第13卷 第8期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 8
1989年8月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Aug., 1989

# 格点 Schwinger 模型的一组准确解

郑 波　　郭硕鸿
(中山大学,广州)

**摘　　要**

本文找到了 Naive 格点 Schwinger 模型的一组准确解，讨论了其连续极限行为,证实 Naive 格点,化不能切断 Schwinger 模型的高能非物理状态.

## 一、引　　言

格点规范理论的连续极限问题是一个根本问题. 尽管人们用各种方法从不同角度进行了广泛的研究，这问题至今未能解决.

Schwinger 模型是最简单的规范理论模型，人们已用多种方法证明它具有和有质量自由玻色场相同的物理能谱[1-3]. 由于 Schwinger 模型的简单可解性，我们可以通过对格点 Schwinger 模型的求解,从而了解格点规范理论的一般特征,特别是连续极限行为. 这方面已有用强耦合展开和 Monte Carlo 模拟等方法作的不少工作[4,5],但由于缺乏解析的准确解,我们没得到完全可靠的结论.

本文试图探讨 Naive 格点 Schwinger 模型的连续极限行为的一些特征. 附录中给出 Schwinger 模型的一组准确解,它对应于一种高能非物理状态，从而说明 Schwinger 模型在低能区才等价于一有质量自由玻色场. 在正文中找到了 Naive 格点 Schwinger 模型的相应解,讨论了其连续极限行为,证明 Naive 格点化不能切断 Schwinger 模型的高能非物理状态.

## 二、解的形式

Naive 格点 Schwinger 模型的 Hamiltonian 为[4]

$$H=\frac{1}{2}e^2a\sum_x E(x)^2+\frac{1}{2a}\sum_x \bar{\psi}(x)r_1(U(x,x+1)\psi(x+1)$$
$$-U(x,x-1)\psi(x-1)), \tag{2.1}$$

其中 $\psi(x)$、$\bar{\psi}(x)$ 为二分量费米子场,$U(x,x\pm1)$ 为规范场,

$$[U(x,x+1),E(x)]=U(x,x+1),$$
$$[U(x,x-1),E(x-1)]=-U(x,x-1). \tag{2.2}$$

本文1988年8月15日收到.

取表象

$$r_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

并设

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix}, \quad \phi^+(x) = (\xi^+(x) \quad \eta(x)), \tag{2.4}$$

则有

$$H = \frac{1}{2} e^2 a \sum_x E(x)^2 + \sum_{x,x'} (\xi^+(x) A_{xx'} \xi(x') - \eta(x) A_{xx'} \eta^+(x')), \tag{2.5}$$

其中

$$A_{xx'} = \frac{-i}{2a} U(x, x')(\delta_{x',x+1} - \delta_{x'x-1}). \tag{2.6}$$

定义$|0\rangle$态如下:

$$\begin{gathered} E(x)|0\rangle = 0, \\ \xi(x)|0\rangle = 0, \quad \eta(x)|0\rangle = 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

考虑平移不变态

$$|\phi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_x i^n C_n \xi^+(x) U^n(x, x+n) \eta^+(x+n)|0\rangle, \tag{2.8}$$

其中

$$U^n(x, x+n) = \prod_{i=0}^{n-1} U(x+i, x+i+1). \tag{2.9}$$

如要求 $|\phi\rangle$ 满足$H$的本征方程,即

$$H|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \tag{2.10}$$

就不难得到 $C_n$ 满足的差分方程:

$$C_{n+1} + C_{n-1} = \frac{2(|n| - 2Ea/(ea)^2)}{4/(ea)^2} C_n. \tag{2.11}$$

对比贝塞尔函数递推关系

$$B_{\nu+1}(z) + B_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z} B_\nu(z), \tag{2.12}$$

可得 $C_n$ 的一组解:

$$\begin{gathered} C_n = \begin{cases} C_n^+ & n \geqslant 0 \\ C_n^- & n \leqslant 0 \end{cases} \\ C_n^+ = \lambda_1^+ J_{n-2Ea/(ea)^2}(4/(ea)^2) + \lambda_2^+ Y_{n-2Ea/(ea)^2}(4/(ea)^2), \\ C_n^- = \lambda_1^- J_{-n-2Ea/(ea)^2}(4/(ea)^2) + \lambda_2^- Y_{-n-2Ea/(ea)^2}(4/(ea)^2), \end{gathered} \tag{2.13}$$

其中 $J_\nu(z)$、$Y_\nu(z)$ 分别为第一、二类贝塞尔函数，$\lambda_i^\pm$ 与 $n$ 无关，$C_n$ 还满足

$$\begin{gathered} C_0^+ = C_0^-, \\ C_1^+ + C_{-1}^- = -EaC_0^+. \end{gathered} \tag{2.14}$$

此时若不加边界条件，则 $E$ 可取任意值.

反过来，我们说(2.13)即为(2.11)的通解. 因为由(2.11)式，从 $C_0$、$C_1$ 可导出所有 $C_n$，而(2.14)只给出 $\lambda_i^{\pm}$ 的两个关系，$\lambda_i^{\pm}$ 仍有两个独立，所以，对任何(2.11)的解 $C'_n$，适当取余下的两个独立的 $\lambda_i^{\pm}$，必有

$$C_0^+ = C'_0, \quad C_1^+ = C'_1, \tag{2.15}$$

亦即 $C'_n$ 必取(2.13)形式.

## 三、连续极限行为

为方便计，先保持 $na$ 有限，令 $a\to 0$，然后才考虑边界条件. 我们集中讨论当 $a\to 0$，$Ea\to 0$ 情形. 令

$$\begin{aligned} z &= 4/(ea)^2, \\ \nu &= n - 2Ea/(ea^2), \end{aligned} \tag{3.1}$$

因为当 $a\to 0$ 时 $z/\nu\to\infty$，所以，

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &\sim \cos(\nu\,\mathrm{tg}\,\beta - \nu\beta - \pi/4), \\ Y_\nu(z) &\sim \sin(\nu\,\mathrm{tg}\,\beta - \nu\beta - \pi/4), \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\beta &\simeq (z - \nu^2/(2z))/\nu, \\ \beta &\simeq \pi/2 - \nu/z, \end{aligned} \tag{3.3}$$

略去无关常数，

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &\sim \cos(z - n\pi/2 - Ena/2 + (ena)^2/8), \\ Y_\nu(z) &\sim \sin(z - n\pi/2 - Ena/2 + (ena)^2/8), \end{aligned} \tag{3.4}$$

所以，

$$\begin{aligned} C_n^+ \sim\ & \lambda_1^+\cos(4/(ea)^2 - n\pi/2 - Ena/2 + (ena)^2/8) \\ & + \lambda_2^+\sin(4/(ea)^2 - n\pi/2 - Ena/2 + (ena)^2/8). \end{aligned} \tag{3.5}$$

同样，

$$\begin{aligned} C_n^- \sim\ & \lambda_1^-\cos(4/(ea)^2 + n\pi/2 + Ena/2 + (ena)^2/8) \\ & + \lambda_2^-\sin(4/(ea)^2 + n\pi/2 + Ena/2 + (ena)^2/8). \end{aligned} \tag{3.6}$$

显然，由于当 $a\to 0$ 时 $4/(ea)^2\to\infty$，所以，只有满足 $\lambda_2^{\pm} = \pm i\lambda_1^{\pm}$ 的解方非平凡. 再考虑到(2.14)式，可知

$$\begin{aligned} C_n &= \begin{cases} C_n^+ & n\geqslant 0 \\ C_n^- & n\leqslant 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} C_0 i^{-n} e^{i(-Ena/2+(ena)^2/8)} & n\geqslant 0 \\ C_0 i^{-n} e^{i(-Ena/2-(ena)^2/8)} & n\leqslant 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.7}$$

易见，$C_n$ 满足一般边界条件. 令 $x = na$，即有

$$i^n C_n = \begin{cases} C_0 e^{i(-Ex/2+e^2x^2/8)} & x\geqslant 0 \\ C_0 e^{i(-Ex/2-e^2x^2/8)} & x\leqslant 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

这便是附录中给出的 Schwinger 模型的高能非物理状态. 也就是说，Naive 格点化不

能消去这些状态.

## 四、讨　论

(1) 我们找到的准确解表明，Naive 格点化不能切断 Schwinger 模型的高能非物理状态.

(2) 如果要在 $a$ 有限便考虑边界条件，则不能简单地令 $n\to\infty$，考察 $C_n$ 的行为，再令 $a\to 0$. 因为当 $\nu\to\infty$ 时 $Y_\nu(z)\to\infty$，从而导致(2.13)中 $\lambda_2^\pm$ 应为零，而这样取连续极限是不正确的. 正确的方法是应用周期边界条件 $C_n = i^L C_{n+L}$，令 $a\to 0$ 后，再令周期 $L\to\infty$. 显然，当 $a\to 0$ 时，周期边界条件给出的结果和文中的结果一致.

总起来看，我们的解虽然是非物理的，但它是带费米子格点规范理论中存在的一组准确解，可以帮助我们进一步研究格点规范理论.

今后，我们希望能找到 Naive 格点 Schwinger 模型的低能的物理的准确解，从而彻底弄清 Naive 格点化的特征.

## 附　录

取轴规范 $A_1=0$ Schwinger 模型在零荷子空间的 Hamiltonian 为[2]

$$H=\int dx\bar{\psi}(x)r_1\partial_x\psi(x)$$
$$-\frac{e^2}{4}\int dx dx'\psi^+(x)\psi(x)|x-x'|\psi^+(x')\psi(x'), \tag{1}$$

其中 $\psi(x)$、$\psi^+(x)$ 为二分量费米场. 仍取第二节中表象及记号，略去无关常数就有

$$H=-i\int dx(\xi^+(x)\partial x\xi(x)-\eta^+(x)\partial_x\eta(x))$$
$$-\frac{e^2}{4}\int dx dx'(\xi^+(x)\xi(x)-\eta^+(x)\eta(x))|x-x'|(\xi^+(x')\xi(x')-\eta^+(x')\mu(x')). \tag{2}$$

考虑平移不变态

$$|\phi\rangle=\int dx dx' C(x'-x)\xi^+(x)\eta^+(x')|0\rangle, \tag{3}$$

如要求 $|\phi\rangle$ 满足$H$的本征方程，即

$$H|\phi\rangle=E|\phi\rangle, \tag{4}$$

就容易得到 $c(x)$ 必须满足的微分方程:

$$2i\frac{dc(x)}{dx}+\frac{e^2}{2}|x|c(x)-Ec(x)=0. \tag{5}$$

(5)式的解为

$$c(x)=\begin{cases}c_0e^{i(-Ex/2+e^2x^2/8)} & x\geqslant 0\\ c_0e^{i(-Ex/2-e^2x^2/8)} & x\leqslant 0.\end{cases} \tag{6}$$

$c(x)$ 满足一般边界条件，所以 $E$ 可取任意值.

因为$|\phi\rangle$ 态动量为零，能谱连续，所以正反夸克没有组成束缚态. 又由于 $|\phi\rangle$ 态相对于基态的能量为无穷大，所以是高能非物理状态. 通常的处理 Schwinger 模型的方法略去了这种状态[1-3]，才得到 Schwinger 模型等价于一有质量自由玻色场的结论.

## 参　考　文　献

[1] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 2425.
L. S. Brown, *Nuovo Cimento* **29**(1963), 617.

[ 2 ] J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 3594.
S. Coleman, *Ann. Phys.*, **101**(1976), 239.
[ 3 ] R. Roskies and F. Schaposnik, *Phys. Rev.*, **D23**(1981), 558.
K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 1195.
[ 4 ] T. Banks, J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 1043.
A. Carroll, J. Kogut, D. K. Sinclair and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 2270.
[ 5 ] O. Martin and S. Otto, *Nucl. Phys.*, **B203**(1982), 297.
J. Bartholomew and J. Sloan, *Phys. Lett.*, **172B**(1986), 407.

# AN EXACT SOLUTION OF THE NAIVE SCHWINGER MODEL ON LATTICE

ZHENG BO GUO SHUOHONG
*(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou)*

ABSTRACT

An exact solution of the Naive Schwinger model on lattice is found. The continuous limit of the solution is discussed. The result is that the Naive lattice gauge theory can not cut off the unphysical states of the Schwinger model in the high-energy limit.