第16卷 第9期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 9
1992年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1992

含碎裂机制的广义凝结方程的几何学表述*

李 富 斌[1)]
（华东理论物理所，上海 200237）

摘 要

本文采用几何学方法将含碎裂机制的广义凝结方程表述为一个赋予仿射联络的无限维空间中的代表点的测地线运动方程.

一、引 言

凝结方程是描述由许多碎片所组成的系统的唯象几率方程，该方程描述了质谱的演化. 当将凝结方程推广到包含冷却物体碎裂的系统时，凝结方程就变成了含碎裂机制的广义凝结方程. 凝结方程以及广义凝结方程均可应用到如下一些课题的研究：例如雨滴的大小，太阳系统的形成，尘埃微粒的生长，最初的恒星质量函数和膨胀宇宙中的星簇等[1-7].

1972年 Safronov 曾在文献[3]中给出了包含碎裂机制的广义凝结方程[3]：

$$\begin{aligned} dn(m,t)/dt = &\frac{1}{2}\int_0^m W(m', m-m')A(m', m-m')n(m', t)n(m-m', t)dm' \\ &- n(m,t)\int_0^\infty A(m, m')n(m', t)dm' \\ &+ \frac{1}{2}\int_m^\infty dm''\int_0^{m''} dm' n_1(m/m''-m', m')[1-W(m', m''-m')] \\ &\times A(m', m''-m')n(m', t)n(m''-m', t), \end{aligned} \tag{1}$$

当$W=1$时，方程(1)就又复原为原来的不包含碎裂机制的凝结方程.

方程(1)是一个高阶非线性方程，该方程的通解初看似乎很明显，但严格的讲，远非如此简单，因为每种解均依赖于初始质谱的假定形式及其凝结系数 A_{ij}. 许多学者对此所作的数值与分析结果表明[3-5]：该方程的质谱与经过某些碰撞时间后的自相似形式有关，其极限形状只取决于 A_{ij} 的形式，正因为如此，对于研究天体形成的学者来说，凝结方程和广义凝结方程具有极大的诱惑力.

本文的目的就是要用一种新的方法——几何学方法来研究广义凝结方程，将其表述

本文1991年7月30日收到.
1) 中国高科技中心(世界实验室)成员.
* 国家自然科学基金资助.

为一个赋予仿射联络的无限维空间中代表点的测地线运动方程，同时给出该方程的几何学表述和解释，最后讨论一下几何学方法的优点。

二、将广义凝结方程解释为测地线运动

对于含碎裂机制的系统，令 $n(m,t)\mathrm{d}m$ 表示其质量范围为 $[m, m+\mathrm{d}m]$ 中的碎片的体密度，当全部质量(包括无碎裂部分的质量和碎裂部分的质量)凝聚成两个较小的点时，则在给定质量范围内，其碎片的数目会有所增长；但当由确定的质量所凝聚的点中一旦包含有任何其它的碎片时，则其碎片的数目将会减少：

$$\mathrm{d}n(m,t)/\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^m A(m', m-m')n(m', t)n(m-m', t)\mathrm{d}m' - n(m,t)\int_0^\infty A(m, m')n(m', t)\mathrm{d}m', \tag{2}$$

对于倍频计数而言，上式中因子 $\frac{1}{2}$ 的引入是为了对计数加以校正。

物理量 $A(m, m')$ 就是所谓的凝结系数，其实质等于 σv，其中 σ 表示其俘获截面，而 v 则表示任何两碎片间的平均相对速度。

接着，我们来研究碰撞时的破裂现像。为此，令 $W(m, m')$ 表示碰撞时附着在一起的质量 m, m' 的概率，则 $(1-W(m, m'))$ 便给出了碎片相互俘获后的概率。这些碎片经过碰撞后，多半都破裂成许多较小的碎片。此外，还可令 $n_1(m''/m, m')$ 表示由此而产生的新碎片 m'' 的分布函数：则据质量守恒定律，便有下式成立：

$$\int_0^\infty m'' n_1(m''/m, m')\mathrm{d}m'' = m + m', \tag{3}$$

$$n_1(m''/m, m') = 0, \quad (\text{当 } m'' > (m+m') \text{ 时}); \tag{4}$$

在此，我们并未遵从 Safronov 在文献[2, 3]中的设定：$n_1 = n_1(m''/(m+m'))$，因为若将碎片总数假定为是在碰撞期间完成了驰予过程，则会损失掉全部单独的原生点，而此种情形也并非普遍情形。

现在，我们将方程(1)按如下两点进行改写：(a) 将方程 (1) 中的所有积分限均扩充为 0 到∞；(b) 将哑变量 $(m-m') \to m''$, $(m''-m') \to m'''$ 与 Dirac 符号 δ 一起引入(1)式，并用双重积分取代单积分。依据 (a) 和 (b)，方程(1)便可重新改写为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}n(m,t)/\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}m''\int_0^\infty \mathrm{d}m'\{&\delta(m-m'-m'')W(m', m'') \\ &- \delta(m-m') - \delta(m-m'') + n_1(m/m', m'')[1-W(m', m'')]\} \\ &\times A(m', m'')n(m', t)n(m'', t),\end{aligned} \tag{5}$$

如果我们将上述情形转换为离散情形，则 (5) 式在形式上就会变为一个测地线型方程，其中每种质量均取一个积分值 $m \to j = 1, 2, 3\cdots$；$n(m,t) \to n^j(t)$。这样一来，(5)式又可改写为下式：

$$\mathrm{d}n^j/\mathrm{d}t + \Gamma^j_{kl}n^k n^l = 0, \tag{6}$$

其中的仿射联络所具有的分量为：

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\{\delta^i_k + \delta^i_l - \delta^i_{(k+l)}W_{kl} - n_1(j/k,l)[1 - W_{kl}]\}A_{kl}, \tag{7}$$

值得注意的是(7)式中的重复脚标并不意味着对所有的正积分进行求和;因此,(7)式两边的 j, k, l 均取唯一值. 也许对于用一个独特的、非协变表示式来表述联络的方法，人们不会感到意外,因为在一般情况下,它并不是一个张量.

可以看出,(6)式便是人们常见的测地线形式:

$$\mathrm{d}u^j/\mathrm{d}\tau + \tilde{\Gamma}^j_{kl}u^k u^l = 0, \tag{8}$$

其中，$u^j = \mathrm{d}x^j/\mathrm{d}\tau$ 表示其固有速度，τ 表示其固有时间，$\tilde{\Gamma}^j_{kl}$ 便是仿射联络.

由于在上式中我们所考虑的碰撞碎片并不重要,故据前述定义，物理量 $n_1(j/k, l)$, W_{kl} 及 A_{kl} 对于 k 与 l 都是对称的. $\Gamma^i_{k,l} = \Gamma^i_{l,k}$ 的形式与在 Riemann 几何学中的形式相同,其中 Γ^i_{kl} 就等于人们所熟悉的 Christoffel 符号.

只要通过引入坐标及其速度分量 n^k，即通过 $n^k = \mathrm{d}N^k/\mathrm{d}t$，或 $N^k = \int n^k \mathrm{d}t$ 来定义 N^k，则可将(7)式与(8)式进行如下类比(表 1):

表 1

凝结符号(离散; 连续)	几 何 学 含 意
t	仿射参数
$j; m$	坐标标记
Γ^j_{kl}; $\Gamma(m/m', m'')$	联络系数
$n^j(t)$; $n(m,t)$	固有速度
$N^j(t)$; $N(m,t)$	坐标

三、总　结

在此，我们将对本文所采用的含碎裂机制的广义凝结方程的几何学表述法的优点作一简短的总结.

(1) 通过对广义凝结方程的逐次求导，便可将紧叙述表示成一个 $t = 0$ 附近的 $n^k(t)$ 的泰勒展开式.

(2) 如果我们定义 $M^p = \int_0^\infty m^p n(m,t)\mathrm{d}m$，则通过观察便可写出 $\mathrm{d}M^p/\mathrm{d}t$，这就包含了 M^0 与 M^1 的表示式,其中 M^0 为总碎片数，M^1 为守恒的总质量密度[1].

(3) 我们可识别两种同一的几何学守恒量: 其一是 $n^i\xi_i$，其中 $\xi_j = j$ 是一个 Killing 矢量，即 $\xi_{j;k} + \xi_{k;j} = 0$，其中的分号(;)表示通常的协变导数; 其二是 $P \equiv g_{jk}n^j n^k$，其中的 g_{jk} 是一个满足下式的协变度规张量:

$$g_{ij;k} = g_{ij;k} - \Gamma^l_{ik}g_{lj} - \Gamma^l_{jk}g_{li} = 0, \tag{9}$$

对于 $A_{ij} = \alpha^{-1}(\alpha + \beta_i)(\alpha + \beta_j)$ 的情形,(9)式的一个特解就是

$$g_{ij} \propto A_{ij}\exp\left[\sum_k (\alpha + \beta k)N^k\right].$$

这样一来,便可通过对通解 $g_{ij} \propto ij$ 的纯线性迭加而求得其它可允许的度规.

本文所采用的几何学表述方法具有比较经济简捷的优点和几何学的联想功能。但对于该方法的其它方面如坐标变换和 Riemann 曲率张量 $R^{i}_{\cdot jkl}$ 还有待进一步探索和研究。即是否可用无度规的仿射联络来完全定义 $R^{i}_{\cdot jkl}$[8]？我们将进一步作出回答。

参　考　文　献

[1] Z. A. Melzak, *Quart. J. Appl. Math.*, **11**(1953), 231.

[2] V. S. Safronov, *Doke. Akad. Nauk. SSSR.*, **147**, (English Transl. 1963, Sov. Phys. Doke., 7(1967)), 64.

[3] V. S. Safronov, Evolution of the Protoplanetary Cloud and Formation of Earth and Planets (Israel: Keter), Ch. 8.

[4] C. Hayashi and Y. Nakagawa, *Prog. Theor. Phys.*, **54**(1975), 93.

[5] T. Nakano, *Prog. Theor. Phys.*, **36**(1966), 515.

[6] J. Silk and T. Takahashi, *Astrophys. J.*, **229**(1979), 242.

[7] J. Silk and S. D. White, *Astrophys. J. Lett.*, **223**(1978), 59.

[8] R. Adler and M. Bazin, M. Schiffer, Introduction to General Relativity, (New York, McGraw-Hill, 1965).

A Geometrical Formulation Approach of the Generalized Coagulation Equations with Fragmentation Mechanism

Li Fubin

(East China Institute for Theoretical Physics, Shanghai 200237)

Abstract

The generalized coagulation equations with fragmentation mechanism as a geodesic equation for motion of a representative point were formulated in an infinite-dimensional space endowed with an affine connection by a geometrical approach.