

τ 质量测量方案的 Monte Carlo 研究

李 金 李玉山 漆纳丁 薛生田 王 平 胡 涛

马东红 张家文 朱启明 姜春华 姜志进

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

1994-03-07 收稿

摘 要

在 τ 质量实验测量之前对多种测量方案进行了细致的 Monte Carlo 研究, 并进行了比较。确定 τ 质量测量实验采用最大似然法, 并给出可能的测量精度。研究了包括探测效率、束流能散等诸多因素对实验的影响, 同时对实验的实现提出要求。

关键词 τ 质量测量, Monte Carlo 模拟, 最大似然法。

用北京正负电子对撞机 (BEPC) 和北京谱仪 (BES)^[1] 对 τ 轻子的质量进行了精确的测量, 不仅改正了 τ 质量的原测量值, 提高了测量精度, 更重要的是证实了 $e-\mu-\tau$ 弱作用的普适性原理。^[2]

但是, 在实验进行之前, 人们不仅要知道实验的重大物理意义, 还必须了解在 BEPC 和 BES 上进行实验的可行性、现实性, 即在实验开始之前需要回答如下几个问题:^[3]

(1) 存在哪些可能的实验方案, 并比较各方案的可能性及优劣。

(2) 各种实验条件(例如 BEPC 的能量稳定性、能散、BES 对粒子的探测效率等)对实验测量的影响。

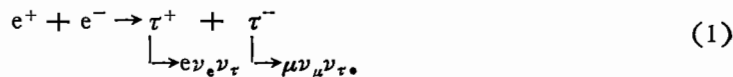
(3) 在一定的 τ 质量测量精度和实验周期的前提下, 哪一种测量方案是最优化的方案。

(4) 在最优化的测量方案选定之后, 预期的测量精度是多大, 即对优化方案进行误差预测, 同时提出对实验和数据分析的要求。

利用 Monte Carlo 方法, 对上述几个方面做了详细的研究, 得到圆满的答案, 成为 τ 质量实验测量的方案选取、参数测定、数据分析和误差处理等的可靠依据。

1 τ 质量测量的基本原理^[4]

当 e^+e^- 对撞的质心能量 W 等于或超过 τ 的质量 m_τ 的两倍时就会产生一对 τ 轻子, τ 的寿命很短, 立即衰变成其他粒子, 例如过程



把等于 $2m_\tau$ 的质心能量 W , 称为这一过程的阈值. 在 e^+e^- 对撞中测量 τ 质量, 就是过程(1)的阈值 $W_s(=2m_\tau)$ 的测定, 而 $\tau^+\tau^-$ 事例可由它们的衰变产物, 例如过程(1)中的 $e\mu$ 来识别.

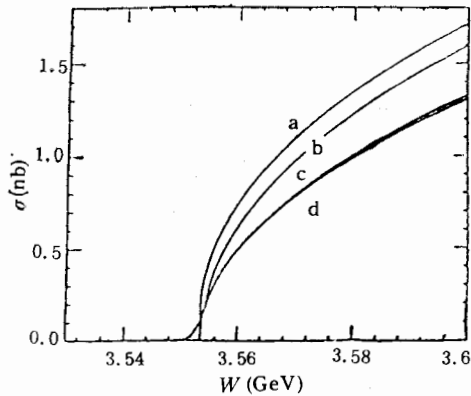


图1 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 阈附近产生截面曲线
a. 考虑库仑修正的截面; b. 无任何修正的0级近似; c. 经束流能散展宽后的截面; d. 考虑初态辐射修正的截面.

为求得过程(1)的阈值, 必须精确测定过程 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 阈值附近的产生截面, 因此, 从理论上研究阈附近 τ 产生截面的行为和从实验上选取逼近阈值的能量测量点是 τ 质量测量的两个关键. 图(1)给出 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 阈附近产生截面 σ 与质心能量 W 的关系.

按照某种实验方案, 在不同的质心能量 W_i 下取一定积分亮度 L_i 的数据, 由事例挑选程序选出 W_i 下某一特定衰变道的实际事例数 N_i , 由于截面同时为 τ 质量 m_τ 和质心能量 W 的函数, 因此该道平均事例数的期望值也为 m_τ 的函数:

$$\begin{aligned} \mu_i(m_\tau) &= [\varepsilon B \sigma(W_i, m_\tau, \Delta W) + \sigma_B] L_i \\ &= [A \sigma(W_i, m_\tau, \Delta W) + \sigma_B] L_i, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 A 为包括探测器接受度在内的事例挑选效率和分支比的乘积. 分支比 B 可以从粒子上查到, 事例挑选效率 ε 可由 Monte Carlo 计算得到. σ_B 为考虑到效率在内的等效本底截面. ΔW 为质心系束流能量的能散.

实验测量得到的事例数 N_i 满足以 $\mu_i(m_\tau)$ 为期望值的泊松分布, 因为阈附近 N_i 很小. 其几率为:

$$P_i(m_\tau) = \frac{\mu_i^{N_i}(m_\tau)}{N_i!} e^{-\mu_i(m_\tau)}. \quad (3)$$

对于一组实验测量值 $W_i, N_i (i = 1, 2, 3 \dots n)$ 可以定义似然函数为

$$L(m_\tau) = \prod P_i(m_\tau), \quad (4)$$

根据最大似然原理, 只有当 m_τ 为真正的 τ 质量时 L 才最大, 故可以找到使 L 最大的一组 W_i, L_i, N_i , 由截面公式拟合出 m_τ (如图2), 同时给出统计误差 Δm_τ .

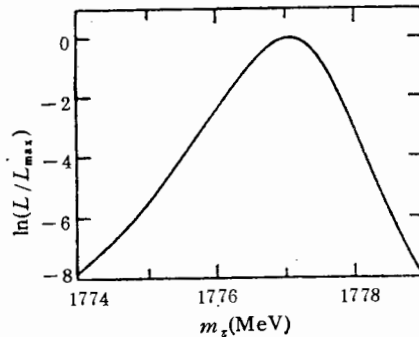


图2 最大似然法拟合 m_τ

2 实验测量的 Monte Carlo 模拟

Monte Carlo 模拟实验测量的过程如下: 假定 τ 质量为 m_{in} , 按照某一实验方案选

取质心能量 W_i 和这一能量下的积分亮度 L_i , 这样就可以由式(2)计算出 μ_i . 由泊松分布随机抽样得到期望值为 μ_i 的事例数 N_i . 有了 W_i, L_i, N_i , 可由式(3)和(4)拟合得到

τ 质量 m_{out} 及统计误差. 假定的 m_{in} 和拟合得到的 m_{out} 会有差值 $\Delta m = m_{out} - m_{in}$. 这就相当于做了一次实验. 实验结果只是真实值的近似, 实验结果与真实值的差别就是实验误差. 图 3 为 Monte Carlo 模拟的框图.

以上只是一次 Monte Carlo 模拟, 为了比较不同的实验方案, 研究这些方案对于某些实验条件的灵敏程度, 一次模拟带有偶然性, 不足以说明问题, 需要很多次(如 500 次, 1000 次)模拟才能达到目的. 对每一次 τ 质量的误差 Δm 进行统计, 作出 Δm 分布图(如图 4). 理想情况下它应该是一个高斯分布, 存在平均值 $Mean$ 和均方差, 可以拟合求出平均值及标准偏差 σ_s .

由于实验方案不同, 会得到不同的 Δm 分布, 拟合得到不同的平均值 $Mean$ 和标准

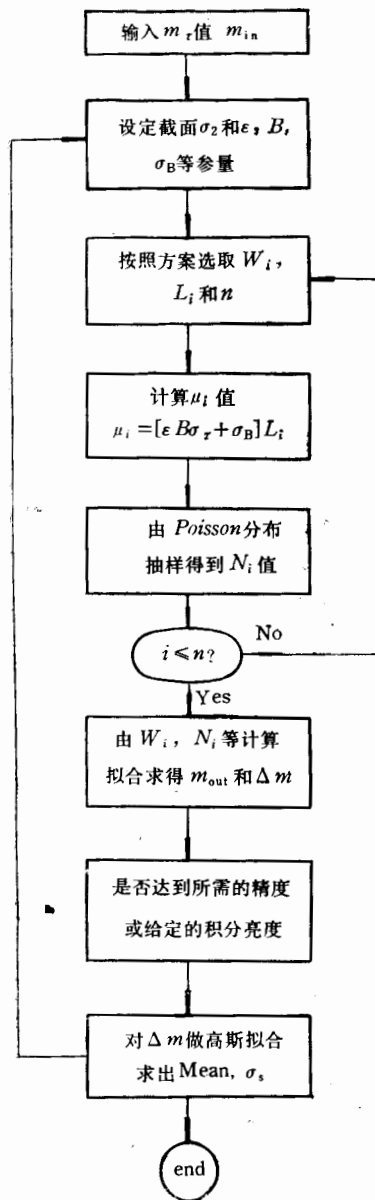


图 3 Monte Carlo 模拟框图

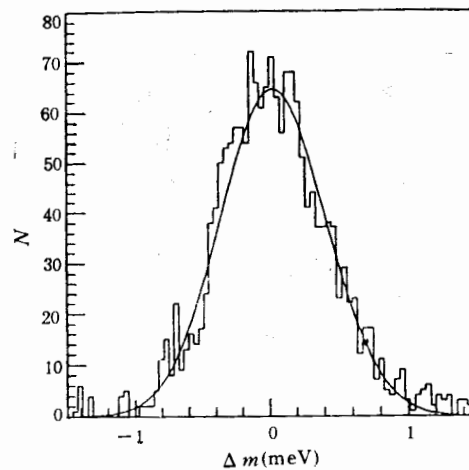


图 4 Monte Carlo $\Delta m = m_{out} - m_{in}$ 分布

偏差. 通过比较它们的平均值和标准偏差(均方差)来比较这些实验方案. 把以下三个量做为衡量指标:

(1) 平均值 $Mean$. $Mean$ 趋于 0 表明实验结果无偏, 不存在系统偏差, 任何方案都不应有大的系统偏差, 即 $Mean$ 不能偏离 0 太远.

(2) 标准偏差 σ_s . 在相同积分亮度下, σ_s 越小表明该方案误差越小. 当积分亮度无

穷大时, 会有 $\sigma_s = 0$ 。实际上, σ_s 反映了实验方案在一定积分亮度下 m_τ 测量结果的统计误差。

(3) 标准偏差 σ_s 在 $[-0.5, 0.5]$ MeV 区间内的几率 Prob, 它是 σ_s 的另一种表达方式。Prob 越大表明实验方案越好。

3 实验方案的 Monte Carlo 研究

3.1 由 Monte Carlo 寻找 m_τ 测量的灵敏区间

给定 m_τ , 取不同能量点区间, 不同能量区间会给出不同的 $\Delta m = m_{out} - m_{in}$ 的统计分布, 比较这些分布, 对应标准偏差 σ_s 最小的能量区间即为最灵敏区间。

假定 $m_\tau = 1784.1$ MeV, 包括探测器接受度和 $e\mu$ 事例挑选的效率 $\varepsilon = 0.15$, 能散度 $\Delta W = 1.8$ MeV, 每个测量点积分亮度 $L_i = 576 \text{ nb}^{-1}$, 测量点的数目 $n = 5$, 本底 $\sigma_B = 0$ 。进行 1001 次模拟。

把 $W - 2m_\tau = -3.34 \text{ MeV} - 7.16 \text{ MeV}$ 的范围内分成 6 个区间, 每个区间的能量范围是 1.5 MeV, 每区间中取 5 个点, 相邻两点间隔 0.3 MeV。表 1 给出不同区间的 Δm 分布的平均值 *Mean* 与均方差 σ_s , 如表所示, 第 I 个区间不可取, 系统偏差太大, 第 II、III 区间最好, 系统偏差接近零, 统计误差 ≤ 0.4 MeV。这说明, τ 质量测量的灵敏区间位于阈附近。

表 1 m_τ 测量不同能量区间的比较

区 间	I	II	III	IV	V	VI
$W - 2m_\tau$ (MeV)	-3.34 - -1.84	-1.84 - -0.34	-0.34 - 1.16	1.16 - 2.66	2.66 - 4.16	5.66 - 7.16
<i>Mean</i> (MeV)	-0.4	-0.03	0.02	0.03	0.08	0.13
σ_s (MeV)	0.19	0.36	0.40	0.45	0.51	0.55

3.2 几种测量方案的 Monte Carlo 研究

研究比较了简单扫描法、二分法与扫描相结合、最大似然法、最大似然与扫描相结合等四种实验方案。

简单扫描法 (Scan) 即在某一能区内大致等间距地取能量点, 在这些能量点下做相同积分亮度的测量。这种方法需要知道 τ 质量真值的大致范围。若能量区间正好在灵敏区, 会得到好的结果。否则距阈太远会使实验结果精度变差。

二分法 (Binary) 是一种快速逼近阈的方法, 它来源于实方程求根平均区间法或顺序表的折半查找方法。二分法测量 m_τ 的过程是这样的: 首先在远低于阈选一能量 $W(0)$ 做实验测量, 若观察不到 $e\mu$ 事例即 $N(0) = 0$, 则在远高于阈的质心能量 $W(1)$ 处做测量, 此点上观察到了 $e\mu$ 事例, 即 $N(1) \neq 0$, 第三个测量点将在这两个能量点之间进行, 即 $W(2) = \frac{W(0) + W(1)}{2}$ 。在该点上若观察到 $e\mu$ 事例 (即 $N(2) \neq 0$) 则选

取下一个能量将低于这一能量, 即 $W(3) = \frac{W(0) + W(2)}{2}$, 若没有观察到 $e\mu$ 事例

($N(2) = 0$), 则 $W(3) = \frac{W(1) + W(2)}{2}$ 要比 $W(2)$ 高, 以此类推, 直到能量点在阈

附近两侧来回摆动或 m_τ 误差达到所需精度。

二分法是在寻找事例数为零与非零的严格分界线, 但实际测量中特别是在阈附近, 由于统计涨落很难找到这一界线, 从而会造成能量选取的错误。为避免二分法造成错误的能量选取, 而将二分法与扫描结合 (Binary + Scan) 起来, 先用二分法找到一定范围, 即接近灵敏区后再扫描, 扫描能量人为地选取, 不受 $e\mu$ 事例数是否为零的影响。

最大似然法^[5] (Likelihood) 是一种参数拟合的方法。具体应用在 m_τ 测量中, 就是在已有能量点 $E(0), E(1), \dots, E(i)$ 的实验基础上, 由最大似然法给出当前的 τ 质量 m_τ , 并作为下一个能量点 $E(i+1)$ 继续实验, 以此类推, 直到得到满意的结果或达到给定的总积分亮度。这一方法的优点是可以很快地逼近阈, 而不存在二分法的缺欠。但在测量实验中应用最大似然法对实验数据的分析要求很高, 只有在分析完当前能量下的所有数据, 才能确定一个能量点。如果先用最大似然法取几个点, 拟合出当前的 τ 质量 m_τ , 在 m_τ 的灵敏区扫描几个点, 这样就减轻了数据分析的负担, 后几个点的数据可在实验测量之后进行, 这就是最大似然与扫描相结合方法 (Likelihood + Scan)。

利用 Monte Carlo 方法对 Scan、Binary + Scan、Likelihood+Scan 和 Likelihood 四种方案作了相同条件下的比较:

假定 τ 质量 $m_\tau = 1784.1\text{MeV}$, $e\mu$ 事例探测和挑选效率 $\varepsilon = 0.15$, BEPC 能散度 $\Delta W = 1.8\text{MeV}$, 每一测量点的积分亮度 $L_i = 576\text{nb}^{-1}$, 总的测量点数 $n = 10$, 本底 $\sigma_B = 0$, 束流能量调节精度为 0.25MeV 。在模拟过程中只有新束流能量 E_{i+1} 与原能量 E_i 之差 $|E_{i+1} - E_i| \geq 0.2\text{MeV}$ 时, 才将能量由 E_i 改变到 E_{i+1} , 否则能量不改变。简单扫描法在质心能量 $3568.2 - 3580.0\text{MeV}$ 之间等间距取 10 点; Binary + Scan 方法中前 5 点采用二分法、后 5 点在第 4、5 能量点间等间距扫描, 二分法起始两端点能量值分别为 $E_1 = 1770.0\text{MeV}$ 和 $E_2 = 1780.0\text{MeV}$; Likelihood 方法将第一点放置在 $E_1 = 1784.0\text{MeV}$, 以后能量点均由前面实验拟合出的 τ 质量 m_τ 来确定, 选择下一能量点的束流能量 $E_{beam} = m_\tau$; Likelihood + Scan 方法中前 5 点采用 Likelihood 法, 后 5 点以 0.25MeV 的步长从前 5 点拟合出的阈开始扫描。分别做出四种方案 $\Delta m = m_{out} - m_{in}$ 的统计分布图, 拟合结果如表 2 所示。

表 2 m_τ 测量不同方案的比较

方 法	Mean (MeV)	σ_s (MeV)	Prob
Scan	0.00	0.62	52.4%
Binary + Scan	0.17	0.48	56.6%
Likelihood + Scan	0.00	0.45	66.2%
Likelihood	0.00	0.39	72.2%

由表 2 可以看出, 在 Binary + Scan 中, Mean $\neq 0$ 表明存在系统偏差, 这一系统偏差按 Scan, Binary + Scan, Likelihood + Scan 和 Likelihood 方向依次减小, 而 Prob 则依次增大, 其统计误差依次减少, 代价是对离线分析的速度、准确性要求依次加

大。另外 Scan 方法的偏差对扫描区间的选择依赖很强。Binary + Scan 方法对起始测量点的依赖很强。而 Likelihood 及 Likelihood + Scan 方法对起始测量点的选择依赖很小。

4 各物理参数对实验结果影响的研究

在对上述几种实验方案做了比较,选定了 Likelihood 方法为最优化方案之后,又对 BEPC 的能量 E_i 的精度、能散、BES 的探测效率 ϵ 以及事例数目、本底等物理参数对 τ 质量测量精度的影响做了研究。

4.1 能量精度对实验结果的影响

如果加速器给出的质心能量 W_i 有一系统偏差,即真正的能量为 $W = W_i + a$, 这样就会造成 τ 质量存在系统偏差 $a/2$,因此,在实验中需要对能量的标称值进行刻度。

4.2 能散对实验的影响

表 3 给出了能散分别为 1.8MeV、1.6MeV、1.4MeV 的结果。这一结果说明,能散越小精度越高,不过,能散变化较大对 τ 质量结果影响不大。这样可以放松对能散值测定的要求。

表 3 能散度对 m_τ 测量实验结果的影响

ΔW (MeV)	σ (MeV)	Prob.
1.8	0.39	72.2%
1.6	0.35	77.6%
1.4	0.35	81.8%

4.3 探测效率对实验的影响

探测效率的增大相当于积分亮度的增大,会带来实验精度的提高。另外,如果实验用到的效率值不是真正的效率数值,就会给实验带来误差,表 4 给出了在 Likelihood+Scan 方法中,效率值偏离实际值对测量结果的影响。模拟结果说明,偏离 10% 对实验结果影响不大,偏离 30% 以上会给实验带来很大偏差。这就要求一方面要提高效率,另一方面要搞清楚效率的真正值。

表 4 效率的偏差对 m_τ 测量实验的影响

效率偏差	Mean (MeV)	σ (MeV)
-33%	-0.35	0.49
-10%	0.04	0.50
0	0.00	0.45

4.4 实验点积分亮度,分配的影响

表 5 给出 Likelihood 方法中运用三种实验点积分亮度分配方法的结果(即总积分亮度相同,每一个能量点的亮度不同),由表看出,三种分配方法的结果差别不大。

表 5 实验点积分亮度分配对 m_τ 测量实验的影响

Li (nb^{-1})	σ (MeV)	Prob.
768,768,672,672,576 576,480,480,384,384	0.41	73.2%
576,576,576,576,576 576,576,576,576,576	0.39	72.2%
384,384,480,480,576 576,672,672,768,768	0.37	73.0%

此外,还研究了相同总积分亮度不同总实验点的情况。比较了总积分亮度为 5760 nb^{-1} , 总实验点分别为 10 和 8, 即每个点的积分亮度分别为 576 nb^{-1} 和 720 nb^{-1} 。由表 6 看出,总实验点数对测量精度影响不大,均为 $\sim 0.4 \text{ MeV}$ 。

表 6 总实验点数目对 m_τ 测量实验的影响

实验点数	σ (MeV)	Prob.
10	0.39	72.2%
8	0.40	73.0%

5 结 论

通过 Monte Carlo 对实验方案的研究,表明最大似然法是最优化的方法,总积分亮度在 $5000-6000 \text{ nb}^{-1}$ 时,精度可达 $\sim 0.4 \text{ MeV}$ 。或者说,误差在 $\pm 0.5 \text{ MeV}$ 之内的可能性很大。对物理参数的研究表明,束流能散,探测效率、积分亮度等对实验精度的影响不是十分尖锐的问题,但必须了解这些参量的偏差大小。而能量值的绝对刻度和它的误差大小则是十分重要的。

参 考 文 献

- [1] 丁慧良等,高能物理与核物理,16(1992)769.
- [2] DELCO Collaboration, *Phys. Rev. Lett.*, **41** (1978) 13; SPEC collaboration, *Phys. Lett.*, **B77** (1978) 331; DASP collaboration, *Phys. Lett.*, **B73** (1978) 109; MARKII collaboration, *Phys. Lett.*, **B109** (1982)119; BES collaboration, *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 3021.
- [3] 李金, τ 质量的测量和对 BEPC, BES 的要求, BES 内部报告 1991.8; 李金, BEPC 和 BES 上 τ 质量测量的实验方案, BES 内部报告,1991.9.
- [4] 丁慧良等,高能物理与核物理,16(1992)885.
- [5] I. Jones, Likelihood Function Method in Tau Mass Experiment, BES 内部报告,1991.

Monte Carlo study for strategies of Tau mass measurement

Li Jin Li Yushan Qi Nading Xue Shengtian Wang Ping Hu Tao
Ma Donghong Zhang Jiawen Zhu Qiming Jiang Chunhua Jiang Zhijing
(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039*)

Received 7 March 1994

Abstract

Before the τ mass experiment, several measuremental strategies were studied in detail by Monte Carlo simulations. After they were widely compared, the likelihood method was suggested to determine the energy points and the possible measuremental accuracy has been given. The effects of many factors to the measurement were simulated, such as the event selection efficiency, energy spread etc, and necessary requirements were proposed to the experiment.

Key words tau mass measurement, Monte Carlo simulation, likelihood method.