第17卷 第10期
1993年10月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 10
Oct., 1993

$Z \to 3\gamma$ 和 $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ 极化张量的一般形式*

江向东　周威建

（中国科学院高能物理研究所，北京　100039）

摘　　要

在标准模型下，讨论了 $Z \to 3\gamma$ 衰变和 γ-γ 散射过程的单圈极化张量的一般形式. 利用 S_3 对称性和规范不变性对这种极化张量进行限制，从而得到一组约束方程. 本文介绍了这种方法的主要步骤，并且将 W 玻色子圈的结果与费米子圈的结果作了比较.

一、引　　言

在量子场论中，有些在树图一级不会出现的相互作用却能经由圈图产生效应. 经典的一例是光子与光子的散射. 这种散射最初引起人们的兴趣，是因为它联系着一种在经典 Maxwell 理论中不存在的非线性电磁相互作用. 因此，早在五十年代初，当重整化方法建立后，费米子圈对 γ-γ 散射的贡献就已算出[1]. 然而，W 矢量玻色子圈对这种散射的贡献，却一直未曾在标准模型中计算.

$Z \to 3\gamma$ 衰变与 γ-γ 散射在理论计算上有着内在联系. 此衰变是 Z 矢量玻色子的一种稀有衰变模式. 理论上，费米子圈对该模式的贡献已经算出[2]，但 W 玻色子圈的贡献尚未计算出来. 前不久我们给出了 $Z \to 3\gamma$ 和 $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ 经由 W 圈时极化张量的计算结果[3]. 尽管在标准模型下这两种圈图的贡献都很小，还不能在 LEP 上观测到它们的效益，但这两种圈图依然值得研究. 尤其是 W 圈，它涉及的 ZWW，γWW，ZγWW 和 $\gamma\gamma$WW 这些顶角，还一直未被实验触及过.

本文在标准模型下，讨论了 $Z \to 3\gamma$ 和 $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ 过程单圈极化张量的一般形式. 利用 S_3 对称性和规范不变性对这种极化张量进行限制，从而得到了极化张量中的 A、B、C 系数应满足的一组方程. 根据这些约束方程，我们将 57 个 A、B、C 系数约化成只有 4 个是独立的，从而得到了极化张量的简明表式. 我们介绍的这种方法，除了可以大大简化这类过程的复杂繁琐的计算之外，更重要的作用是，可用我们求得的一组约束方程来检验最后的计

* 中国科学院科学基金资助.

本文 1992 年 4 月 6 日收到.

算结果[3]. 在此，我们不仅介绍了这种方法的主要步骤，还在讨论 S_3 对称性和规范不变性的限制时，将 W 玻色子圈的情形与费米子圈的情形一一作了比较，发现了 W 圈的一些新颖之处.

二、极化张量的 S_3 对称形式

考虑 Z→3γ 或 γγ→γγ 这样的过程，其费曼图的 4 条矢量外线是：1 条 Z 玻色子线和 3 条光子线；或 4 条光子线. 我们将能量-动量矢量记为 $\kappa_i^\mu(i=1,2,3,4)$，为了方便起见，κ_i^μ 的取向都朝外. 于是，这种过程的振幅是：

$$I=\varepsilon_{\mu_1}(\kappa_1,\lambda_1)\varepsilon_{\mu_2}(\kappa_2,\lambda_2)\varepsilon_{\mu_3}(\kappa_3,\lambda_3)\varepsilon'_{\mu_4}(\kappa_4,\lambda_4)G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4),\tag{1}$$

其中 $\varepsilon_\mu(\kappa,\lambda)$ 和 $\varepsilon'_\mu(\kappa,\lambda)$ 分别是光子和 Z 玻色子（或光子）的极化矢量，λ_i 是物理的极化自由度，对于光子，$\lambda_i=1,2$；对于 Z，$\lambda_i=1,2,3$. 我们称 $G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4)$ 为极化张量.

为书写方便，我们记：$G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4)\equiv G^{1234}(1234)$，$\begin{pmatrix}1234\\ijlm\end{pmatrix}\equiv\kappa_i^{\mu_1}\kappa_j^{\mu_2}\kappa_l^{\mu_3}\kappa_m^{\mu_4}\equiv(ijlm)$，${}^{23}\begin{pmatrix}14\\im\end{pmatrix}\equiv g^{\mu_2\mu_3}\kappa_i^{\mu_1}\kappa_m^{\mu_4}$，等等.

只要不出现费米子耦合，$G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 的 4 个上标则都是矢量（即不是赝矢量）指标. 因此，根据 Lorentz 性质，总可以把这个极化张量 G 按基矢的某个集合作如下展开：

$$\begin{aligned}G^{1234}(1234)=&\sum_{i,j,l,m}A_{ijlm}(1234)\begin{pmatrix}1234\\ijlm\end{pmatrix}+\sum_{i,m}B^1_{im}(1234)\,{}^{23}\begin{pmatrix}14\\im\end{pmatrix}\\&+\sum_{j,m}B^2_{jm}(1234)\,{}^{13}\begin{pmatrix}24\\jm\end{pmatrix}+\sum_{l,m}B^3_{lm}(1234)\,{}^{12}\begin{pmatrix}34\\lm\end{pmatrix}\\&+\sum_{j,l}B^4_{jl}(1234)\,{}^{14}\begin{pmatrix}23\\jl\end{pmatrix}+\sum_{i,l}B^5_{il}(1234)\,{}^{24}\begin{pmatrix}13\\il\end{pmatrix}\\&+\sum_{i,j}B^6_{ij}(1234)\,{}^{34}\begin{pmatrix}12\\ij\end{pmatrix}+C_1(1234)g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}\\&+C_2(1234)g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}+C_3(1234)g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3},\end{aligned}\tag{2}$$

这里的基矢集合为 $\left\{(ijlm),{}^{23}\begin{pmatrix}14\\im\end{pmatrix},\cdots,g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3};i,j,l,m=1,2,3,4\right\}$. 一般，$i,j,l,m$ 可对 1,2,3,4 求和，于是将有 256 个 A 系数，96 个 B 系数，3 个 C 系数，它们都是 Lorentz 标量.

我们有如下一些限制条件：

1. 能量-动量守恒

$$\sum_{i=1}^{4}\kappa_i^\mu=0\,.\tag{3}$$

2. 光子和 Z 玻色子的极化矢量应满足的条件：

$\varepsilon_\mu(\kappa,\lambda)\kappa^\mu=0,\qquad(\lambda=1,2)$

$\varepsilon'_\mu(\kappa,\lambda)\kappa^\mu=0.\qquad$（当 ε'_μ 是 Z 的极化矢量时，$\lambda=1,2,3$，是物理极化自由度）　(4)

3. 若三条光子外线的动量取向朝外，则总能找到极化张量 G 的一种 S_3(三阶对称群)不变形式.

4. 极化张量应满足规范不变性，这一要求的具体形式将在下面给出.

利用第1条，可将 $\kappa_4^{\mu_4}$ 化为 $-(\kappa_1^{\mu_4}+\kappa_2^{\mu_4}+\kappa_3^{\mu_4})$；利用第2条，可等价地消去方程(2)中带有 $\kappa_1^{\mu_1},\kappa_2^{\mu_2},\kappa_3^{\mu_3}$ 这些因子的 A、B 系数. 于是(2)式中 i,j,l,m 的求和区域可以缩减，使得(2)式可写成下面的形式：

$$
\begin{aligned}
G^{1234}(123)= & \sum_{i,j,l,m} A_{ijlm}(123)\binom{1234}{ijlm}+\sum_{i,m} B^1_{im}(123)^{23}\binom{14}{im} \\
& +\sum_{j,m} B^2_{jm}(123)^{13}\binom{24}{jm}+\sum_{l,m} B^3_{lm}(123)^{12}\binom{34}{lm} \\
& +\sum_{j,l} B^4_{jl}(123)^{14}\binom{23}{jl}+\sum_{i,l} B^5_{il}(123)^{24}\binom{13}{il} \\
& +\sum_{i,j} B^6_{ij}(123)^{34}\binom{12}{ij}+C_1(123)g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} \\
& +C_2(123)g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}+C_3(123)g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

这时的基矢集合为 $\left\{(i,j,l,m),\ ^{23}\binom{14}{im},\cdots,g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3};i=2,3;j=1,3;\ l=1,2;m=1,2,3\right\}$. m 之所以取3个值，是为了使该集合在 S_3 作用下不变，即为了在 S_3 的任一元素作用下，基矢集合内的矢量互相变换. 这里 A、B、C 系数的个数分别为24,30和3.

下面利用三个光子的玻色对称性来进一步简化表式(5).

关于玻色对称性，我们只需考虑三对指标 (μ_1,κ_1)，(μ_2,κ_2)，(μ_3,κ_3) 的各种置换. 三秩对称群 S_3 的6个元素分别是置换：

$$
\begin{aligned}
& P_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, && P_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\ 2), && P_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2\ 3), \\
& P_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 3), && P_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3), && P_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

S_3 的群元 $P_a=(a=1,2,\cdots 6)$ 对 G 的作用例如为：

$$
P_2G^{1234}(1234)=G^{2134}(2134);P_5G^{1234}(1234)=G^{2314}(2314)\ . \tag{7}
$$

由于在任意 P_a 作用下，$(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)$ 都不变，因此，G 中含不含 κ_4，在 P_a 的作用下其结果都一样，所以我们仍可用方程(5)中极化张量的形式.

此外，若 P_a 连续两次对 G 作用，应有：

$$
P_a(P_bG)=(P_a\cdot P_b)G\ .
$$

$P_a\cdot P_b$ 的乘法规则例如为：

$$
P_2\cdot P_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\ .
$$

现在可以确切表达 G 的 S_3 玻色对称性：

$$
G^{1234}(1234)=P_a\{G^{1234}(1234)\},\ P_a\varepsilon S_3(a=1,2,3,4,5,6)\ . \tag{8}
$$

易验证：

$P_2\cdot P_2=P_1, P_5=P_2\cdot P_3, P_4=P_3\cdot P_2\cdot P_3, P_6=P_2\cdot P_3\cdot P_2\cdot P_3$. 因此，(8)式中的 G 只要具有 P_2 和 P_3；或 P_2 和 P_4；或 P_3 和 P_4 等作用下的不变性，即能保证具有 S_3 玻色对称性.

我们以处理 A 系数为例来说明如何寻求表式(5)中的 G 的 S_3 对称形式.

我们把方程(5)中限定的与 A 系数对应的所有基矢$(i\ j\ l\ m)$构成的集合记为 N 集合. 可以把 N 集合中的 24 个元素按 S_3 的不变子集分成 4 组，每组 6 个元素. 顺便提及，与 B 系数对应的基矢集合共有 30 个元素，可分成 6 组，其中 4 组各有 6 个元素，其余 2 组各有 3 个元素. 与 C 系数对应的基矢集合只有 3 个元素，可作一组. 不难看出，任一 P_a 在某个子集上的作用，都导致该子集内元素的一对一映射. 因此，我们不难找到 A、B、C 系数之间的关系，使得(5)式中的 G 具有 S_3 对称性. 我们以 N 集合中的某个不变子集为例来说明这种关系的寻找方法. N 集合中的第一组元素为：

$$(2111),\ (2122),\ (2322),\ (3111),\ (3313),\ (3323).$$

我们将 $P_a(a=1,2,\cdots,6)$作用到$\{A_{2111}(123)(2111)\}$上得到：

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{6}P_a\{A_{2111}(123)(2111)\}=&A_{2111}(123)(2111)+A_{2111}(213)(2122)\\&+A_{2111}(132)(3111)+A_{2111}(321)(3323)\\&+A_{2111}(231)(2322)+A_{2111}(312)(3313).\end{aligned}\tag{9}$$

如果(9)式中的 A 系数满足下列关系：

$$\begin{aligned}&A_{2111}(213)=A_{2122}(123),\qquad A_{2111}(132)=A_{3111}(123),\\&A_{2111}(321)=A_{3323}(123),\qquad A_{2111}(231)=A_{2322}(123),\\&A_{2111}(312)=A_{3313}(123),\end{aligned}\tag{10}$$

(9)式则可写成：

$$\begin{aligned}&A_{2111}(123)(2111)+A_{3111}(123)(3111)+A_{2122}(123)(2122)\\&\quad+A_{3323}(123)(3323)+A_{2322}(123)(2322)+A_{3313}(123)(3313)\\&\quad=\sum_{a=1}^{6}P_a\{A_{2111}(123)(2111)\}.\end{aligned}\tag{11}$$

上式左边的 6 项之和表示成了 $A_{2111}(123)(2111)$这一项的 6 种交换之和，因而明显具有 S_3 对称性. 反之，若(11)式左边是 S_3 不变的，那么分别把 $P_2,P_3,\cdots,P_6$ 作用其上，则可得到(10)式. 所以(10)式是(11)式的左边 S_3 不变的充要条件. 类似地，可以处理余下的 A 系数，B 系数和 C 系数. 最后可将(5)式中的极化张量写成 S_3 对称形式：

$$\begin{aligned}G^{1234}(123)=\sum_{a=1}^{6}P_a\Big\{&A_1(123)\begin{pmatrix}1234\\2111\end{pmatrix}+A_2(123)\begin{pmatrix}1234\\2121\end{pmatrix}+A_3(123)\begin{pmatrix}1234\\2123\end{pmatrix}\\&+A_4(123)\begin{pmatrix}1234\\2311\end{pmatrix}+B_1(123)^{12}\begin{pmatrix}34\\11\end{pmatrix}+B_2(123)^{12}\begin{pmatrix}34\\12\end{pmatrix}\\&+B_3(123)^{12}\begin{pmatrix}34\\13\end{pmatrix}+B_5(123)^{14}\begin{pmatrix}23\\12\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\Big[B_4(123)^{14}\begin{pmatrix}23\\11\end{pmatrix}\\&+B_6(123)^{14}\begin{pmatrix}23\\32\end{pmatrix}+C_1(123)g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $A_1 \equiv A_{2111}, A_2 \equiv A_{2121}, A_3 \equiv A_{2123}, A_4 \equiv A_{2311}, B_1 \equiv B^3_{11}, B_2 \equiv B^3_{12}, B_3 \equiv B^3_{13}, B_4 \equiv B^4_{11}, B_5 \equiv B^4_{12}, B_6 \equiv B^4_{32}$；

此外有：

$$B_4(123) = B_4(132),\ B_6(123) = B_6(132),\ C_1(123) = C_1(213)\,. \tag{13}$$

方程(12)已把方程(5)中57个独立的 A、B、C 系数约化为11个独立系数，其中4个 A 系数，6个 B 系数，1个 C 系数．并且，这些系数还具有方程(13)所示的对称性．可见，利用 S_3 对称性，可以大大简化极化张量的计算．

三、规范不变的极化张量

上面已经得到具有 S_3 对称性的极化张量的表式(12)．下面进一步把规范不变性用在这种极化张量上，看看会有什么样的限制．

从流守恒的公式出发，得到规范不变性的表达式：

$$\kappa_{1\mu_1}\varepsilon_{\mu_2}(\kappa_2,\lambda_2)\varepsilon_{\mu_3}(\kappa_3,\lambda_3)\varepsilon'_{\mu_4}(\kappa_4,\lambda_4)G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4) = 0. \tag{14}$$

对 $Z\to 3\gamma$ 过程，规范不变性还要求：

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\mu_1}(\kappa_1,\lambda_1)\kappa_{2\mu_2}\varepsilon_{\mu_3}(\kappa_3,\lambda_3)\varepsilon'_{\mu_4}(\kappa_4,\lambda_4)G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4) = 0\\ &\varepsilon_{\mu_1}(\kappa_1,\lambda_1)\varepsilon_{\mu_2}(\kappa_2,\lambda_2)\kappa_{3\mu_3}\varepsilon'_{\mu_4}(\kappa_4,\lambda_4)G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4) = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

这里，λ_i 是物理的极化自由度．若(14)式中的 G 是 S_3 对称的，则(14)式的成立保证了(15)式成立．

对费米子圈，规范不变性条件可以写成[1]：

$$\kappa_{1\mu_1}G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4) = 0. \tag{16}$$

这里的 G 乃是(12)式中具有明显 S_3 对称性的 G．

要让 $\kappa_{1\mu_1}$ 作用到 G 上的结果为零，则需要所有基矢的系数都为零．因此，将(12)式中的 G 代入方程(16)，可得到如下11个方程：

$$\begin{aligned}
&[12]A_1(123)+[13]A_1(132)+B_1(123)+B_1(132)+B_4(123)=0\\
&[12]A_2(213)+[13]A_3(312)+B_2(123)+B_3(132)=0\\
&[12]A_2(123)+[13]A_4(132)+B_5(123)+B_2(213)=0\\
&[12]A_1(213)+[13]A_4(213)+B_1(213)=0\\
&[12]A_3(123)+[13]A_4(321)+B_3(213)=0\\
&[12]A_3(321)+[13]A_3(231)+B_6(123)=0\\
&[12]A_1(231)+[13]A_2(231)=0\\
&[12]B_2(231)+[13]B_1(321)=0\\
&[12]B_3(231)+[13]B_3(321)+C_1(231)=0\\
&[12]B_6(312)+[13]B_5(312)+C_1(123)=0\\
&[12]B_4(231)+[13]B_5(231)=0,\ [ij]\equiv\kappa_i\cdot\kappa_j,\ (i,j=1,2,3).
\end{aligned} \tag{17}$$

根据这组方程，可以把11个 A、B、C 系数约化成3个独立的 A 系数，例如 A_1、A_3 和 A_4．只须计算这3个系数，就可得到极化张量的最后结果．

上述做法对 Z→3γ 和 γγ→γγ 的费米子单圈计算是正确的，直接从费曼图算得的极化张量既具有 S_3(或 S_4)对称性，又确实满足规范不变条件(16)式. 然而，在玻色子单圈情形却有新颖之处. 我们发现，直接从费曼图算得的保持明显 S_3 对称性的 G 并不满足方程(16). 具体说来，在验证从(16)式所得的 A 系数的约束方程时，在 M_W的零级展开式中发现有一组系数应满足的等式却不成立. 这使得我们必须进一步研究在 W 圈情形规范不变性的具体形式.

事实上，按费曼规则计算 Z→3γ 等过程时，最终具有直接物理测量意义的是过程的振幅 I，即表式(1)，而不是极化张量 G. 根据光子和 Z 玻色子的极化矢量应满足的条件(4)式，对同一物理过程，可以有许多不同的 G，这些虽不相等但对应着相同振幅的 G，称它们是互相等价的. 因此，可以将(2)式中的直接从费曼图算得的 G 作某种等价变换，让它变成能满足规范不变性表式(16)但一般不再明显具有 S_3 对称性的 G'. 下面讨论如何从(2)式中的 G 导出 G'.

为简单起见，假定 $G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4)$中的指标 1 表示光子，指标 2、3、4 对应荷质量矢量玻色子. 质量为 M 的矢量玻色子的极化矢量 $\varepsilon_\mu(\kappa,\lambda)$满足下列关系：

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\varepsilon_\mu(\kappa,\lambda)\varepsilon_\nu(\kappa,\lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{\kappa_\mu\kappa_\nu}{M^2}. \tag{18}$$

利用方程(18)，规范不变性条件即方程(14)能变换成如下形式：

$$\begin{aligned}
&-\kappa_{1\mu_1}G^{\mu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(1234) + \frac{1}{M^2}\kappa_{2\mu_1}\left[\kappa_{2\mu_2}G^{\mu_1\mu_2\nu_3\nu_4}(1234)\kappa_2^{\nu_2} + \kappa_{3\mu_3}G^{\mu_1\nu_2\mu_3\nu_4}(1234)\kappa_3^{\nu_3}\right.\\
&\left.+\kappa_{4\mu_4}G^{\mu_1\nu_2\nu_3\mu_4}(1234)\kappa_4^{\nu_4}\right] - \frac{1}{M^4}\kappa_{1\mu_1}\left[\kappa_{2\mu_2}\kappa_{3\mu_3}G^{\mu_1\mu_2\mu_3\nu_4}(1234)\kappa_2^{\nu_2}\kappa_3^{\nu_3}\right.\\
&\left.+\kappa_{2\mu_2}\kappa_{4\mu_4}G^{\mu_1\mu_2\nu_3\mu_4}(1234)\kappa_2^{\nu_2}\kappa_4^{\nu_4} + \kappa_{3\mu_3}\kappa_{4\mu_4}G^{\mu_1\nu_2\mu_3\mu_4}(1234)\kappa_3^{\nu_3}\kappa_4^{\nu_4}\right]\\
&+\frac{1}{M^6}\kappa_{1\mu_1}\kappa_{2\mu_2}\kappa_{3\mu_3}\kappa_{4\mu_4}G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(1234)\kappa_2^{\nu_2}\kappa_3^{\nu_3}\kappa_4^{\nu_4} = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

方程(19)的左边是带有矢量指标的 3 阶张量. 因此可以将它按如下基矢展开：

$$\{\kappa_j^{\nu_2}\kappa_l^{\nu_3}\kappa_m^{\nu_4}, g^{\nu_2\nu_3}\kappa_m^{\nu_4}, g^{\nu_2\nu_4}\kappa_l^{\nu_3}, g^{\nu_3\nu_4}\kappa_j^{\nu_2}\}, \tag{20}$$

其中每个 j、l、m 指标，根据能量-动量守恒，可取 1、2、3、4 中的 3 个数. 注意到 $\kappa_2^{\nu_2}, \kappa_3^{\nu_3}, \kappa_4^{\nu_4}$ 已出现在方程(19)，不妨取 $j,l=1,2,3$；$m=1,2,4$. 将(5)式中的 G 代入(19)式，发现，在(5)式中 $m=1,2,3$，而在(19)式中是取 1,2,4. 为保持在相同基矢展开中的一致性，应将 $\kappa_3^{\nu_4}=-(\kappa_1^{\nu_4}+\kappa_2^{\nu_4}+\kappa_4^{\nu_4})$代入(5)式，于是可将(5)式中的 G 分成两部分：

$$G^{1234}(1234) = G'^{1234}(1234) + K^{1234}(1234). \tag{21}$$

其中 K 包含所有 $\kappa_4^{\nu_4}$ 的项，而 G' 中不含 $\kappa_4^{\nu_4}$ 项. 这样，将(21)式中的 G 代入(19)式后，(19)式的左边也分成两部分，一部分是 $\kappa_{1\mu_1}G'^{\mu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$，它不再包含任何一个 $\kappa_2^{\nu_2}, \kappa_3^{\nu_3}, \kappa_4^{\nu_4}$；而另一部分每一项则至少包含一个这样的项. 用这种方法，(19)式的左边按(20)式中的基矢(j、$l=1,2,3$；$m=1,2,4$)展开，分成的这两部分应分别为零，于是有：

$$\kappa_{1\mu_1}G'^{1234}(1234) = 0. \tag{22}$$

在推导方程(22)时，我们曾假定指标 2,3,4 对应荷质矢量玻色子. 事实上，它们可以对应光子，或者一些对应光子而余下的对应荷质玻色子，都能得到(22)式.

总之，我们很容易从(5)式中的 G 得到与之等价的 G'. 只需将 $\kappa_3^{\mu_4}=-(\kappa_1^{\mu_4}+\kappa_2^{\mu_4}+\kappa_4^{\mu_4})$ 代入(5)式，同时舍去 G 中所有含 $\kappa_4^{\mu_4}$ 的项，余下部分便是 G'. G' 虽然不具有 S_3 对称性，但依然保持 S_2 对称性，即 P_2 作用其上不变.

利用这种方法来处理(12)式中的具有明显 S_3 对称性的 G，得到如下的 G'：

$$
\begin{aligned}
G'^{(123)}(123) = {} & A_{13}(123)(2111) + A_{13}(213)(2122) + A_{12}(132)(3111) + A_{12}(231)(2322) \\
& + A_{23}(123)(2121) + A_{23}(213)(2112) - A_{12}(312)(3311) - A_{12}(321)(3322) \\
& - A_{13}(312)(3312) - A_{23}(321)(2321) - A_{13}(321)(3321) - A_{23}(312)(3112) \\
& - A'_4(312)(2311) - A'_4(321)(3122) + A'_4(132)(3121) + A'_4(231)(2312) \\
& + B_{13}(123)^{12}\begin{pmatrix}34\\11\end{pmatrix} + B_{13}(213)^{12}\begin{pmatrix}34\\22\end{pmatrix} + B_{12}(132)^{13}\begin{pmatrix}24\\11\end{pmatrix} \\
& + B_{12}(231)^{23}\begin{pmatrix}14\\22\end{pmatrix} + B_{23}(123)^{12}\begin{pmatrix}34\\12\end{pmatrix} + B_{23}(213)^{12}\begin{pmatrix}34\\21\end{pmatrix} \\
& - B_{12}(321)^{23}\begin{pmatrix}14\\32\end{pmatrix} - B_{12}(312)^{13}\begin{pmatrix}24\\31\end{pmatrix} - B_{23}(132)^{13}\begin{pmatrix}24\\12\end{pmatrix} \\
& - B_{13}(321)^{23}\begin{pmatrix}14\\31\end{pmatrix} - B_{23}(231)^{23}\begin{pmatrix}14\\21\end{pmatrix} - B_{13}(312)^{13}\begin{pmatrix}24\\32\end{pmatrix} \\
& + B_5(123)^{14}\begin{pmatrix}23\\12\end{pmatrix} + B_5(213)^{24}\begin{pmatrix}13\\21\end{pmatrix} + B_5(132)^{14}\begin{pmatrix}23\\31\end{pmatrix} \\
& + B_5(321)^{34}\begin{pmatrix}12\\23\end{pmatrix} + B_5(231)^{24}\begin{pmatrix}13\\32\end{pmatrix} + B_5(312)^{34}\begin{pmatrix}12\\31\end{pmatrix} \\
& + B_4(123)^{14}\begin{pmatrix}23\\11\end{pmatrix} + B_4(213)^{24}\begin{pmatrix}13\\22\end{pmatrix} + B_4(321)^{34}\begin{pmatrix}12\\33\end{pmatrix} \\
& + B_6(123)^{14}\begin{pmatrix}23\\32\end{pmatrix} + B_6(213)^{24}\begin{pmatrix}13\\31\end{pmatrix} + B_6(321)^{34}\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} \\
& + C_1(123)g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} + C_1(132)g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} + C_1(321)g^{\mu_2\mu_3}g^{\mu_1\mu_4},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

其中：$A_{12}(123)\equiv A_1(123)-A_2(213)$，$A_{13}(123)\equiv A_1(123)-A_3(213)$，

$A_{23}(123)\equiv A_2(123)-A_3(123)$，$B_{ij}(123)\equiv B_i(123)-B_j(123)$，

$(i,j=1,2,3)$，　$A'_4(123)\equiv A_4(123)-A_4(231)$.

此外有：

$$A_{12}(123)+A_{23}(213)=A_{13}(123),\quad B_{12}(123)+B_{23}(123)+B_{31}(123)=0,$$

所以方程(23)中只有 9 个 A、B、C 系数是独立的.

现在将(23)式中的 G' 代入(22)式，并按(20)式中的基矢($j=1,3$；$l,m=1,2$)展开. 由此得到 A、B、C 系数应满足的 11 个方程：

$$[12]A_{13}(123)+[13]A_{12}(132)+B_{13}(123)+B_{12}(132)+B_4(123)=0,$$

$$[12]A_{23}(213)-[13]A_{23}(312)+B_{23}(123)-B_{23}(132)=0,$$

$$[12]A_{23}(123)+[13]A'_4(132)+B_{23}(213)+B_5(123)=0,$$

$$[12]A_{13}(123)-[23]A'_4(312)+B_{13}(123)=0,$$

$$B_5(132)-[13]A_{12}(312)-[12]A_4'(312)-B_{12}(312)=0\ ,$$
$$B_6(123)-[12]A_{23}(321)-[13]A_{13}(321)=0,$$
$$[12]A_{12}(231)-[13]A_{12}(321)=0,$$
$$[12]B_{12}(231)-[13]B_{12}(321)=0,$$
$$[12]B_4(213)+[13]B_5(231)=0,$$
$$C_1(321)-[12]B_{23}(231)-[13]B_{13}(321)=0,$$
$$C_1(123)+[12]B_6(321)+[13]B_5(312)=0\ . \tag{24}$$

不难看出，从费米子单圈情形下所得的方程(17)，能导出玻色子单圈情形下所得的方程(24). 反之却不然.

利用方程(13)和(24)，能进一步得到如下一些限制系数的方程.

$$B_{12}(123)=B_5(213)-[12]A_{12}(123)-[23]A_4'(123)\ ,$$
$$B_{23}(123)=-B_5(213)-[12]A_{23}(213)-[23]A_4'(231)\ ,$$
$$B_{13}(123)=[23]A_4'(312)-[12]A_{13}(123),$$
$$B_4(123)=[23]\{A_4'(132)-A_4'(312)\}-B_5(312),$$
$$B_6(123)=[12]A_{23}(321)+[13]A_{13}(321),$$
$$C_1(123)=-[13]B_5(312)-[12]\{[23]A_{23}(123)+[13]A_{13}(123)\}. \tag{25}$$

以及：

$$[13]A_{12}(123)-[23]A_{12}(213)=0,$$
$$[12]B_5(123)-[13]B_5(132)=0,$$
$$B_5(123)-B_5(321)=[13]\{A_4'(312)-A_4'(132)\}. \tag{26}$$

由于方程(24)—(26)的限制，可以把所有的 A、B、C 系数仅用 4 个独立系数例如 A_{12}，A_{23}，A_4' 和 B_5 来所示. 对费米子单圈，只需计算 A 系数. 对玻色子单圈则不然，要想计算极化张量，不仅需要计算 A 系数，还须计算某个 B 系数，故增加了计算的难度. 这是不同于费米子圈的另一点.

四、讨　　论

本文仅讨论了极化张量的 S_3 对称性. 我们知道在 γ-γ 散射中极化张量可以写成 S_4 对称形式[1]. 对 Z→3γ 衰变，在费米子圈情形也能做到这点. 在 W 圈的情形如何？我们研究后发现此时的 G 也能写成 S_4 对称的形式[3].

对 Z→3γ 过程，在玻色子圈的情形，具有明显 S_3 对称性的极化张量 G 并不满足规范不变性条件(16)式，要找到满足(16)式的 G'，必须对 G 做等价变换. 而在费米子圈时，G 是满足(16)式的. 此外，在费米子圈的情形，极化张量 G 可以简化成只是 A 系数的函数，而对 W 圈，G' 必须是 A 和 B 两种系数的函数，故计算起来繁琐得多.

在玻色子单圈情形，只要算出 A_{12}、A_{23}、A_4' 和 B_5 这 4 个系数，再利用(24)式就能得到极化张量的最后结果. 我们在文献[3]计算了(12)式中所有的 A、B 系数，并对(24)式中这组约束方程作了部分的验证.

我们感谢杜东生和东方晓两位教授的有益的讨论!

参 考 文 献

[1] R. Karplus, M. Neuman, *Phys. Rev.*, 80(1950), 380; 83(1951), 776;
V. Constantini, B. De Tollis, G. Pistoni, *Nuovo Cimento*, A2(1971), 733.

[2] M. L. Laursen, K. O. Mikaelian, M. A. Samuel, *Phys. Rev.* D23(1981), 2795;
D25(1982)710; M. L. Laursen, M. A. Samuel, *Zeits fur Physik*, C14(1982), 325;
E. W. N Glover and J. J. van der Bij, CERN 89-08, volume 2, P1-57.

[3] X. D. Jiang, X. J. Zhou, BIHEP-TH-91-37.

General Forms of the Polarization Tensors of $Z\rightarrow 3\gamma$ and $\gamma\gamma\rightarrow\gamma\gamma$

JIANG XIANGDONG ZHOU XIANJIAN
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing* 100039)

ABSTRACT

In this paper the general forms of the polarization tensors of $Z\rightarrow 3\gamma$ decay and γ-γ scattering at one-loop level are discussed. The constrained equations for the tensors are deduced from the S_3 symmetry and gauge invariance. We give the procedures of our method and compare the results of W-boson-loop with those of fermion-loop.