第14卷 第8期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 8
1990年8月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1990

Berry 相位相关的拓扑作用量及其非绝热效应*

孙昌璞

（南开数学研究所理论物理研究室，天津；东北师范大学物理系，长春）

摘　要

本文在绝热条件破坏的一般前提下，利用路径积分方法推导出了联系于 Berry 相位的拓扑作用量和相应的有效哈密顿量，得到了一级近似的非绝热跃迁几率幅．这些讨论表明了 Berry 相位和诱导规范结构存在的普遍性． 作为例子，我们讨论了诱导磁单极的动力学和 Bitter-Dubbers 实验．

一、引　言

Berry 相位及其诱导规范结构的发现[1,2]不仅丰富和发展了量子力学本身，而且加深了人们对反常等量子场论问题的理解． 关于 Berry 相位的动力学意义，Kuratsuji 和 Iida 由路径积分形式给出了很好的分析[3,4]．在绝热条件下，他们积分出具有快、慢两套自由度量子系统的快变部分，得到了一个支配慢变部分的有效作用量，Berry 相位作为附加的拓扑作用量包含于其中，它类似于反常问题中的 Wess-Zumino 项．

在上述绝热近似讨论的基础上，一个进一步讨论是非绝热问题． 作者曾就慢变自由度作为控制参量而非动力学变量的简单情况，采用量子力学的 Schrödinger 形式进行了系统的分析[5,6]，其中建议的非绝热近似方法已被用来处理某些物理问题中的非绝热效应[7-10]．本文则是在 Kuratsuji 和 Iida 工作的基础上，讨论具有快慢两套自由度量子体系的非绝热跃迁问题．我们明显地推导出了一级近似的跃迁几率幅公式和拓扑项，并证明了该拓扑项在绝热条件下给出了附加的拓扑作用量，它导致了出现于有效哈密顿量中的诱导规范场． 最后，我们分析了诱导规范场联系于 Bitter-Dubbers 实验的可观察效应．以及诱导磁单极的有关问题．

二、非绝热跃迁的几率幅和拓扑项

考虑具有哈密顿量

本文 1989 年 8 月 28 日收到．

* 国家科学基金资助课题．

$$\hat{H} = \hat{H}_0(X,P) + \hat{h}(X,q,p,\xi) \tag{1}$$

的量子体系，其中X是慢变自由度，P是相应于X的正则动量；q是快变自由度，p是相应q的正则动量；ξ是q以外的快变自由度，例如是自旋自由度．在以下的讨论中我们记 $\hat{H}_0 = \hat{H}_0(X,P), \hat{h} = \hat{h}(X) \equiv \hat{h}(X,q,p,\xi)$．假定对任意给定的 $X, \hat{h}(X)$ 有非简并的本征函数 $|n[X]\rangle$，相应的本征值为 $\lambda_n[X]$．作为动力学变量，$X = X(t)$ 的演化规律由动力学方程支配而不是人为控制．这时，我们记 $\lambda_n(t) = \lambda_n[X(t)]$，$|n(t)\rangle = |n[X(t)]\rangle$，$|n(t), X(t)\rangle = |n(t)\rangle \otimes |X(t)\rangle$，其中 $|X(t)\rangle$ 是X的本征函数，本征值是$X(t)$．

现在考虑从 $|n(0),X(0)\rangle$ 到 $|m(T),X(T)\rangle$ 的跃迁几率幅：

$$K_{nm}(T) = \langle m(T)X(T)|\exp[-i\hat{H}T]|n(0)X(0)\rangle. \tag{2}$$

令 $\varepsilon = T/N$，$t_K = K\cdot\varepsilon$ 并记 $X_K = X(t_K)$，$\hat{h}(K) = \hat{h}(X_K)$，利用路径积分方法作计算得

$$\begin{aligned} K_{nm}(T) = \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{K=1}^{N-1} dX_K\right) &\langle m(T)X(T)|\exp[-i\hat{H}\varepsilon]|X_{N-1}\rangle \\ &\times \langle X_{N-1}|\exp[-i\hat{H}\varepsilon]|X_{N-2}\rangle\cdots\cdots\langle X_1|\exp[-i\hat{H}\varepsilon]|n(0)X(0)\rangle \\ = &\int d\mu(X,P)\mathscr{T}_{nm}(T)\exp[iS_0(T)] \end{aligned} \tag{3}$$

其中，

$$d\mu(X,P) = \lim_{N\to\infty}\prod_{K=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi}dX_K\cdot dP_K\right],$$

$$S_0(T) = \int_0^T [P\dot{X} - \hat{H}_0(X,P)]dt, \tag{4-1}$$

$$\mathscr{T}_{nm}(T) = \langle m(T)X(T)|\mathscr{P}\cdot\exp[-i\int_0^T \hat{h}(t)dt]|n(0)X(0)\rangle. \tag{4-2}$$

从(2)到(4)的推导，完全类似于[3,4]中 $\sum_n K_{nn}(T)$ 的推导．现在计算非绝热情况下编时积分 $\mathscr{P}.\exp[-i\int_0^T \hat{h}(t)dt]$ 的矩阵元到一级近似，由 $\sum_{m_K}|m_K(t_K)\rangle\langle m_K(t_K)| = 1$，我们有

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_{nm}(T) &= \lim_{N\to\infty}\prod_{K=N}^{1}\sum_{n_K}\langle n_K(t_K)|\exp[-i\hat{h}(K-1)\varepsilon]|n_{K-1}(t_{K-1})\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty}\prod_{K=N}^{1}\sum_{n_K}\exp[-i\varepsilon\lambda_{n_{K-1}}(t_{K-1})]\cdot\langle n_K(t_K)|n_{K-1}(t_{K-1})\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_N}\exp\left[-i\varepsilon\sum_{K=1}^{N}\lambda_{n_{K-1}}(t_{K-1})\right] \\ &\quad\times\prod_{K=N}^{1}\langle n_K(t_K)|n_{K-1}(t_{K-1})\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_N}\exp\Big[-i\varepsilon \end{aligned}$$

$$\times \sum_{K=1}^{N} \lambda_{n_{K-1}}(t_{K-1}) \Big] \prod_{K=N}^{1} \left[\delta_{n_K n_{K-1}} - \epsilon \left\langle n_K(t_K) \middle| \frac{\partial}{\partial t_K} n_{K-1}(t_K) \right\rangle \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_N} \left\{ \exp\left[-i\varepsilon \sum_{K=1}^{N} \lambda_n(t_{K-1}) \right] \delta_{mn} + \sum_{l=1}^{N} \left(\exp\left[-i\varepsilon \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \sum_{K=l+1}^{N} \lambda_m(t_{K-1}) \right] \cdot \varepsilon \cdot \langle m(t_l) | \frac{\partial}{\partial t_l} | n(t_l) \rangle \cdot \exp\left[-i\varepsilon \sum_{K=1}^{l} \lambda_m(t_{K-1}) \right] \right) \right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\{ \exp\left[-i\varepsilon \sum_{K=1}^{N} \lambda_n(t_{K-1}) \right] \cdot \left[1 - \sum_{K=1}^{N} \varepsilon \langle n(t_K) | \frac{\partial}{\partial t} n(t_K) \rangle \right] \delta_{mn} \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \left[\exp\left(-i\varepsilon \sum_{K=l+1}^{N} \lambda_m(t_{K-1}) \right) \cdot \varepsilon \cdot \langle m(t_l) | \frac{\partial}{\partial t_l} n(t_l) \rangle \right.$$

$$\left.\left. + \exp\left(-i\varepsilon \sum_{K=1}^{l} \lambda_n(t_{K-1}) \right) (1 - \delta_{mn}) \right] \right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\{ \exp\left[-i\varepsilon \sum_{K=1}^{N} \lambda_n(t_{K-1}) \right] \cdot \exp\left[-i\varepsilon \sum_{K=1}^{N} \langle n(t_K) | \frac{\partial}{\partial t_K} n(t_K) \rangle \right] \delta_{mn} \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \left(\exp\left[-i \sum_{K=l+1}^{N} \lambda_m(t_{K-1})\varepsilon \right] \langle m(t_l) | \frac{\partial}{\partial t_l} n(t_l) \rangle \varepsilon \right.$$

$$\left.\left. \cdot \exp\left[-i \sum_{K=1}^{l} \lambda_n(t_{K-1})\varepsilon \right] \right) (1 - \delta_{mn}) \right\}$$

即

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_{nm}(T) = \exp\left[-i \int_0^T \lambda_m(t) dt \right] & \left\{ \exp\left[i \int_0^T A_n(t) dt \right] \delta_{mn} \right. \\ & + (1 - \delta_{nm}) \int_0^T dt \langle m(t) | \frac{\partial}{\partial t} n(t) \rangle \\ & \left. \cdot \exp\left[-i \int_0^t (\lambda_n(\tau) - \lambda_m(\tau)) d\tau \right] \right\} \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$A_n(t) = \mathscr{A}_n(X)_\mu \cdot \frac{dX^\mu}{dt} \equiv i \langle n[X] | \frac{\partial}{\partial X^\mu} n[X] \rangle \frac{dX^\mu}{dt} \tag{6}$$

是诱导规范势 $\mathscr{A}_n(X)_\mu$ 的线性组合。

当慢变自由度X经历一个循环演化时，$X(0) = X(T)$，出现于 $\mathscr{T}_{nm}(T)$ 中的相位

$$\int_0^T A_n(t) dt = \oint_{C:\{X(t)\}} \mathscr{A}_n(X)_\mu dX^\mu \tag{7}$$

是一个只与环路 $C:\{X(t) | X(0) = X(T)\}$ 的几何形状有关、与 $X(t)$ 变化的动力学细节(例如 $\dot{X}(t)$、$X(t)$ 的周期 T) 无关的拓扑项．虽然由

$$\hat{h}(X) | n[X] \rangle = \lambda_n[X] | n[X] \rangle$$

确定的本征函数的位相是不确定的，但对于任何局域的 $\bar{\theta}(X)$， $|n[X]'\rangle = e^{i\bar{\theta}(X)} |n[X]\rangle$

确定拓扑项(7)完全相同．因此，该拓扑项是 $U(1)$ 规范不变的．

三、绝热近似和有效哈密顿量

以下我们说明公式(5)是一级近似的结果(相对于绝热近似作为零级近似)，这时允许绝热条件破坏．因此，拓扑项的出现与绝热条件无关．事实上，当 $n \neq m$，(5) 给出的跃迁几率幅是

$$K_{nm}(T) = \int d\mu(X, P)\left\{\exp\left[iS_0(T) - i\int_0^T \lambda_m(t)dt\right] \cdot \int_0^T dt \right.$$
$$\left. \times \left\langle m(t) \middle| \frac{\partial}{\partial t} n(t)\right\rangle \exp\left[-i\int_0^t (\lambda_n(\tau) - \lambda_m(\tau))d\tau\right]\right\}. \tag{8}$$

它只涉及到 $\hat{h}(t)$ 的一次微商项

$$\left\langle m(t) \middle| \frac{\partial}{\partial t} n(t)\right\rangle = \left\langle m(t) \middle| \frac{\partial}{\partial t} \hat{h}(t) \middle| n(t)\right\rangle \Big/ [\lambda_n(t) - \lambda_m(t)],$$

$\hat{h}(t)$ 的高次微商项已被忽略．当 $X(t)$ 变化足够缓慢、使得绝热条件

$$\left|\frac{\langle m(t)|\dot{n}(t)\rangle}{\lambda_m(t) - \lambda_n(t)}\right| = \left|\frac{\langle m(t)|\,\partial\hat{h}(t)/\partial t\,|n(t)\rangle}{[\lambda_m(t) - \lambda_n(t)]^2}\right| \ll 1, \quad m \neq n \tag{9}$$

满足，$K_{nm}(T)$ 中积分项因子 $\exp\left[-i\int_0^t (\lambda_n(t) - \lambda_m(t))dt\right]$ 振荡很快，它抹平了 $\left\langle m(t) \middle| \frac{\partial}{\partial t} n(t)\right\rangle$ 使得 $K_{nm}(T) \to 0$．利用分部积分可明显地证明这个结论[5,6]．这时

$$K_{nn}(T) = \int d\mu(X, P) \cdot \exp\left[iS_0(T) - i\int_0^T \lambda_n(t)dt + i\int_0^T A_n(t)dt\right] \tag{10}$$

足以描述体系的全部动力学，拓扑项 $S_{\mathrm{Top}}(T) \equiv \int_0^T A_n(t)dt$ 可视为附加的拓扑作用量．支配慢变自由度的有效作用量和相应的拉氏量分别为

$$S_{\mathrm{eff}} = S_0(T) - \int_0^T \lambda_n(t)dt + S_{\mathrm{Top}}(T) \tag{11-1}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}_0 - \lambda_n(t) + \mathscr{A}_n(X)_\mu \cdot \dot{X}_\mu \tag{11-2}$$

当我们具体取 $\hat{H}_0 = \frac{1}{2M}\hat{p}^2 + V(X)$ 时，由(11-2)得到支配慢变自由度的有效哈密顿量

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{2M}(\nabla - i\mathscr{A}_n(X))^2 + V(X) - \lambda_n[X] \tag{12}$$

(12)式表明，绝热条件下快变自由度对慢变自由度的影响，相当于提供一个背景矢量场 $\mathscr{A}_n(X) \equiv i\langle n[X]|\nabla|n[X]\rangle$(诱导规范场)和一个标量场 $\lambda_n[X]$．值得指出的是，(12)式与由 Born-Oppenheimer 近似得到的结果完全一致[11]．因此，我们的讨论不仅给出了一级近似的非绝热跃迁几率幅，而且沟通了绝热近似的路径积分表述和 Born-Oppenheimer 近似．

四、自旋 $-1/2$ 粒子的诱导磁单极场

本节分析与 Bitter-Dubbers 实验[12]相关的诱导磁单极场的动力学,并在下一节把该实验解释为诱导规范场的直接效应(以前我们把该实验解释为运动参照系中 Berry 相位的效应[13]).

在非均匀磁场 $\boldsymbol{B}(X):(B_1(X),B_2(X),B_3(X))$ 中,中子的哈密顿量是 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{h}$:

$$\hat{H}_0=\frac{1}{2M}\hat{p}^2,\quad \hat{h}=\frac{1}{2}g\boldsymbol{B}(X)\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 Pauli 矩阵, g 为耦合常数. 对任意给定的 $\boldsymbol{B}(X),\hat{h}$ 的本征函数是

$$|u_+[\boldsymbol{B}]\rangle=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\phi}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\end{bmatrix},\quad |u_-[\boldsymbol{B}]\rangle=\begin{bmatrix}\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{-i\phi}\\ -\cos\dfrac{\theta}{2}\end{bmatrix} \tag{14}$$

相应的本征值分别是 $\varepsilon_+[X]=\frac{1}{2}g|\boldsymbol{B}(X)|$ 和 $\varepsilon_-[X]=-\frac{1}{2}g|\boldsymbol{B}(X)|$, 其中

$$\phi=\phi[\boldsymbol{B}]=\operatorname{arctg}[B_2(X)/B_1(X)],$$
$$\theta=\theta[\boldsymbol{B}]=\operatorname{arctg}[\sqrt{B_1(X)^2+B_2(X)^2}/B_3(X)]. \tag{15}$$

当磁场足够强 ($|\boldsymbol{B}|$ 较大)、足够均匀 ($\nabla\phi[\boldsymbol{B}(X)]$ 较小) 且中子速度 $\boldsymbol{V}=dX/dt$ 足够小时,绝热条件

$$\left|\frac{\left\langle u_+[\boldsymbol{B}]\left|\frac{\partial}{\partial t}u_-[\boldsymbol{B}]\right.\right\rangle}{\varepsilon_+[X]-\varepsilon_-[X]}\right|=\frac{|\sin\theta\nabla\phi\cdot\boldsymbol{V}|}{|g\boldsymbol{B}(X)|}\ll 1 \tag{16}$$

满足, 中子的空间运动不会激发自旋态 $|u_+[\boldsymbol{B}]\rangle$ 和 $|u_-[\boldsymbol{B}]\rangle$ 间的跃迁. 这时我们有空间自由度的有效哈密顿量

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}\pm}=-\frac{1}{2M}(\nabla-i\mathscr{A}_\pm(X))^2+\varepsilon_\pm(X) \tag{17}$$

其中 $\mathscr{A}_\pm(X)=i\langle u_\pm[\boldsymbol{B}]|\nabla u_\pm[\boldsymbol{B}]\rangle$ 是诱导规范势,它的显式可由(14)给出, 例如

$$\mathscr{A}_+(X)_\mu=\boldsymbol{a}(X)\cdot\frac{\partial}{\partial X_\mu}\boldsymbol{B}(X) \tag{18}$$

由参数空间 $\{\boldsymbol{B}\}$ 上的诱导磁单极势 $\boldsymbol{a}$:

$$a_1=i\left\langle u_+[\boldsymbol{B}]\left|\frac{\partial}{\partial B_1}u_+[\boldsymbol{B}]\right.\right\rangle=\frac{(B_3-|\boldsymbol{B}|)\cdot B_2}{2|\boldsymbol{B}|(B_1^2+B_2^2)},$$
$$a_2=i\left\langle u_+[\boldsymbol{B}]\left|\frac{\partial}{\partial B_2}u_+[\boldsymbol{B}]\right.\right\rangle=\frac{(B_3-|\boldsymbol{B}|)B_1}{2|\boldsymbol{B}|(B_1^2+B_2^2)},\quad a_3=0. \tag{19}$$

给出,可以验证 $\boldsymbol{a}$ 对应的场强,

$$\boldsymbol{f}=\nabla_B\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{B}/(2|\boldsymbol{B}|)^3 \tag{20}$$

这恰是位于 $\boldsymbol{B}=0$ 处的"磁单极"产生的磁场场强. 如果 $\Psi'(X)$ 是方程

$$-\frac{1}{2M}\nabla^2\psi'(X)+\varepsilon_+(X)\Psi'(X)=E\Psi'(X) \tag{21}$$

的解，则有效运动方程 $\hat{H}_{\rm eff}\Psi_{(X)}=E\Psi_{(X)}$ 的解是

$$\Psi(X)=\exp\left[i\int_{X_0}^{X}\mathscr{A}_{+\mu}(X)dX^\mu\right]\Psi'(X) \tag{22}$$

其中的附加相位 ph. $=\int_{X_0}^{X}\mathscr{A}_{+\mu}(X)dX^\mu$ 是诱导规范势的 Aharonov-Bohm 相。当 $\hat{h}(X)$ 经历一个循环演化（$\boldsymbol{B}(X_{(0)})=\boldsymbol{B}(X_{(T)})$）时，ph. 可以重新表达为参数空间$\{\boldsymbol{B}\}$上诱导磁单极势 $\boldsymbol{a}$ 的 Loop 相，即

$$\text{ph.}=\oint_{\{\boldsymbol{B}(X)\}}a_\mu[\boldsymbol{B}]dB_\mu \tag{23}$$

它恰是 Bitter-Dubbers 实验中的附加几何相位。

五、Bitter-Dubbers 实验

在 Bitter-Dubbers 实验中，取螺旋状非均匀磁场

$$\boldsymbol{B}(X)=B_0\left(\sin\alpha\cdot\cos\left[\frac{2\pi X_3}{L}\right],\sin\alpha\cdot\sin\left[\frac{2\pi X_3}{L}\right],\ \cos\alpha\right) \tag{24}$$

其中 α,B_0 均为常数。相应于能级 $\varepsilon_+=\frac{1}{2}gB_0$ 的诱导规范势是

$$\mathscr{A}_+=i\langle u_+[\boldsymbol{B}]|\nabla|u_+[\boldsymbol{B}]\rangle=\frac{\pi}{L}(1+\cos\alpha)\boldsymbol{e}_3, \tag{25}$$

公式(10)给出跃迁几率幅

$$\begin{aligned}K_{++}(T)&=\langle u_+(T),X(T)|\exp[-i\hat{H}T]|u_+(0)X(0)\rangle\\&=(2i\pi T/M)^{\frac{1}{2}}\cdot\exp(iML^2/2T)\cdot\exp(-igB_0T/2)\exp[i\nu_+(c)]\end{aligned} \tag{26}$$

其中附加几何相位是

$$\nu_+(c)=\oint_C\mathscr{A}_{+\mu}(X)dX^\mu=2\pi-\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)2\pi=2\pi-\frac{1}{2}\Omega(c), \tag{27}$$

$\Omega(c)=(1-\cos\alpha)\cdot 2\pi$ 是参数空间 $\{\boldsymbol{B}\}$ 中的闭曲线 $C:\{\boldsymbol{B}(X)|\boldsymbol{B}(X(T))=\boldsymbol{B}(X(0))$ $(X(T)=X(0)+L\boldsymbol{e}_3)\}$ 对原点 $\boldsymbol{B}=0$ 张成的立体角。同样的计算给出

$$\begin{aligned}K_{--}(T)&=\langle u_-(T)X(T)|\exp[-i\hat{H}T]|u_-(0)X(0)\rangle\\&=(2i\pi T/M)^{\frac{1}{2}}\cdot\exp[iML^2/2T]\exp[igB_0/2]\exp[-i\nu_+(c)]\end{aligned} \tag{28}$$

由(27)、(28)知，当中子由 $X(0)$ 运动到 $X(T)$ 时，$|u_+[\boldsymbol{B}(X)]\rangle$ 和 $|u_-[\boldsymbol{B}(X)]\rangle$ 态将伴有不同的附加几何相因子 $\nu_+(c)$ 和 $\nu_-(c)=-\nu_+(c)$。如果初始时刻，中子极化于 $|+\frac{1}{2}\rangle=\cos\frac{\alpha}{2}|u_+[\boldsymbol{B}(0)]\rangle+\sin\frac{\alpha}{2}|u_-[\boldsymbol{B}(0)]\rangle$ 自旋态上，在 T 时刻体系将处于自旋态

$$|\Phi(T)\rangle=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\exp[-igB_0T/2]\exp[i\nu_+(c)]|u_+[\boldsymbol{B}[X(T)]]\rangle$$

$$+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\exp[igB_0T/2]\exp[-i\nu_+(c)]|u_-[\boldsymbol{B}(X(T))]\rangle$$

$$\equiv b_+|+\frac{1}{2}\rangle+b_-|-\frac{1}{2}\rangle \tag{29}$$

这时中子沿 X_3 方向的极化率是

$$\mathrm{P}_3=|b_+|^2-|b_-|^2=1-2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\left[\nu_+(c)+\frac{1}{2}gB_0T\right] \tag{30}$$

其中附加于动力学相位 $\frac{1}{2}gB_0T$ 上的几何相位 $\nu_+(c)$ 正是 Bitter-Dubbers 实验所观测的，因此可以把该实验理解为实验室坐标系中诱导规范场的可观测效应．上述分析的关键是在绝热条件(16)下，把自旋部分看成快变的，把空间部分看成是慢变的．

现在可以把本节的讨论推广到具有任意自旋 S 的中性粒子情况． 设 $\hat{J}$ 是自旋角动量算符，自旋部分的哈密顿量是 $\hat{h}=g\boldsymbol{B}(X)\cdot\hat{J}$，它具有本征函数 $\varepsilon_{m_s}[\boldsymbol{B}(X)]=m_sg|\boldsymbol{B}(X)|$ 和相应的本征函数

$$|m_s[\boldsymbol{B}]\rangle=\exp[-i\hat{J}_3\phi]\cdot\exp[-i\hat{J}_2\alpha]|S,m_s\rangle,\ \phi=\frac{2\pi X_3}{L}, \tag{31}$$

其中 $|S,m_s\rangle$ 是标准的 $SO(3)$ 角动量态，其中 $\boldsymbol{B}(X)$ 仍取(24)的形式．这时绝热条件是

$$\left|\frac{\sin\alpha\cdot\pi\cdot V}{L\cdot g\cdot B_0}\right|\cdot[S(S+1)-m_s(m_s\pm1)]^{\frac{1}{2}}\ll1; \tag{32}$$

诱导规范势是 $\mathscr{A}_{m_s}=2\pi m_s\cos\alpha\cdot\boldsymbol{e}_3$，它给出的拓扑相是

$$\nu_{m_s}[c]=-m_s\Omega(c)+2m_s\pi,m_s=S,S-1,\cdots,-S, \tag{33}$$

$t=0$ 时处于 $X_0=0$ 处的粒子极化于 $|S,m_s=S\rangle$ 态上，根据角动量理论

$$|S,m_s=S\rangle=\sum_{m_s=S}^{S}\langle m_s[\boldsymbol{B}(0)]|S,S\rangle|m_s[\boldsymbol{B}(0)]\rangle$$

$$=\sum_{m_s=-S}^{S}d^{[s]}_{m_s,S}(-\alpha)|m_s[\boldsymbol{B}(0)]\rangle, \tag{34}$$

这里 $d^{[s]}{}_{m_s,m_s'}(\beta)$ 是绕 X_2 轴转 β 角的转动矩阵元，其明显表达式可参阅标准的群论著作，如文献[14]．当 $t=T$ 时，这些粒子到达 $X(T)=L\boldsymbol{e}_3$ 处，处于自旋态

$$|\Psi(T)\rangle=\sum_{m_s=-S}^{S}\exp[i\nu_{m_s}[c]-im_sgB_0T]d^{[s]}_{m_sS}(-\alpha)|m_s[\boldsymbol{B}(0)]\rangle, \tag{35}$$

此时仍处于 $|S,m_s=S\rangle$ 态上的几率是

$$\mathrm{P}=|\langle S,S|\Psi(T)\rangle|^2=\left|\sum_{m_s=-S}^{S}\exp[i\nu_{m_s}(c)-im_sgB_0T]\cdot d^{[S]^2}_{Sm_s}(\alpha)\right|^2 \tag{36}$$

其中已经利用了 $d^{[S]}{}_{m_s,m_s'}(\beta)$ 的对称性质．(36)式表明了诱导规范势的 Aharonov-Borm 相位在任意自旋情况下的效应．

参　考　文　献

[1] M.V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond.*, A **392**(1984), 45.
[2] R. Jackiw, *Com. Atom. Mole. Phys.*, **21**(1988), 71, and therein.
[3] H. Kuratsuji and S. Iida, *Prog. Theor. Phys.*, **74**(1985), 439.
[4] H. Kuratsuji and S. Iida, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 1003.
[5] C. -P. Sun, *J. Phys.*, **A21**(1988), 1595.
[6] C. -P. Sun, *High Energy Phys. Nucl. Phys.* **12**(1988), 352.
[7] C. -P. Sun, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 2908.
[8] C.-P. Sun, *Chinese Phys. Lett.*, **6**(1989), 97.
[9] 孙昌璞，高能物理与核物理，**13**(1989)，110.
[10] 孙昌璞，高能物理与核物理，**13**(1989)，403.
[11] J. Moody et. al, *Phys. Rev. Lett.*, 59(1987),161.
[12] T. Bitter and D. Dubbers, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 251.
[13] 孙昌璞，张林芝，高能物理与核物理，**14**(1990)，136.
[14] 马中骐，戴安英，《群论及其在物理学中的应用》，北京理工大学出版社(1988).

TOPOLOGICAL ACTION RELATING TO BERRY'S PHASE AND NON-ADIABATIC EFFECTS

SUN CHANGPU

(Theoretical Physics Division, Nankai Institute of Mathematics, Tianjin and Physics Department, Northeast Normal. University, Changchun)

ABSTRACT

In non-adiabatic cases the topological action associated with Berry's phase and the corresponding effective Hamiltonian are obtained by path-integral method. We also give the non-adiabatic transition probability amplitude in the first-order approximation. It is thereby shown that the Berry's phase and the induced gauge structure have universality of existence. As an example, dynamics of induced monople relating to the Bitter-Dubber's experiment is analysed in terms of induced gauge field.