第 17 卷 第 8 期
1993 年 8 月

高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 8
Aug., 1993

量子(超)代数在 $q^p=1$ 时的循环表示*

傅洪忱[1)] 葛墨林
(南开数学所理论物理研究室，天津 300071)

摘　　要

利用商模方法和 q-boson 实现方法研究了量子(超)代数在 $q^p=1$ 时的循环表示. 对于与任意有限维单李代数相关的量子代数给出了两种方法的一般理论，而且推广到了量子超代数 $U_q osp(1,2)$. 通过构造 q-Heisenberg-Weyl 超代数的循环表示，q-boson 实现方法推广到构造某些高秩量子超代数的循环表示.

一、引　　言

量子代数及其表示理论在很多非线性物理模型中起着重要作用[1-4]. 最近，在 $q^p=1$ 时的量子代数和量子超代数的循环表示引起人们的关注. De Concini 和 Kac 已经给出了与任意有限维单李代数相关的量子代数在 $q^p=1$ 时循环表示的分类[5]. Date 等结合 Potts 模型构造了 $Sl(n+1)_q$ 和 $U_q A_2^{(2)}$ 的循环表示[6]. 孙昌璞和本文作者利用 q-boson 实现也对量子(超)代数的循环表示进行了研究[7-12].

本文则从一般的观点证明了量子代数 $U_q\mathscr{L}$($\mathscr{L}$ 为任一有限维单李代数)的循环表示是作为左模的 $U_q\mathscr{L}$ 关于某些子模的商模，并且立即将此讨论推广到量子超代数 $U_q osp(1,2)$. 给出了 $U_q\mathscr{L}$ 的循环表示的 q-boson 实现方法，该方法实质上是把用商模方法得到的循环表示的一个特殊情况(即 Verma 模的一个商模)再利用 q-Heisenberg-Weyl 代数的循环表示进行参数化. 本文还对量子超代数的循环表示的 q-boson-fermion 方法进行了讨论.

本文假定 q 是 1 的 p 次根，即 $q^p=1$，且 p 是奇正整数. $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^+$ 分别是全体整数和全体非负整数集合. $\mathbb{C}$ 为复数域，$\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

二、$U_q\mathscr{L}$ 的循环表示：商模法

设 $\mathscr{L}$ 为任一有限维半单李代数，(a_{ij}) 为其 Cartan 矩阵. 则与 $\mathscr{L}$ 相联系的量子代数

---

* 国家自然科学基金资助. 傅洪忱还得到吉林省青年科学技术基金资助.

1) 东北师范大学物理系，长春 130024.

本文 1992 年 2 月 27 日收到.

$U_q\mathscr{L}$ 是$\mathbb{C}$ 上的结合代数，具有生成元 $E_i^{\pm}, K_i, K_i^{-1}$ $(1\leqslant i\leqslant l=\mathrm{rank}\mathscr{L})$和如下关系式

$$K_iK_j = K_jK_i, \qquad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = \mathbb{1}, \tag{2.1a}$$

$$K_iE_j^{\pm}K_i^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}}E_j^{\pm}, \tag{2.1b}$$

$$E_i^+E_j^- - E_j^-E_i^+ = \delta_{ij}(K_i - K_i^{-1})/(q_i - q_i^{-1}), \tag{2.1c}$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}}(-1)^s\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ s\end{bmatrix}_{d_i}(E_i^{\pm})^{1-a_{ij}-s}E_j(E_i^{\pm})^s = 0(i\neq j), \tag{2.1.d}$$

其中矢量$(d_1,\cdots,d_l)$使矩阵(d_ia_{ij})对称且正定，$q_i\equiv q^{d_i}$. 定义上乘法 Δ，antipodc S 和上单位元 ε，$U_q\mathscr{L}$ 具有 Hopf 代数结构.

设 $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$是 $\mathscr{L}$ 的素根系，W 是 Weyl 群. 则 W 中的最长元素 r 可以写成简约形式

$$r = r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_m}, m = \frac{1}{2}(\dim\mathscr{L} - l),$$

其中 r_{i_j}是单反射. 由此给出 $\mathscr{L}$ 的正根系 Φ^+的一个次序

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \beta_2 = r_{i_1}\alpha_{i_2}, \cdots\cdots, \beta_m = r_{i_1}\cdots r_{i_{m-1}}\alpha_{i_m}.$$

现在来构造对应于每一个正根 β_i 的生成元 $E_{\beta_i}^{\pm}$. 根据 Lusztig，定义 $E_i^{(s)}\equiv E_i^s/[s]_{d_i}!$，$F_i^{(s)}\equiv F^s/[s]_{d_i}!$，并引入 $U_q\mathscr{L}$ 的自同构$(1\leqslant i\leqslant l)$：

$$T_iE_i = - F_iK_i, T_iE_j = \sum_{s=0}^{-a_{ij}}(-1)^{s-a_{ij}}q_i^{-s}E_i^{(-a_{ij}-s)}E_jF_i^{(s)}, (i\neq j),$$

$$T_iF_i = - K_i^{-1}E_i, T_iF_j = \sum_{s=0}^{-a_{ij}}(-1)^{s-a_{ij}}q_i^sF_i^{(s)}F_jF_i^{(-a_{ij}-s)}, (i\neq j),$$

$$T_iK_j = K_jK_i^{-a_{ij}}.$$

注意到$\forall\ w\in W, w=r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_k}$(简约表达式)，$T_w=T_{i_1}\cdots T_{i_k}$与 w 的简约表达式选择无关[5]，可以唯一地构造对应于每一 β_s 的生成元：

$$E_{\beta_s}^{\pm} = T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{s-1}}E_{i_s}^{\pm}, \beta_s\in\Phi^+. \tag{2.2}$$

(详细构造及证明参见文献[5]).

注意对 U_qA_l，可用另法明显地构造对应于每一正根 β_s 的生成元 $E_{\beta_s}^{\pm}$，参见文献 Rosso[4](对 $U_qsl(n+1)$)，Burroughs[13](对 $U_qsl(3)$)，和 Jimbo[2,19].

De Concini 和 Kac 证明了当 $q^{2d_i}\neq 1$ 时，$U_q\mathscr{L}$ 的基可以取为[5]

$$\{X(k_i,n_i,r_i) \equiv (E_{\beta_1}^-)^{k_1}\cdots(E_{\beta_m}^-)^{k_m}(E_{\beta_1}^+)^{n_1}\cdots(E_{\beta_m})^{n_m}K_1^{r_1}\cdots K_l^{r_l} \mid k_i,n_i\in\mathbb{Z}^+;\ r_i\in\mathbb{Z}\}. \tag{2.3}$$

则把$U_q\mathscr{L}$ 作为它自己的左模，可以得到左正则表示. 我们将从作为左模的 $U_q\mathscr{L}$ 出发去构造 $U_q\mathscr{L}$ 的 Cyclic 模.

首先，设 I_1 是由$\{K_i-\lambda_i\mid\lambda_i\in\mathbb{C};1\leqslant i\leqslant l\}$生成的子模. 则商模 $V_1(\lambda_i)\equiv U_q\mathscr{L}/I_1$ 的基可以取为：

$$\{X(k_i,n_i) \equiv X(k_i,n_i,0)\mathrm{Mod}I_1(\lambda_i)\mid k_i,n_i\in\mathbb{Z}^+\}. \tag{2.4}$$

在 $V_1(\lambda_i)$中有 $K_i=\lambda_i(1\leqslant i\leqslant l)$.

其次，设 I_2 是由 $\{E_{\beta_i}^{+}-\mu_i E_{\beta_i}^{-}\,|\,\mu_i\in\mathbb{C}^{\times}\}$ 生成的子模，则商模 $V_2(\lambda_i,\mu_i)=V_1(\lambda_i)/I_2$ 的基可取为

$$\{X(k_i)\equiv X(k_i,0)\mathrm{Mod}I_2\,|\,k_i\equiv\mathbb{Z}^{+}\}. \tag{2.5}$$

在 $V_2(\lambda_i,\mu_i)$ 中有 $E_{\beta_i}^{+}=\mu_i E_{\beta_i}^{-}$.

最后，令 I_3 是由 $\{(E_{\beta_i}^{-})^p-\xi_i\,|\,\xi_i\equiv\mathbb{C}^{+}\}$ 生成的子模，则商模 $V_3(\lambda_i,\mu_i,\xi_i)\equiv V_2(\lambda_i,\mu_i)/I_3$ 的基取为

$$\{B(k_i)\equiv X(k_i)\mathrm{Mod}I_3\,|\,0\leqslant k_i\leqslant p-1,k_i\in\mathbb{Z}^{+}\}. \tag{2.6}$$

则在 $V_3(\lambda_i,\mu_i,\xi_i)$ 中有 $(E_{\beta_i}^{-})^p=\xi_i\in\mathbb{C}^{\times}$.

$V_3(\lambda_i,\mu_i,\xi_i)$ 就是要求的 Cyclic 模，这是因为：

(1). 中心元素都是单位矩阵非零常数倍. 事实上，$(E_{\beta_i}^{-})^p=\xi_i$，$(E_{\beta_i}^{+})^p=\mu_i^p\xi_i^{p-1}$，$K_i^p=\lambda_i^p$. 而 Casimir 算子具有形式

$$C=\sum_{\beta_i\in\Phi^{+}}E_{\beta_i}^{-}E_{\beta_i}^{+}f(K_iK_i^{-1})+g(K_i,K_i^{-1}),$$

其中 f 和 g 为 K_i,K_i^{-1} 的一个函数，且 $E_{\beta_i}^{-}E_{\beta_i}^{+}=\mu_i(E_{\beta_i}^{-})^p=\mu_i\xi_i$，故 $C=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\xi_i+f(\lambda_i,\lambda_i^{-1})\in\mathbb{C}^{\times}$.

(2). $V_3(\lambda_i,\mu_i,\varepsilon_i)$ 是 p^m 维的，且包含了 $\dim\mathscr{L}$ 个任意参数，这和 De Concini 和 Kac 的一般结论一致.

注意的是 $V_2(\lambda_i,0)$ 就是 $U_q\mathscr{L}$ 的 Verma 模，这是构造 $U_q\mathscr{L}$ 的 q-boson 实现的出发点.

下面给出一个简单例子 $sl(2)_q\equiv U_q sl(2)$.

$sl(2)_q$ 的左正则表示可求得为

$$\begin{aligned}
E^{+}X(k,n,r)&=X(k,n+1,r)+[k](q-q^{-1})^{-1}\{q^{1-k+2n}X(k-1,n,r+1)\\
&\qquad -q^{k-1-2n}X(k-1,n,r-1)\},\\
E^{-}X(k,n,r)&=X(k+1,n,r),\\
KX(k,n,r)&=q^{2(k-n)}X(k,n,r+1).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

则在 $V_1(\lambda)$ 上(2.7)诱导出一个商表示

$$\begin{aligned}
E^{+}X(k,n)&=X(k,n+1)+[k]\frac{q^{1-k+2n}\lambda-q^{k-1-2n}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}X(k-1,n),\\
E^{-}X(k,n)&=X(k+1,n),\\
KX(k,n)&=\lambda q^{2(k-n)}X(k,n).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

在 $V_2(\lambda,\mu)$ 上诱导的表示为

$$\begin{aligned}
E^{+}X(k)&=\mu X(k+p-1)+[k]\frac{q^{1-k}\lambda-q^{k-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}X(k-1),\mu\in\mathbb{C}^{\times},\\
E^{-}X(k)&=X(k+1),\\
KX(k)&=\lambda q^{2k}X(k).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

最后在 $V_3(\lambda,\mu,\xi)$ 上得到 $sl(2)_q$ 的循环表示

$$E^{+}X(k)=\{[k]\frac{q^{1-k}\lambda-q^{k-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}+\mu\xi\}X(k-1),(k\neq 0),$$

$$
\begin{aligned}
&E^+ X(0) = \mu X(p-1), \qquad (\mu \in \mathbb{C}^\times),\\
&E^- X(k) = X(k+1), (k \neq p-1),\\
&E^- X(p-1) = \xi X(0), \qquad (\xi \in \mathbb{C}^\times),\\
&KX(k) = \lambda q^{2k} X(0),
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

这正是 De Concini 和 Kac 的循环表示[5].

在第 3 小节中将推广此方法到量子超代数 $U_q osp(1,2)$.

三、$U_q\mathscr{L}$ 的循环表示：q-boson 实现法

关于 $U_q\mathscr{L}$ 的循环表示的 q-boson 实现方法已有讨论. 本节目的是把它置于 $U_q\mathscr{L}$ 的商模框架之中. q-boson 实现方法的关键是构造 q-Heisenberg-Weyl 代数[14-16]的循环表示. 文[9]中已经构造了 m 个独立的 q-boson 的 q-Heisenberg-Weyl 代数的循环表示：设 $V_p(m)$ 是由

$$
\{v(k_i) \equiv v(k_1, k_2, \cdots, k_m) \mid k_i \in \mathbb{Z}^+,\ 0 \leqslant k_i \leqslant p-1\} \tag{3.1}
$$

生成的 p^m 维线性空间，则循环表示定义为

$$
\begin{aligned}
&b_t^+ v(k_i) = v(k_i + \delta_{it}), 0 \leqslant k_t \leqslant p-2,\\
&b_t^+ v(k_1, \cdots, k_{t-1}, p-1, \cdots, k_m) = \xi_t v(k_1, \cdots, k_{t-1}, 0, \cdots, k_m), \xi_t \in \mathbb{C}^\times;\\
&b_t v(k_i) = \frac{a_t q^{-k_t} - a_t^{-1} q^{-k_t}}{q - q^{-1}} v(k_i - \delta_{it}), 1 \leqslant k_t \leqslant p-1, a_t \in \mathbb{C}^\times;\\
&b_t v(k_1, \cdots, k_{t-1}, 0, \cdots, k_m) = \xi_t^{-1} \frac{a - a^{-1}}{q - q^{-1}} v(k_1, \cdots, k_{t-1}, p-1, \cdots, k_m),\\
&q^{\pm N_t} v(k_i) = a_t^{\pm} q^{\pm k_t} v(k_i).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

则在(3.2)中 $(b_t^+)^p, b_t^p, (q^{\pm N_t})^p$ 均为单位矩阵带数倍.

剩下的问题是一般地构造 $U_q\mathscr{L}$ 的 q-boson 实现. 还是从做为左模的 $U_q\mathscr{L}$ 出发. 设 $J(\lambda_i)$ 是由 $\{K_i - \lambda_i, E_j^+ \mid \lambda_i \in \mathbb{C}, 1 \leqslant i \leqslant l, 1 \leqslant j \leqslant m\}$ 生成的 $U_q\mathscr{L}$ 的子模，则商模 $V(\lambda_i) = U_q\mathscr{L}/J(\lambda_i)$ 就是通常的 Verma 模. 注意 $V(\lambda_i) \equiv V_2(\lambda_i, 0)$. 显然 $V(\lambda_i)$ 的基可以取为：

$$
\{\widetilde{X}(k_i) \equiv X(k_i, 0, 0) \mathrm{Mod} J(\lambda_i) \mid k_i \in \mathbb{Z}^+\}. \tag{3.3}
$$

为了获得 $U_q\mathscr{L}$ 的 q-boson 实现，定义 m 个独立 q-boson 的 q-Fock 空间 $\mathscr{F}_q(m)$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_q(m):\{\,|k_i\rangle = |k_1, \cdots, k_m\rangle = (b_1^+)^{k_1} \cdots (b_m^+)^{k_m} |0\rangle \,|\, b_i|0\rangle = 0;\\
N_i|0 > 0; k_i \in \mathbb{Z}^+\}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

则映射 $\phi: V(\lambda_i) \to \mathscr{F}_q(m)$

$$
\phi: \widetilde{X}(k_i) \longmapsto |k_i\rangle \tag{3.5}
$$

是线性空间同构. 设 $U_q\mathscr{L}$ 在 $V(\lambda_i)$ 上的表示(Verma)为 ρ，则由 $\Gamma(x) = \phi\rho(x)\phi^{-1}, \forall\, x \in U_q\mathscr{L}$，定义了 $U_q\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{F}_q(m)$ 上的一个表示 Γ，并且

$$
\Gamma(x)_{K_1 \cdots K_m}^{K'_1 \cdots K'_m} = \rho(x)_{K_1 \cdots K_m}^{K'_1 \cdots K'_m}, \forall\, x \in U_q\mathscr{L}. \tag{3.6}
$$

注意到在 $\mathscr{F}_q(m)$ 中的如下关系

$$
b_i^+ |k_i\rangle = |k_i + \delta_{it}\rangle, b_t |k_i\rangle = [k_t] |k_i - \delta_{it}\rangle,
$$

$$q^{N_i}|k_i\rangle = q^{K_i}|K_i\rangle, [N_i+\alpha]|K_i\rangle = [K_i+\alpha]|K_i\rangle, \alpha \in \mathbb{C}, \tag{3.7}$$

可以立即把$\Gamma(x)$写成b_i^+, b_i, N_i的形式,这就是要求的$U_q\mathscr{L}$的q-boson实现.

把所求得的q-boson实现代到式(3.2)中,则得到$U_q\mathscr{L}$的循环表示,此循环表示也是p^m维的,并包含$\dim\mathscr{L}$个独立参数($\lambda_1,\cdots\lambda_l$来自$q$-boson实现,$2m$个$\xi_i, a_i(1\leqslant i\leqslant m)$来自$q$-Heisenberg-Weyl的循环表示(3.2)).值得注意的是以上求$U_q\mathscr{L}$的q-boson实现的过程与q是否为1的根没有关系.

从以上讨论可以看出:q-boson实现本质上就是$U_q\mathscr{L}$的Verma表示,它与模$V_2(\lambda_i,\mu_i)$相比,是令参数$\mu_i=0$.而$V(\lambda_i)/I_3(\xi_i)\equiv V_3(\lambda_i,0,\xi_i)$是一个部分循环表示(因$(E_{\beta_i}^+)^p=0$).因此,本质上$q$-boson实现对应着用商模方法得到的循环表示特殊情况,即将参数μ_i平凡化了.然而,利用q-Heisenberg-Weyl代数的循环表示(3.2),又恢复了此参数,即a_i.注意(3.2)中的ξ_i与$V_3(\lambda_i,\mu_i,\xi_i)$中的$\xi_i$对应,它们反映了$(E_{\beta_i}^-)^p$为单位矩阵的非零"常数"倍这一性质.因此,$q$-boson实现方法是把用商模方法得到的循环表示进行部分参数平凡化,然后再参数化的过程.

下面给出一个例子$sl(2)_q$.

$sl(2)_q$的Verma表示求得为

$$\begin{aligned}
&\rho(E^+)\tilde{X}(k) = [k]\frac{q^{1-k}\lambda - q^{k-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}\tilde{X}(k-1),\\
&\rho(E^-)\tilde{X}(k) = \tilde{X}(k+1),\\
&\rho(K)\tilde{X}(k) = \lambda q^{-2k}\tilde{X}(k).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

由此可以得到$sl(2)_q$在q-Fock空间上的一个表示

$$\begin{aligned}
&\Gamma(E^+)|k\rangle = [k]\frac{q^{1-k}\lambda - q^{k-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}|k-1\rangle,\\
&\Gamma(E^-)|k\rangle = |k+1\rangle,\\
&\Gamma(K)|K\rangle = \lambda q^{-2k}|k\rangle.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

则q-boson实现为

$$E^+ = b\,\frac{\lambda q^{1-N} - \lambda^{-1}q^{N-1}}{q-q^{-1}}, E^- = b^+, K = \lambda q^{-2N}. \tag{3.10}$$

把(3.10)代入(3.2)中,得到$sl(2)_q$的循环表示

$$\begin{aligned}
&E^+\,v(k) = \left(\frac{a^{-1}\lambda q^{1-k} - a\lambda^{-1}q^{k-1}}{q-q^{-1}}\right)\left(\frac{aq^k - a^{-1}q^{-k}}{q-q^{-1}}\right)v(k-1), \quad 1\leqslant k\leqslant p-1,\\
&E^+\,v(0) = \left(\frac{a^{-1}\lambda q - a\lambda^{-1}q^{-1}}{q-q^{-1}}\right)\xi^{-1}\left(\frac{a-a^{-1}}{q-q^{-1}}\right)v(p-1),\\
&E^-\,v(k) = v(k+1), 0\leqslant k\leqslant p-2,\\
&E^-\,v(p-1) = \xi v(0),\\
&k^{\pm}\,v(k) = \lambda a^{-2}q^{-2k}v(k).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

此循环表示通过一个简单的参数变换

$$\begin{aligned}
&\lambda a^{-2} \to \lambda, (q-q^{-1})^{-2}\xi^{-1}(\lambda q - \lambda^{-1}q^{-1})(a-a^{-1}) \to \mu,\\
&\xi \to \xi,
\end{aligned}$$

变为用商模方法得到的循环表示(2.10).

四、$U_q osp(1,2)$ 的循环表示

上两节关于 $U_q\mathscr{L}$ 循环表示方法可以直接推广到量子超代数 $U_q osp(1,2)$. $U_q osp(1,2)$ 是由 V_+, V_- 和 H 生成的结合代数，满足关系[17,18]

$$V_+ V_- + V_- V_+ = -\frac{1}{4}[2H], [H, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V. \tag{4.1}$$

它也有标准的 Hopf 代数结构. 设

$$e_\pm = 2V_\pm, h = 2H, K^\pm = q^{\pm h},$$

则由(4.1)可以证明

$$K^+ e_\pm = q^{\pm 1} e_\pm K^+, K_- e_\pm = q^{\mp 1} e_\pm K^-, \tag{4.2}$$

$$e_+ e_-^{m+1} = (-1)^{m+1} e_-^{m+1} e_+ + (-1)^{m+1} e_-^m \cdot C_m(K^\pm), \tag{4.3}$$

其中

$$C_{2m}(K^\pm) = ([m+1]-[m])\frac{K^+ q^{-m} - K^- q^m}{q-q^{-1}},$$

$$C_{2m+1}(K^\pm) = [m+1]\left(\frac{K^+ q^{-m} - K^- q^m}{q-q^{-1}} - \frac{K^+ q^{-m-1} - K^- q^{m+1}}{q-q^{-1}}\right). \tag{4.4}$$

由此看到 $e_\pm^{2p}$ 和 $(K^\pm)^p$ 是中心元素. 另一个中心元素是 Casimir 算子 C，且 $U_q osp(1,2)$ 的中心是由 $e_\pm^{2p}$, $(K^\pm)^p$ 和 C 生成的.

$U_q osp(1,2)$ 的基可以取为

$$\{X(m,n,s) \equiv e_-^m e_+^n K^{+s} \mid m,n \in \mathbb{Z}^+; s \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.5}$$

则左正则表示为

$$\begin{aligned}
e_+ X(2m,n,s) &= X(2m,n+1,s) + [m](q-q^{-1})^{-1} \\
&\quad \times \{q^{n-m}(q-1)X(2m-1,n,s+1) \\
&\quad + q^{-n+m}(1-q^{-1})X(2m-1,n,s-1)\}. \\
e_+ X(2m+1,n,s) &= -X(2m+1,n+1,s) - ([m+1]-[m])(q-q^{-1})^{-1} \\
&\quad \times \{q^{n-m}X(2m,n,s+1) - q^{-n+m}X(2m,n,s-1)\}. \\
e_- X(m,n,s) &= X(m+1,n,s), \\
K^\pm X(m,n,s) &= q^{\pm m \pm n} X(m,n,s \pm 1).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

设 $I_1(\lambda)$ 是由 $\{K^\pm - \lambda^{\pm 1} \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$ 生成子模，则商空间 $V_1(\lambda) = U_1 osp(1,2)/I_1(\lambda)$ 的基取为

$$\{X(m,n) = X(m,n,0)\mathrm{Mod} I_1(\lambda) \mid m,n \in \mathbb{Z}^+\}. \tag{4.7}$$

在 $V_1(\lambda)$ 上诱导出的商表示为

$$\begin{aligned}
e_+ X(2m,n) &= X(2m,n+1) + [m] \\
&\left\{\frac{\lambda q^{n-m+1} - \lambda^{-1} q^{-n+m-1}}{q-q^{-1}} - \frac{\lambda q^{n-m} - \lambda^{-1} q^{m-n}}{q-q^{-1}}\right\} X(2m-1,n), \\
e_+ X(2m+1,n) &= -X(2m+1,n+1) \\
&- \{[m+1]-[m]\}\frac{\lambda q^{n-m} - \lambda^{-1} q^{m-n}}{q-q^{-1}} X(2m,n),
\end{aligned}$$

$$e_- X(m,n) = X(m+1,n),$$
$$K^{\pm} X(m,n) = \lambda^{\pm 1} q^{\mp m \pm n} X(m,n). \tag{4.8}$$

设 $I_2(\mu)$ 是由 $\{e_+ - \mu e_-^{2p-1} | \mu \in \mathbb{C}^{\times}\}$ 生成的子模. 则在商空间

$$V_2(\lambda,\mu) = V_1(\lambda)/I_2(\mu),$$
$$\{X(m) = X(m,0)\mathrm{Mod} I_2(\mu) | m \in \mathbb{Z}^+\} \tag{4.9}$$

上, (4.8) 诱导出一个商表示

$$e_+ X(2m) = \mu X(2m+2p-1) + [m]$$
$$\{\frac{\lambda q^{1-m} - \lambda^{-1} q^{m-1}}{q - q^{-1}} - \frac{\lambda q^{-m} - \lambda^{-1} q^m}{q - q^{-1}}\} X(2m-1),$$
$$e_+ X(2m+1) = -\mu X(2m+2p) - \{[m+1] - [m]\} \frac{\lambda q^{-m} - \lambda^{-1} q^m}{q - q^{-1}} X(2m),$$
$$e_- X(m) = X(m+1),$$
$$K^{\pm} X(m) = \lambda^{\pm 1} q^{\mp m} X(m). \tag{4.10}$$

设 $I_3(\xi)$ 是由 $\{e_-^{2p} - \xi | \xi \in \mathbb{C}^{\times}\}$ 生成的左模, 则商模 $V_3(\lambda,\mu,\xi) \equiv V_2(\lambda,\mu)/I_3(\xi)$ 的基可以取为

$$\{B(m) = X(m)\mathrm{Mod} I_3(\xi) | \xi \in \mathbb{C}^{\times}, 0 \leqslant m \leqslant 2p-1\},$$

在 $V_3(\lambda,\mu,\xi)$ 上得到一个 $2p$ 维的循环表示

$$e_+ B(2m) = \{[m]\left(\frac{\lambda q^{1-m} - \lambda^{-1} q^{m-1}}{q - q^{-1}} - \frac{\lambda q^m - \lambda^{-1} q^{-m}}{q - q^{-1}}\right) + \mu\xi\} B(2m-1), m \neq 0,$$
$$e_+ B(0) = \mu B(2p-1),$$
$$e_+ B(2m+1) = -\left\{\frac{\lambda q^{1-m} - \lambda^{-1} q^m}{q - q^{-1}}([m+1] - [m]) + \mu\xi\right\} B(2m),$$
$$e_- B(m) = B(m+1), \qquad 0 \leqslant m \leqslant 2p-2,$$
$$e_- B(2p-1) = \xi B(0),$$
$$K^{\pm} B(m) = \lambda^{\pm 1} q^{\mp m} B(m). \tag{4.11}$$

注意从 Verma 表示 (4.10) (其中参数 $\mu \equiv 0$) 不能构造一个 q-boson 实现, 因为 $e_+ X(2m)$ 和 $e_+ X(2m+1)$ 不能写成一个统一的表达式. 但是, $U_q osp(1,2)$ 具有一个不对应于 Verma 表示的 q-boson 实现

$$e_+ = \beta b^+, e_- = \beta b, K^{\pm} = q^{\pm \frac{1}{2}} q^{\pm N}, (\beta = i(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}), \tag{4.12}$$

由此, 得到一个 p 维循环表示

$$\Gamma(e_+) v(k) = \beta v(k+1). (0 \leqslant k \leqslant p-2),$$
$$\Gamma(e_+) v(p-1) = \beta\xi v(0),$$
$$\Gamma(e_-) v(k) = \beta \frac{a q^k - a^{-1} q^{-k}}{q - q^{-1}} v(k-1), (a \neq 1)$$
$$\Gamma(e_-) v(0) = \xi^{-1} \beta \frac{a - a^{-1}}{q - q^{-1}} v(p-1),$$
$$\Gamma(K^{\pm}) v(k) = a^{\pm 1} q^{\pm k} v(k). \tag{4.13}$$

注意 (4.13) 是与 (4.11) 不等价的 Cyclic 表示. 显然,

$$[\Gamma(e_+)]^p = \xi I, \quad [\Gamma(e_-)]^p = \xi^{-1}\left[\prod_{k=1}^{p-1}\frac{aq^k - a^{-1}q^{-k}}{q-q^{-1}}\right]I,$$

即 $e_\pm^p$，$(K^\pm)^p$ 是单位矩阵 I 的非零常数倍. 还应指出，(4.11)只给出了偶数维的循环表示，而(4.13)则给出了奇数维的循环表示(确切地说，如果不假定 p 为正奇数，则可得任意正整数维的循环表示).

五、q-boson 实现方法的超推广

已经看到 q-boson 实现方法是一种非常有效的方法. 如果知道量子(超)代数的 q-boson 实现，则可以立刻"写"出其循环表示. 但大多数量子代数的实现不仅需要 q-boson 算子，而且需要 q-fermion 算子，即所谓的 q-boson-fermion 实现[8]. 因此，必须求得 q-Heisenberg-Weyl 超代数循环表示.

n 个 q-boson 态和 m 个 q-fermion 态的 q-Heisenberg-Weyl 超代数 $\mathscr{H}_q(n,m)$ 是由 $\{b_i^+, b_i, Q_i^\pm = q^{\pm N_i}; f_j^+, f_j, P_j^\pm = q^{\pm F_j} \mid 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m\}$ 生成的结合代数，生成元满足关系：

(1)　q-boson 算子

$$b_ib_i^+ - q^{\mp 1}b_i^+b_i = Q_i^\pm, Q_i^\pm Q_j^\pm = Q_j^\pm Q_i^\pm, Q_i^+Q_i^- = Q_i^-Q_i^+ = \mathbb{1},$$
$$b_i^+Q_j^\pm = q^{\mp\delta_{ij}}Q_j^\pm b_i^+, b_iQ_j^\pm = q^{\pm\delta_{ij}}Q_j^\pm b_i, [x_i, x_j] = 0, (i \neq j; x_i = b_i^+, b_i, Q_i^\pm), \tag{5.1a}$$

(2)　q-fermion 算子

$$\mathrm{f_if_i^+ + q^{\pm 1}f_i^+f_i = P_i^\pm, P_i^\pm P_j^\pm = P_j^\pm P_i^\pm, P_i^+P_i^- = P_i^-P_i^+ = \mathbb{1}},$$
$$\mathrm{f_i^+P_j^\pm = q^{\mp\delta_{ij}}P_j^\pm f_i^+, f_iP_j^\pm = q^{\pm\delta_{ij}}P_i^\pm f_i, \{f_i, f_j\} = f_if_j + f_jf_i = 0}, \tag{5.1b}$$
$$\mathrm{\{f_i^+, f_j^+\} = 0, \{f_i, f_j^+\} = 0 (i = j)}.$$

(3)　q-boson 算子和 q-fermion 算子可交换，

其中 $\deg b_i^+ = \deg b_i = \deg Q_i^\pm = \deg P_i^\pm = 0, \deg f_i^+ = \deg f_j = 1$.

$\mathscr{H}_q(n,m)$ 具有如下性质：

(1). 在 $q^p \equiv 1$ 时，$(b_i^+)^p$，b_i^p 和 $(Q_i^\pm)^p$ 均为中心元素.

(2). 对于 q-fermion 部分，由于 $(b_i^+)^2 = b_i^2 = 0$，所以没有新的中心元素产生. 事实上，q-fermion 算子等同于通常的 fermion 算子，$\mathscr{H}_q(n,m)$ 的超部分本质上并没有"q 变形".

考虑到以上性质和 $\mathscr{H}_q(n,0)$ 的循环表示(3.2)可以构造 $\mathscr{H}_q(n,m)$ 的循环表示. 设 $V_p(n,m)$ 是一个线性空间，具有基

$$\{X(k_i,\alpha_j) \mid 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m; 0\leqslant k_i\leqslant p-1, \alpha_j = 0,1\}. \tag{5.2}$$

则 $\mathscr{H}_q(n,m)$ 的循环表示定义为

$$\rho(b_t^+)X(k_i,\alpha_j) = X(k_i+\delta_{it},\alpha_j), (k_t \neq p-1),$$
$$\rho(b_t^+)X(k_1,\cdots,k_{t-1},p-1,\cdots,k_n,\alpha_j) = \xi_tX(k_1,\cdots,k_{t-1},0,\cdots,k_n,\alpha_j),$$
$$\rho(b_t)X(k_i,\alpha_j) = \frac{a_tq^{k_t} - a_t^{-1}q^{-k_t}}{q-q^{-1}}X(k_i-\delta_{it},\alpha_j), (k_t \neq 0),$$

$$
\begin{aligned}
&\rho(b_t)X(k_1,\cdots,k_{t-1},0,\cdots,k_n,\alpha_j)=\xi_t^{-1}\frac{a_t-a_t^{-1}}{q-q^{-1}}X(k_1,\cdots,k_{t-1},p-1,\cdots k_n,\alpha_j),\\
&\rho(Q_t^{\pm})X(k_i,\alpha_j)=a_t^{\pm 1}q^{\pm k_t}X(k_i,\alpha_j),\\
&\rho(f_t^{+})X(k_i,\alpha_j)=(-1)^{\sum_{j=1}^{t-1}\alpha_j}(1-\alpha_t)X(k_i,\alpha_j+\delta_{jt}),\\
&\rho(f_t)X(k_i,\alpha_j)=(-1)^{\sum_{j=1}^{t-1}\alpha_j}\alpha_t X(k_i,\alpha_i-\delta_{it}),\\
&\rho(P_t^{\pm})X(k_i,\alpha_j)=q^{\pm\alpha_t}X(k_i,\alpha_j).
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

该表示是 $2^m p^n$ 维的，且 $(b_t^+)^p, b_t^p, (Q_t^{\pm})^p$ 均为单位矩阵非零常数倍(若 $a_t\neq\pm 1$).

表示空间具有如下的 Z_2 阶化

$$V_p(n,m)=V_p(n,m)_{\bar 0}\oplus V_p(n,m)_{\bar 1}$$

其中

$$V_p(n,m)_{\bar 0}=\mathrm{span}\{X(k_i,\alpha_j)\mid \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\ \text{是偶数}\}$$

$$V_p(n,m)_{\bar 1}=\mathrm{span}\{X(k_i,\alpha_j)\mid \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\ \text{是奇数}\}$$

分别是偶空间和奇空间(或者相反). 在此意义下，不难证明循环表示(5.3)是偶表示.

这样只要把某一量子超代数的 q-boson-fermion 实现代入(5.3)；就得该量子超代数的循环表示. 对于 $U_q sl(m,n)$ 的情况参见文献[11]，$U_q$osp(1,2n)参见文献[10]. $U_q$osp(m,2n)的 q-boson-fermion 实现见文献[18].

参 考 文 献

[1] V. G. Drinfeld, *Proc. ICM(Berkeley*, 1986), P798.

[2] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63; **11**(1986), 247.

[3] N. Yu. Peshetikhin, LOMI Preprint E-4 and E-11(1987).

[4] M. Rosso, *Commun. Math. Phys.*, **10**(1988), 581; **124**(1989), 307.

[5] C. De. Concini, V. G. Kac, Representations of quantum groups at q roots of 1, Preprint 1990.

[6] E. Date, M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, Preprint RIMS-703, RIMS-706.

[7] C. P. Sun, M. L. Ge, "Cyclic q-deformed bosons and cyclic representations of quantum algebra $sl(2)q$", *J. Phys. A*, in press.

[8] C. P. Sun, M. L. Ge, X. F. Liu, "Cyclic boson algebra and q-boson realization of cyclic representations of quantum algebra $sl(3)$ q at $q^p=1$, *J. Phys. A*, in press.

[9] H. C. Fu, M. L. Ge, *J. Math. Phys.*, **33**(1992), 427.

[10] H. C. Fu, M. L. Ge, *Commun. Theor. Phys.*, **18**(1992), 373.

[11] H. C. Fu, M. L. Ge, "Cyclic representation of the q-deformed Heisenberg-Weyl superalgebras and q-boson-fermion realization of cyclic representations of quantum superalgebra $U_q sl(m,n)$ st $q^p=1$", *Commun. Theor. Phys.*, in press.

[12] C. P. Sun, H. C. Fu, M. L. Ge, *Lett. Math. Phys.*, **23**(1991), 19.

[13] N. Burroughs, *Commun. Math. Phys.*, **127**(1990), 109.

[14] L. C. Biedenharn, *J. Phys.*, **A22**(1989), L873.

[15] A. J. Macfarlane, *J. Phys.*, **A22**(1989), 4581.

[16] C. P. Sun, H. C. Fu, *J. Phys.*, **A22**(1989), L983.

[17] M. Chaichian, P. Kulish, J. Lukierski, *Phys. Lett.*, **B237**(1990), 383.

[18] R. Floreanini, V. P. Spiridonov, L. Vinet, *Phys. Lett.*, **B242**(1990), 383; *Commun. Math. Phys.*, **137** (1991), 149.

[19] M. Jimbo, *Lecture Notes on Physics*, **No. 246**, p335.

Cyclic Representations of Quantum (Super) Algebras At $q^p=1$

FU HONGCHEN GE MOLIN

(*Theoretical Physics Division, Nankai Institute of Mathematics, Tianjin* 300071)

ABSTRACT

Cyclic representations of quantum (super) algebras are studied at $q^p=1$ using two methods: the quotient module method and the q-boson realization method. For the quantum algebras associated with any finite dimensional simple Lie algebra the general theory of two methods is given, and is generated to the quantum superalgebra $U_q osp(1,2)$. By constructing the cyclic representation of q-Heisenberg-Weyl superalgebras the q-boson realization method is generated to construction of cyclic representations of some high-rank quantum superalgebras.