第 15 卷 第 1 期　　高能物理与核物理　　Vol. 15, No. 1
1991 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1991

对偶变换本征矩阵及其应用

朱栋培
(中国科学技术大学近代物理系,合肥 230026)

摘　　要

本文给出了规范场中对偶 (Dual) 变换协变形式的本征矩阵，讨论了它们的性质及它们对 $U(1)$ 规范场能动量张量的一个应用.

对偶 (Dual) 变换是规范场理论里常用的一个变换，其意义是把电场和磁场进行交换. 如果用 $F_{\mu\nu}$ 记规范场强,在 $U(1)$ 规范场里它即为电磁场张量,我们可以方便地把它整体记为一个反对称的四阶矩阵 F:

$$(F)_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},\ F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu},\ \mu,\nu = 1,2,3,4. \tag{1}$$

我们采用 Pauli-Dirac 度规,则闵氏空间的对偶变换定义为

$$F \to {}^*F,$$

$$({}^*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

这样一个分立变换共有六个本征矩阵,由于性质

$${}^*({}^*F) = -F. \tag{3}$$

故本征值只有 $\pm i$ 两个. 定义矩阵 $\xi^{a,\mu\nu}$($a = \pm = 1, \bar{1}, \bar{1} \equiv -1$; $\mu,\nu = 1,2,3,4.$) 其矩阵元为

$$(\xi^{a,\mu\nu})_{\alpha\beta} = -i(a\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}). \tag{4}$$

则不难验证，它们是对偶变换的本征矩阵(下面约定对希腊字母 μ,ν,α,β 等及拉丁字母 i,j,k 等双标求和,而对字母 a、b 的求和则特别标出)

$${}^*\xi^{a,\mu\nu} = ia\xi^{a,\mu\nu}, \tag{5}$$

相应本征值即为 ia ($a = \pm 1$).

除了关系 (5) 外,矩阵 $\xi^{a,\mu\nu}$ 还有下面的性质

1. 厄米性 $(\xi^{a,\mu\nu})^+ = \xi^{a,\mu\nu}$. (6)
2. 反对称性 $(\xi^{a,\mu\nu})_{\alpha\beta} = -(\xi^{a,\mu\nu})_{\beta\alpha}$. (7)
3. $\xi^{a,\mu\nu} = -\xi^{a,\nu\mu}$. (8)
4. $(\xi^{a,\mu\nu})_{\alpha\beta} = (\xi^{a,\alpha\beta})_{\mu\nu}$. (9)
5. $\xi^{a,\mu\nu} = \frac{1}{2} a\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\xi^{a,\rho\sigma}$. (10)

本文 1990 年 6 月 23 日收到.

6. 零迹 $\mathrm{Tr}\xi^{a,\mu\nu}=0$. (11)

7. 自逆 $(\xi^{a,\mu\nu})^2=1$（对 μ,ν 不求和）. (12)

8. 纯虚性 $(\xi^{a,\mu\nu})^*=-\xi^{a,\mu\nu}$. (13)

9. 对易子 (14)

$$[\xi^{a,\mu\nu},\xi^{a',\mu'\nu'}]=2i\delta_{aa'}(\delta_{\mu\mu'}\xi^{a,\nu\nu'}-\delta_{\mu\nu'}\xi^{a,\nu\mu'}-\delta_{\nu\mu'}\xi^{a,\mu\nu'}+\delta_{\nu\nu'}\xi^{a,\mu\mu'}). \tag{15}$$

从对易关系 (15) 看，似乎它们给出了二套 $SO(4)$ 代数的表示，但其实不然，因为由于性质 (10)，它们不完全独立. 为了应用方便，我们可以选出六个独立的本征矩阵如下

$$\xi_i^a=\xi^{a,i4},\ i=1,2,3,\ a=1,\bar{1}. \tag{16}$$

其矩阵元为

$$(\xi_i^a)_{\alpha\beta}=-i(a\epsilon_{i\alpha\beta4}+\delta_{i\alpha}\delta_{\beta4}-\delta_{i\beta}\delta_{\alpha4}). \tag{17}$$

当然

$$^*\xi_i^a=ia\xi_i^a. \tag{18}$$

ξ_i^a 满足下面的对易关系

$$[\xi_i^a,\xi_j^b]=2i\delta_{ab}a\epsilon_{ijk}\xi_k^a, \tag{19}$$

和反对易关系

$$\{\xi_i^a,\xi_i^b\}=2\delta_{ab}\delta_{ij}+2\delta_{a\bar{b}}\Gamma_{ij}^{a\bar{a}},\ \bar{a}\equiv-a. \tag{20}$$

其中 $\Gamma_{ij}^{a\bar{a}}$ 的矩阵元为

$$\begin{aligned}(\Gamma_{i\ j}^{a,\bar{a}})_{\alpha\beta}=&-\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}+\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}+\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}+2\delta_{\alpha4}\delta_{\beta4}\delta_{ij}\\&+a(\epsilon_{ij\alpha4}\delta_{\beta4}+\delta_{ij}\beta_4\delta_{\alpha4}).\end{aligned} \tag{21}$$

它们具有下面的性质

$$\begin{cases}(\Gamma_{ij}^{a\bar{a}})_{\alpha\beta}=(\Gamma_{ij}^{a\bar{a}})_{\beta\alpha},\\ \Gamma_{ij}^{a\bar{a}}=\Gamma_{ji}^{\bar{a}a},\\ (\Gamma_{ij}^{a\bar{a}})^2=1\ （对\ i,\ j\ 不求和）,\\ \mathrm{Tr}\Gamma_{ij}^{a\bar{a}}=0.\end{cases} \tag{22}$$

根据性质 (19) 和 (20) 可以得到关于矩阵 ξ_i^a 的一个重要关系

$$\mathrm{Tr}(\xi_i^a\xi_j^b)=4\delta_{ab}\delta_{ij}. \tag{23}$$

性质 (19) 表明，对应于对偶变换同一本征值的三个矩阵构成 $SO(3)$ 代数的一个表示，而 (20) 又显示它们之间彼此反对易，(23) 则表示这两组六个矩阵在求迹的意义下正交. 这样，这组矩阵可以作为一组固定的标准基，任何一个 4×4 的反对称矩阵都可以用它们展开

$$\begin{cases}F=\sum\limits_a F_i^a\xi_i^a,\\ F_i^a=\dfrac{1}{4}\mathrm{Tr}(F\xi_i^a).\end{cases} \tag{24}$$

而 F 的对偶量是

$$^*F=\sum_a {}^*F_i^a\xi_i^a=\sum_a iaF_i^a\xi_i^a. \tag{25}$$

亦即，在这组基下，对偶变换可化为坐标间的变换

$$F_i^a \to {}^*F_i^a = i a F_i^a = \exp(i a \pi/2) F_i^a. \tag{26}$$

矩阵 ξ_i^a 也是一般的对偶转动和本征矩阵。对偶转动定义为

$$D(\alpha)F = F' = F\cos\alpha + {}^*F\sin\alpha. \tag{27}$$

利用性质(3)，易知对偶量 $^*F$ 的转动是

$$D(\alpha)^*F = -F\sin\alpha + {}^*F\cos\alpha. \tag{28}$$

这种转动作用到 ξ_i^a 上结果为

$$D(\alpha)\xi_i^a = e^{ia\alpha}\xi_i^a. \tag{29}$$

亦即 ξ_i^a 为 $D(\alpha)$ 的本征矩阵，相应本征值为 $e^{ia\alpha}$，而分立的对偶变换不过是 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 的特殊转动。把 F 和 $^*F$ 用基 ξ_i^a 展开后，对偶转动在展开系数 F_i^a 上的表示为

$$F_i^a \to e^{ia\alpha} F_i^a, \tag{30}$$

一种纯粹的位相变换。

利用 Dual 本征矩阵作为基展开，我们很容易讨论与 4×4 反对称矩阵有关的物理量的性质。例如关于电磁场强有下面的恒等式

$$F^2 - ({}^*F)^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}F^2 = 2\sum_a F_i^a F_i^a, \tag{31}$$

$$F{}^*F = {}^*FF = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}{}^*FF = \sum_a i a F_i^a F_i^a. \tag{32}$$

这些等式对于证明电磁场的能动量张量的一个性质十分有用。电磁场的能量动量张量可表为

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \tag{33}$$

写成 4×4 矩阵

$$T = -F^2 + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}F^2 = -({}^*F)^2 - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}F^2. \tag{34}$$

这一矩阵的平方是

$$\begin{aligned} T^2 &= \left(F^2 - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}F^2\right)\left[({}^*F)^2 + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}F^2\right] \\ &= F{}^*FF{}^*F + [F^2 - ({}^*F)^2]\frac{1}{4}\mathrm{Tr}F^2 - \frac{1}{16}(\mathrm{Tr}F^2)^2 \\ &= \frac{1}{16}[(\mathrm{Tr}{}^*FF)^2 + (\mathrm{Tr}F^2)^2]. \end{aligned} \tag{35}$$

也就是说，电磁场能量动量张量的逆是它自己的一个倍数，这一性质在讨论引力和电磁场在一起的自洽理论中起着特别关键的作用[1]。

参考文献

[1] C. W. Minsner 和 J. A. Wheeler, *Ann. Phys. NY*, **2** (1957), 525.

Eigenmatrices of Dual Transformation and Its Application

ZHU DONGPEI

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

ABSTRACT

The eigenmatrices of dual transformation for gauge field are presented in covariant form. Their properties and application to the energy-momentum tensor of the $U(1)$ gauge field are discussed.