Noether 恒等式的推广及其应用

李 子 平[1)]
(北京工业大学应用物理系　北京　100022)

1994-05-18 收稿

摘　　要

从系统的作用量在普遍的定域和非定域变换下的性质出发，导出了含非定域变换的广义 Noether 恒等式．将其用于高阶微商杨-Mills 场论，求出了有别于 BRS 荷的新 PBRS 守恒荷和非定域变换下的新守恒荷．

关键词　广义 Noether 恒等式，非定域变换，高阶微商杨-Mills 场，守恒荷．

1 引　　言

系统的作用量在无限连续群下的不变性所导致的 Noether 恒等式[1]，在规范场等众多物理领域有重要应用[2]．传统的 Noether 恒等式及其推广[3]均是基于定域变换得到的．在杨-Mills 场论[4]和规范场论的共形对称性研究中[5,6]，均讨论了某些非定域变换．因此，有必要研究系统在一般的非定域变换下的性质．高阶微商场论的研究日益受到人们的关注[7]．本文讨论高阶微系统在一般非定域变换下的性质，将 Noether 恒等式推广到该变更性系统．将其用于高阶微商杨-Mills 场论，求出了有别于 BRS 守恒荷的新的 PBRS 守恒荷和非定域变换下的新守恒荷，这些守恒荷是不能从 Noether 第一定理导出的．这里实际上给出了一个求系统守恒律的新方法．

2　Noether 恒等式的推广

设一动力学系统由场量 $\phi^\alpha(x)(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 来描述，其作用量为

$$I=\int_D \mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x,\phi^\alpha(x),\ \phi^\alpha_{,\mu}(x),\cdots\phi^\alpha_{,\mu(m)}(x),\cdots) \tag{1}$$

其中场的拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 含场量的高阶微商，

$$\phi^\alpha_{,\mu}=\partial_\mu\phi^\alpha_,\ \ \phi^\alpha_{,\mu(m)}=\partial_{\mu(m)}\phi^\alpha=\underbrace{\partial_\mu\partial_\nu\cdots\partial_\lambda}_{m}\phi^\alpha, \tag{2}$$

$\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$，$x^\mu=(t,\vec{x})$．平坦时空度规为 $\eta_{\mu\nu}=(+---)$．$\mathscr{L}$ 中含 ϕ^α 的最高阶微商记为 N．文中假设所有函数及其所需的各阶微商均是足够光滑的．

1) CCAST (Word Laboratory).

考虑作用量在一般的定域和非定域变换下的性质，其无穷小变换的普遍形式设为

$$\begin{cases} x^{\mu\prime} = x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + R^\mu_\sigma \varepsilon^\sigma(x) \\ \phi^{\alpha\prime}(x') = \phi^\alpha(x) + \Delta\phi^\alpha(x) = \phi^\alpha(x) + A^\alpha_\sigma \varepsilon^\sigma(x) + \int_D d^4y F(x,y) B^\alpha_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y) \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$R^\mu_\sigma = r^{\mu(l)}_\sigma \partial_{\mu(l)},\quad A^\alpha_\sigma = a^{\mu(m)}_\sigma \partial_{\mu(m)},\quad B^\alpha_\sigma = b^{\mu(n)}_\sigma \partial_{\mu(n)}, \tag{4}$$

$$r^{\mu(l)}_\sigma = \overbrace{r^{\mu\nu\cdots\lambda}_\sigma}^{l},\quad a^{\mu(m)}_\sigma = \overbrace{a^{\mu\nu\cdots\lambda}_\sigma}^{m},\quad b^{\mu(n)}_\sigma = \overbrace{b^{\mu\nu\cdots\lambda}_\sigma}^{n},$$

$r^{\mu(l)}_\sigma$, $a^{\mu(m)}_\sigma$ 和 $b^{\mu(n)}_\sigma$ 均为 x,ϕ^α 和 $\phi^\alpha_{,\mu(m)}$ 的函数. $\varepsilon^\sigma(\sigma=1,2,\cdots,s)$ 为时空坐标的任意无穷小函数，它们及其所需的各阶微商在区域 D 的边界上为零. 在 (3) 式变换下，假设作用量(1)的变分为

$$\Delta I = \int_D [\partial_\mu(\Lambda^\mu_\sigma \varepsilon^\sigma) + W] d^4x, \tag{5}$$

其中

$$W = U_\sigma \varepsilon^\sigma(x) + \int_D d^4y V_\sigma(x,y)\varepsilon^\sigma(y), \tag{6}$$

$$\Lambda^\mu_\sigma = \lambda^{\mu\nu(i)}_\sigma(x)\partial_{\nu(i)},\quad U_\sigma = u^{\mu(j)}_\sigma(x)\partial_{\mu(j)},\quad V_\sigma = v^{\mu(k)}_\sigma(x,y)\partial_{\mu(k)}, \tag{7}$$

$\lambda^{\mu\nu(i)}_\sigma, u^{\mu(j)}_\sigma$ 和 $v^{\mu(k)}_\sigma$ 均为 $x,\phi^\alpha,\phi^\alpha_{,\mu(m)}$ 的函数. 对于弱不变系统，$W \triangleq 0$. $\triangleq$ 代表等式沿系统运动轨线成立[8]. 在(3)式变换下，由(1)，(3)和(5)式，我们有[9]

$$\begin{aligned} &\int_D d^4x \left\{ \frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha}\left[(A^\alpha_\sigma - \phi^\alpha_{,\mu}R^\mu_\sigma)\varepsilon^\sigma + \int_D d^4y F(x,y)B^\alpha_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)\right] + \partial_\mu(j^\mu_\sigma \varepsilon^\sigma(x)) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu\left[\sum_{m=0}^{N-1} \Pi^{\mu\nu(m)}_\alpha \partial_{\nu(m)} \int_D d^4y F(x,y) B^\alpha_\sigma(y)\varepsilon^\sigma(y)\right]\right\} \\ &= \int_D d^4x \left[U_\sigma(x)\varepsilon^\sigma(x) + \int_D d^4y V_\sigma(x,y)\varepsilon^\sigma(y)\right], \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha} = (-1)^m \partial_{\mu(m)} \mathscr{L}^{\mu(m)}_\alpha, \tag{9}$$

$$\mathscr{L}^{\mu(m)}_\alpha = \frac{1}{m!}\sum_{\substack{\text{指标的}\\\text{所有排列}}} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha_{,\mu(m)}}, \tag{10}$$

$$\Pi^{\mu\nu(m)}_\alpha = \sum_{l=0}^{N-(m+1)} (-1)^l \partial_{\lambda(l)} \mathscr{L}^{\mu\nu(m)\lambda(l)}_\alpha, \tag{11}$$

$$j^\mu_\sigma = \mathscr{L} R^\mu_\sigma + \sum_{m=0}^{N-1} \Pi^{\mu\nu(m)}_\alpha \partial_{\nu(m)}(A^\alpha_\sigma - \phi^\alpha_{,\rho}R^\rho_\sigma) - \Lambda^\mu_\sigma. \tag{12}$$

利用高斯定理，(8)式中的第四项 $\partial_\mu(j^\mu_\sigma\varepsilon^\sigma(x))$ 可化为区域 D 的边界上的积分，根据 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件这一项的积分为零. 对(8)式中剩下的项作分部积分并由 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件，可得在边界上积分的项为零. 然后将所得结果关于 $\varepsilon^\rho(z)$ 求泛函微商，得到

$$\widetilde{A}^\alpha_\rho(z)\left(\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha(z)}\right) - \widetilde{R}^\mu_\rho(z)\left(\phi^\alpha_{,\mu}(z)\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha(z)}\right) + \int_D d^4x \widetilde{B}^\alpha_\rho(z)\left(F(x,z)\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha(x)}\right)$$

$$+\int_D \mathrm{d}^4x\widetilde{B}^{\alpha}_{\rho}(z)\left\{\partial_\mu\left[\sum_{m=0}^{N-1}\Pi^{\mu\nu(m)}_{\alpha}\partial_{\nu(m)}F(x,z)\right]\right\}=\widetilde{U}_\rho(z)+\int_D \mathrm{d}^4x\widetilde{V}_\rho(x,z),$$

$$(\rho=1,2,\cdots,s) \qquad (13)$$

其中$\widetilde{A}^{\alpha}_{\rho}$,$\widetilde{B}^{\alpha}_{\rho}$,$\widetilde{R}^{\mu}_{\rho}$,$\widetilde{U}_\rho$ 和 $\widetilde{V}_\rho$ 分别为 A^{α}_{ρ},B^{α}_{ρ},U_ρ 和V_ρ的伴随算符[9]. 这样就得到了推广的 Noether 第二定理：如果系统的作用量(1)在(3)式变换下的变分适合(5)式，那么系统必存在 s 个含泛函微商 $\delta I/\delta\phi^\alpha$ 的微分积分恒等关系(13)式. 并称(13)式为广义 Noether 恒等式或广义 Bianch 恒等式. 广义 Noether 恒等式的成立与场量 ϕ^α 是否适合场方程无关，它给出了泛函微商 $\delta I/\delta\phi^\alpha$ 之间存在的某些关系式. 对于在(3)式变换下的不变性系统 ($W=0$)，广义 Noether 恒等式为

$$\widetilde{A}^{\alpha}_{\rho}(z)\left(\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha(z)}\right)-\widetilde{R}^{\mu}_{\rho}(z)\left(\phi^{\alpha}_{,\mu}(z)\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha(z)}\right)+\int_D \mathrm{d}^4x\widetilde{B}^{\alpha}_{\rho}(z)\left(F(x,z)\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha(x)}\right)$$

$$+\int_D \mathrm{d}^4x\widetilde{B}^{\alpha}_{\rho}(z)\left\{\partial_\mu\left[\sum_{m=0}^{N-1}\Pi^{\mu\nu(m)}_{\alpha}\partial_{\nu(m)}F(x,z)\right]\right\}=0 \quad (\rho=1,2,\cdots,s) \qquad (14)$$

3 守 恒 律

考虑定域变换下的非不变系统. 如有质量杨-Mills 场的拉氏量在规范变换下是非不变的；有质量 Fermi 场和规范场的规范不变拉氏量，在 Fermi 场的手征变换下是变更的；BRS 不变的非 Abel 规范场的拉氏量，在规范场的单独变换下也是变更的，等等，均属这类情况. 为了与规范变换相联系，讨论变换(3)的一个特殊形式，即在(3)式中 $\Delta x^\mu=0$，而

$$\phi^{\alpha\prime}(x)=\phi^\alpha(x)+A^{\alpha}_{\sigma}\varepsilon^\sigma(x)=\phi^\alpha(x)+(a^{\alpha}_{\sigma}+a^{\alpha\mu}_{\sigma}\partial_\mu)\varepsilon^\sigma(x), \qquad (15)$$

其中 a^{α}_{σ} 和 $a^{\alpha\mu}_{\sigma}$ 均为 $x,\phi^\alpha,\phi^{\alpha}_{,\mu(m)}$ 的函数. 假设在(15)式变换下，系统拉氏量 $\mathscr{L}$ 的变更为 $\delta\mathscr{L}=U_\sigma\varepsilon^\sigma(x)$，而 $U_\sigma=u^{\mu(j)}_{\sigma}\partial_{\mu(j)}$，其中 $u^{\mu(j)}_{\sigma}$ 均为 $x,\phi^\alpha,\phi^{\alpha}_{,\mu(m)}$ 的函数. 在(15)式变换下，由作用量(1)的变分，有基本恒等式

$$\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha}a^{\alpha}_{\sigma}\varepsilon^\sigma(x)+\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha}a^{\alpha\mu}_{\sigma}\partial_\mu\varepsilon^\sigma(x)+\partial_\mu\left[\sum_{m=0}^{N-1}\Pi^{\mu\nu(m)}_{\alpha}\partial_{\nu(m)}A^{\alpha}_{\sigma}\varepsilon^\sigma(x)\right]=U_\sigma\varepsilon^\sigma(x). \qquad (16)$$

此时广义 Noether 恒等式(13)成为

$$a^{\alpha}_{\sigma}\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha}-\partial_\mu\left(a^{\alpha\mu}_{\sigma}\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha}\right)=\widetilde{U}_\sigma(1), \qquad (17)$$

其中 $\widetilde{U}_\sigma$ 为 U_σ 的伴随算符，$\widetilde{U}_\sigma(1)$ 表示伴随于 1[9]. 用 $\varepsilon^\sigma(x)$ 乘(17)式，将所得结果与(16)式相减，当 $u^{\mu\nu}_{\sigma}$ 关于指标 μ,ν 对称；$u^{\mu\nu\lambda}_{\sigma}$ 关于 μ,ν 对称和 μ,λ 对称等等时，可得

$$\begin{aligned}&\partial_\mu J^\mu=0,\\&J^\mu=\sum_{m=0}^{N-1}\Pi^{\mu\nu(m)}_{\alpha}\partial_{\nu(m)}A^{\alpha}_{\sigma}\varepsilon^\sigma(x)+a^{\alpha\mu}_{\sigma}\frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha}\varepsilon^\sigma(x)-u^{\mu}_{\sigma}\varepsilon^\sigma(x)\\&\quad+(\partial_\nu u^{\mu\nu}_{\sigma})\varepsilon^\sigma(x)-u^{\mu\nu}_{\sigma}\partial_\nu\varepsilon^\sigma(x)+u^{\mu\nu\lambda}_{\sigma}\partial_\nu\partial_\lambda\varepsilon^\sigma(x)\\&\quad+(\partial_\nu\partial_\lambda u^{\mu\nu\lambda}_{\sigma})\varepsilon^\sigma(x)-(\partial_\nu u^{\mu\nu\lambda}_{\sigma})(\partial_\lambda\varepsilon^\sigma(x))+\cdots\cdots.\end{aligned} \qquad (18)$$

如果变换(15)式中的 $\varepsilon^{\sigma}(x)=\varepsilon_0^{\rho}\zeta_\rho^{\sigma}(x)$，其中 ε_0^{ρ} 为数值参数，$\zeta_\rho^{\sigma}(x)$ 为 x，ψ^α，$\psi^\alpha_{,\mu(m)}$ 的给定函数。那么沿着系统运动的轨线，$\delta I/\delta\psi^\alpha=0$，于是得到(弱)守恒律

$$\partial_\mu\Big[\sum_{m=0}^{N-1}\Pi_\sigma^{\mu\nu(m)}\partial_{\nu(m)}A_\sigma^a\zeta_\rho^\sigma-u_\sigma^\mu\zeta_\rho^\sigma+(\partial_\nu u_\sigma^{\mu\nu})\zeta_\rho^\sigma-u_\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\zeta_\rho^\sigma+u_\sigma^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu\partial_\lambda\zeta_\rho^\sigma+(\partial_\nu\partial_\lambda u_\sigma^{\mu\nu\lambda})\zeta_\rho^\sigma$$
$$-(\partial_\nu u_\sigma^{\mu\nu\lambda})\partial_\lambda\zeta_\rho^\sigma+\cdots\cdots\Big]=0.\quad(\rho=1,2,\cdots,s)\tag{19}$$

在导出守恒流方程(19)式时，利用了系统的运动方程，故称它为(弱)守恒律。此种导出守恒律的方法与 Noether 第一定理是完全不同的。后者是基于系统作用量在有限连续群下的不变性，而这里研究的是定域变换下的非不变系统。在一定条件下，如上述讨论中 $u_\sigma^{\mu(j)}$ 关于上指标有某些对称性，由广义 Noether 恒等式，亦可导出系统的运动守恒量。这样就给出了一个求守恒律的新方法。

4　高阶微商杨-Mills 理论中的 PBRS 守恒荷

二阶微商杨-Mills 场的经典拉氏量为[10]

$$\mathscr{L}_{\rm YM}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{a\mu\nu}-\kappa D_{b\lambda}^aF^{b\mu\nu}D^{a\lambda}F^{e\mu\nu},\tag{20}$$

其中

$$F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+f_{bc}^aA_\mu^bA_\nu^c,\tag{21}$$

$$D_{b\mu}^a=\delta_b^a\partial_\mu+f_{bc}^aA_\mu^c,\tag{22}$$

f_{bc}^a 为非 Abel 规范群的结构常数。$\mathscr{L}_{\rm YM}$ 在下列规范变换

$$\delta A_\mu^a=D_{b\mu}^a\varepsilon^b(x)$$

下是不变的，其中 $\varepsilon^b(x)$ 为时空点的任意函数。拉氏量 $\mathscr{L}_{\rm YM}$ 具有定域规范不变性，表明系统在相空间中存在固有约束[11]，并且所有约束均是第一类约束。该场的量子化，必须选取规范条件。采用 Coulomb 规范，借助约束系统的 Dirac 理论和路径积分量子化，从 Green 函数的生成泛函导出系统的有效拉氏量为[10]

$$\mathscr{L}_{\rm eff}=\mathscr{L}_{\rm YM}+\mathscr{L}_{\rm gh}-\frac{1}{2\alpha_0}(\partial^iA_i^a)^2,\tag{23}$$

$$\mathscr{L}_{\rm gh}=-\partial^i\bar{C}^aD_{bi}^aC^b,$$

其中 $\bar{C}^a$ 和 C^b 为鬼粒子场，α_0 为参数。在下列的 BRS 变换

$$\begin{cases}\delta A_\mu^a=D_{b\mu}^aC^b\tau,\\ \delta C^a=\dfrac{1}{2}f_{bc}^aC^bC^c\tau,\\ \delta\bar{C}^a=-\dfrac{1}{\alpha_0}\partial^\mu A_\mu^a\tau\end{cases}\tag{24}$$

下，有效拉氏量 $\mathscr{L}_{\rm eff}$ 是不变的。其中 τ 为 Grassmann 参量。按 Noether 第一定理，沿着系统运动的轨线，在 Coulomb 规范条件下，有守恒流

$$J^\nu=\frac{\partial\mathscr{L}_{\rm eff}}{\partial A_{\mu,\nu}^a}D_{b\mu}^aC^b+\frac{\partial\mathscr{L}_{\rm eff}}{\partial A_{\mu,\nu\rho}^a}\partial_\rho(D_{b\mu}^aC^b)-\partial_\rho\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\rm eff}}{\partial A_{\mu,\nu\rho}^a}\right)D_{b\mu}^aC^b$$

$$+\frac{\partial\mathscr{L}_{\rm eff}}{\partial C^a_{,\nu}}\delta C^a+\frac{\partial\mathscr{L}_{\rm eff}}{\partial\bar{C}^a_{,\nu}}\delta\bar{C}^a$$

$$=J^\nu_1-\frac{1}{2}\partial^\nu\bar{C}^a f^a_{be}C^bC^e+\mathrm{D}^{e\nu}_bC^b\partial^0A^a_0, \tag{25}$$

其中

$$J^\nu_1=\frac{1}{\kappa^2}\{[f^m_{ea}A^{e\rho}\partial_\rho F^{m\mu\nu}+f^m_{ae}f^m_{fd}A^e_\lambda A^{\lambda f}F^{d\mu\nu}-\partial_\rho(\partial^\rho F^{a\mu\nu}+f^a_{ed}A^{\rho e}F^{d\mu\nu})]\mathrm{D}^a_{b\mu}C^b$$
$$+(\partial^\rho F^{a\mu\nu}+f^a_{ed}A^{\rho e}F^{d\mu\nu})\partial_\rho(\mathrm{D}^a_{b\mu}C^b)\}-F^{a\nu\mu}\mathrm{D}^a_{b\mu}C^b, \tag{26}$$

从而有 BRS 守恒荷

$$Q=\int_V\mathrm{d}^3xJ^0=\int_V\mathrm{d}^3x\left[J^0_1-\frac{1}{2}f^a_{be}\partial^0\bar{C}^aC^bC^e+\mathrm{D}^{a0}_bC^b\partial^0A^a_0\right]. \tag{27}$$

考虑 BRS 变换中,固定鬼场不变,仅对杨-Mills 场作变换

$$\begin{cases}\delta A^a_\mu=\mathrm{D}^a_{b\mu}C^b\tau,\\ \delta C^a=\delta\bar{C}^a=0.\end{cases} \tag{28}$$

在(28)式变换下,有效拉氏量(23)式是变更的,

$$\delta\mathscr{L}_{\rm eff}=F(\theta)+u^\mu_a\partial_\mu\theta^a+u_a\partial^\mu\partial_\mu\theta^a$$
$$=F(\theta)-\frac{1}{\alpha_0}(\partial^iA^a_i)\partial^\mu\partial_\mu\theta^a-\frac{1}{\alpha_0}f^a_{bc}(\partial^iA^b_i)A^c_j\partial^j\theta^a-f^a_{bc}\partial^\mu\bar{C}^cC^b\partial_\mu\theta^a, \tag{29}$$

其中 $\theta^a=C^a\tau$, $F(\theta)$ 为不含 θ^a 的微商项。由(19)和(29)式,沿着系统运动的轨线,在规范约束 (Coulomb 规范)下,得守恒流

$$J^\nu_P=J^\nu_1+f^a_{bc}\partial^\nu\bar{C}^cC^bC^a, \tag{30}$$

并称 J^ν_P 为 PBRS 守恒流。从而有 PBRS 守恒荷

$$Q_P=\int_V\mathrm{d}^3xJ^0_P=\int_V\mathrm{d}^3x[J^0_1+f^a_{bc}\partial^0\bar{C}^cC^bC^a] \tag{31}$$

显然,这个 PBRS 守恒荷 Q_P 与 BRS 荷Q是不同的。

在量子理论中,BRS 荷作为对物理态的挑选。这里找到的另一个新的 PBRS 荷,作用在物理态上给出其附加条件。PBRS 荷在量子化中的作用有待进一步研究。

5 非定域变换和守恒荷

二阶微商杨-Mills 场的有效拉氏量(23)中的 $\mathscr{L}_{\rm YM}$ 和 $\mathscr{L}_{\rm gh}$ 在下列变换下不变:

$$\begin{cases}A^{a\prime}_\mu(x)=A^a_\mu(x)+\mathrm{D}^a_{\sigma\mu}\varepsilon^\sigma(x), & (32\mathrm{a})\\ C^{a\prime}(x)=C^a(x)+\mathrm{i}g(T_\sigma)^a_bC^b(x)\varepsilon^\sigma(x), & (32\mathrm{b})\\ \partial^\mu\bar{C}^{a\prime}(x)=\partial^\mu\bar{C}^a-\mathrm{i}g\partial^\mu\bar{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma(x) & (32\mathrm{c})\end{cases}$$

其中 $T_\sigma(\sigma=1,2,\cdots N)$ 是规范群生成元的表示矩阵,$\varepsilon^\sigma(x)$是无穷小任意函数。(32c)式又可写为

$$\bar{C}^{a\prime}(x)=\bar{C}^a(x)-\mathrm{i}g\bar{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma(x)+\frac{\mathrm{i}g}{\Box}\partial_\mu[\bar{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b\partial^\mu\varepsilon^\sigma(x)], \tag{32'c}$$

其中 $\Box=\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$。(32′c)式可化为[4]

$$\bar{C}^{a\prime}(x) = \bar{C}^a(x) - \mathrm{i}g\bar{C}^b(x)(T_\sigma)^a_b\varepsilon^\sigma(x) + \mathrm{i}g\int \mathrm{d}^4y\Delta_0(x,y)\partial_\mu[\bar{C}^b(y)(T_\sigma)^a_b\partial^\mu\varepsilon^\sigma(y)], \tag{32''c}$$

其中

$$\Box\Delta_0(x,y) = \mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y). \tag{33}$$

(32″c) 式为非定域变换. 在(32a)、(32b)和 (32″c) 式的变换下，由广义 Noether 恒等式(13)和有效拉氏量(23)式，我们得

$$\tilde{D}^a_{\rho\mu}\left(\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta A^a_\mu(z)}\right) + \mathrm{i}g(T_\rho)^a_b\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta C^a(z)}C^b(z) - \mathrm{i}g\bar{C}^b(z)(T_\rho)^a_b\frac{\delta I_{\mathrm{eff}}}{\delta \bar{C}^a(z)} + \int_D \mathrm{d}^4x\tilde{B}^a_\rho(z)\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\bar{C}^a_{,\mu}}\right)\Delta_0(x,z)\right] = \frac{1}{\alpha_0}\tilde{D}^a_{\rho i}\partial^i(\partial^k A^a_k), \tag{34}$$

其中

$$\tilde{D}^a_{\rho\mu} = -\delta^a_\rho\partial_\mu + f^a_{\rho c}A^c_\mu, \tag{35}$$

$$B^a_\rho(y) = \mathrm{i}g\partial_\mu[\bar{C}^b(y)(T_\rho)^a_b\partial^\mu]. \tag{36}$$

在规范约束 (Coulomb 规范)下，沿着系统运动的轨线，由(34)式得

$$\partial^{\mu_z}\int_D \mathrm{d}^4x\bar{C}^b(z)(T_\rho)^a_b\partial_{\mu_z}\left[\partial_{\nu_x}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\bar{C}^a_{,\nu_x}}\right)\Delta_0(x,z)\right] = 0, \tag{37}$$

从而有守恒荷

$$Q' = \int_V \mathrm{d}^3z\int_D \mathrm{d}^4x\bar{C}^b(z)(T_\rho)^a_b\partial_{0z}\left[\partial_{\nu_x}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}}{\partial\bar{C}^a_{,\nu_x}}\right)\Delta_0(x,z)\right] = \mathrm{const}. \tag{38}$$

将(23)式代入(38)式，守恒荷为

$$Q' = \int_V\int_D \mathrm{d}^3z\mathrm{d}^4x\bar{C}^b(z)(T_\rho)^a_b(\partial_\nu \mathrm{D}^{a\nu}_e C^e)\partial_{0z}\Delta_0(x,z) = \mathrm{const}. \tag{39}$$

参　考　文　献

[1] Noether, E., Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, *Math.-Phys. Kl.*, **2** (1918) 235.
[2] 李子平，经典和量子约束系统及其对称性质，北京：北京工业大学出版社，1993.
[3] 李子平，高能物理与核物理，**12**(1988)784.
[4] 邝宇平、易余萍，高能物理与核物理，**4**(1980)286.
[5] Fradkin, E. S., Palchik, M. Ya., *Phys. Lett.*, **147B** (1984) 86.
[6] Palchik, M. Ya., *Yad. Fiz.*, **42** (1985) 522.
[7] 李子平，中国科学，**A(9)**(1992) 977.
[8] Lusanna, L., *Riv. Nuovo Cimento*, **14** (1991) 1.
[9] Li Ziping, *Int. J. Theor. Phys.*, **26** (1987) 853.
[10] Gitman, D. M. and Tyutin, I. V., Quantization of Fields with Constraints, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[11] Li Ziping, *J. Phys.*, *A*: *Math. Gen.*, **24** (1991) 4261.

Generalization of the Noether's Identities and Application

Li Ziping

(*Beijing Polytechnic University, Department of Applid Physics, Beijing* 100022)

Received 18 May 1994

Abstract

Starting from the transformation property of the action integral of a system under the local and non-local transformation, we derive the generalized Noether's identities connecting with non-local transformation. The applications of the theory to the Yang-Mills field with high-order derivatives are presented. A new conservative PBRS charge is found which differs from BRS conservative charge. The other conservative charge connecting with non-local transformation is also obtained.

Key words generalized Noether's identities, non-local transformation, Yang-Mills field with higher-order derivatives, conservative charge.