此，本文的结果揭示了构造具有两个形变参数，因而在应用上更为灵活的量子代数核模型的前景．

## 参　考　文　献


[1] Drinfeld V G, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, **1** (1986) 798.

[2] Sklyanin E K, *Funct. Anal. Appl.*, **16** (1982) 262.

[3] Jimbo M, *Lett. Math. Phys.*, **11** (1986) 247.

[4] Raychev P P, Roussev R P, Smirnov Yu F, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **16** (1990) L137.

[5] Iwao S, *Prog. Theor. Phys.*, **83** (1990) 363.
[6] Bonatsos D, Faessler A, Raychev P P, *et al.*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25** (1992) 3257.
[7] Bonatsos D, Faessler A, Raychev P P *et al.*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25** (1992) L267.
[8] Del Sol Mesa A, Loyola G, Moshinsky M *et al.*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26** (1993) 1147.
[9] Barbier R, Meyer J, Kibler M, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **20** (1994) L13.
[10] Drinfeld V G, Alg. Anal., **1** (1989) 58.
[11] Kibler M, 1993 Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter. eds. Florek W., Lipinski D., Lulek T. (Singapore: World Scientific) P445.
[12] Chakrabarti R, Jagannathan R, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24** (1991) L711.
[13] Kibler M, Arnold Sommerfeld Institute, Technical University Clausthal, Germany (27–29, July 1993), in the proceedings of the symposium, eds. Doebner H. D., Dobrev V., Ushveridze A. (World Scientific, Singapore).
[14] Bonatsos D, Interacting Boson Models of Nuclear Structure (Oxford: Clarendon).
[15] Bhaumik D, Sen S, Dutta-Roy B, *Am. J. Phys.*, **59** (1991) 719.
[16] Bonatsos D, preprint 1991 NCSR 'Demokritos'.
[17] Iachello F, Arima A, 1987, The Interacting Boson Model (Cambridge: Cambridge University Press)
[18] Arima A, Iachello F, *Ann. Phys.*, **99** (1976) 253; *Ann. Phys.*, **111** (1978) 201; *Ann. Phys.*, **123** (1979) 468.

# A Two-Parameter Deformed Two-Dimensional Interacting Boson Model With $U_{qp}(U_3) \supset U_{qp}(U_2) \supset U_{qp}(SO_2)$ Symmetry

Zhou Huanqiang

(*Department of Physics, Chongqing University, Chongqing* 630044)

Guan Xiwen

(*Qingdao Workers' University, Qingdao* 266021)

He Jingsong

(*Department of Physics, Yuzhou University, Chongqing* 630033)

Received 20 December 1994

## Abstract

A two-parameter deformed two-dimensional interacting boson model with $U_{qp}(U_3) \supset U_{qp}(U_2) \supset U_{qp}(SO_2)$ symmetry is constructed. It is found that the energy spectrum and transition matrix elements depend very sensitively on the second parameter of deformation.

**Key words** quantum algebra, two-parameter deformation, interacting boson model.