

快报

2+1 维 $U(1)$ 格点胶球质量的变分计算*

郑维宏 郭硕鸿
(中山大学物理系, 广州)

摘 要

本文对具有严格基态解和正确经典连续极限的格点规范哈密顿量, 采用变分法, 计算了 2+1 维 $U(1)$ 规范群 0^{+-} 和 0^{++} 胶子态的质量, 在深度弱耦合区, 得到 $am(0^{+-})$ 随 $1/g^2$ 增大而指数减少, 而 $am(0^{++}) = 2.78g^2$.

格点规范理论是计算强相互作用的非微扰效应的有效理论. 最近, 我们提出了一具有准确基态的格点哈密顿量 H_1 ^[1]:

$$H_1 = \frac{g^2}{2a} \exp(-R_1) E_i^a \exp(2R_1) E_i^a \exp(-R_1) \quad (1)$$

其中 $R_1 = 1/(2g^4 C_N) \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger)$, C_N 为 $SU(N)$ 群基础表示的 Casimir 不变量.

应用 H_1 , 我们已经计算了 2+1 维 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 规范场的胶球质量^[2-4], 说明了应用具有严格准确基态的格点规范哈密顿量研究胶球质量是有效的.

已有一些文章^[5-10]对 2+1 维 $U(1)$ 群的胶球质量作了讨论. 胶球质量 m 和弦张力 σ 的渐近行为的理论预言是^[6]:

$$m^2 a^2 = 8\pi^2 \beta \exp(-2\pi^2 V(0)\beta) \quad (2)$$

$$\sigma a^2 = 4\sqrt{2} g/\pi \exp(-\pi^2 V(0)\beta) \quad (3)$$

其中 $g^2 = e^2 a$, e 为荷, $V(0) = 0.2527$, $\beta = 1/g^2$

然而, 对于 2+1 维规范理论, 我们不能证明 $a \rightarrow 0$ 时, H_1 的连续极限与 Wilson 作用量相同, 但最多相差一个有限量. 这时 H_1 可以被看成是一个具有非平庸自相互作用的模型, 研究它的能谱及它与标准理论(与 Wilson 作用量具有相同连续极限的理论)的能谱比较, 都有一定意义.

最近, 我们又提出了一具有准确基态的格点哈密顿量的新形式, 并找到了在 2+1、3+1 维都具有正确连续极限的哈密顿量^[9], 对于 $U(1)$ 群, 它是:

$$H_2 = \frac{g^2}{2a} e^{-R} E_i^a e^{2R} E_i^a e^{-R} \quad (4)$$

* 此项研究计划得到国家教委科学基金会和中山大学高等学术中心基金会资助.
本文 1988 年 6 月 4 日收到.

其中 $R = \sum_p -\frac{x}{2}(U_p + U_p^\dagger) + \frac{y}{2}(U_p + U_p^\dagger)^2$, $x = \frac{1}{2g^4}$, $y = \frac{1}{8g^4}$

它的准确基态是: $|\Psi_0\rangle = \exp(R)|0\rangle$ (5)

对于 J^{pc} 胶子态, 选取变分态:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{n=1}^N C_n |\Psi_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{\mathbf{x}} C_n (\varphi_n(\mathbf{x}) - v_n) |\Psi_0\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

其中 C_n 为变分参数, $|\Psi_n\rangle$ 具有量子数 J^{pc} , 为了使 $|\Psi_n\rangle$ 与 $|\Psi_0\rangle$ 正交, 取

$$v_n = \langle \varphi_n(\mathbf{x}) \rangle_0 \equiv \langle \Psi_0 | \varphi_n(\mathbf{x}) | \Psi_0 \rangle / \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle.$$

胶球质量归结为计算本征值方程^[3]:

$$\det \|W_{mn} - \lambda D_{mn}\| = 0 \quad (7)$$

其中 $W_{mn} = -\langle [E_i^a, \varphi_m(0)] [E_i^a, \sum_{\mathbf{x}} \varphi_n(\mathbf{x})] \rangle.$

$$D_{mn} = \sum_{\mathbf{x}} \langle \varphi_m(0) \varphi_n(\mathbf{x}) \rangle_0 - \langle \varphi_m(0) \rangle_0 \langle \varphi_n(\mathbf{x}) \rangle_0$$

$$\lambda = 2\beta am = 2am/g^2$$

基态的模:

$$\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \int e^{2R} [dU_l] = \int e^{2R} [dU_p] = \prod_p Z$$

其中

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{d\phi_p}{2\pi} e^{-2x \cos \phi_p + 4y \cos^2 \phi_p} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} I_0(-2x) = \sum_{\substack{l=0 \\ k \geq l}}^{\infty} \frac{(2k)!}{l! k! k! (2k-2l)!} 4^{-l} x^{2k-l} \end{aligned}$$

U_p^n 的基态平均值:

$$\begin{aligned} Y_m &= \langle U_p^n \rangle_0 = Z^{-1} \int \frac{d\phi_p}{2\pi} e^{in\phi_p} e^{-2x \cos \phi_p + 4y \cos^2 \phi_p} \\ &= Z^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} I_m(-2x) \\ &= Z^{-1} \sum_{\substack{l=0 \\ 2k \geq 2l-n}}^{\infty} \frac{(2k+n)!}{l! k! (k+n)! (2k+n-2l)!} (-1)^n 4^{-l} x^{2k+n-l} \end{aligned}$$

$U(1)$ 群的最低激发态是 $J^{pc} = 0^{+-}$ 态, 对于此态, 选取 N 个变分态:

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = (U_p^+(\mathbf{x}))^n - (U_p(\mathbf{x}))^n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

其中 $U_p(\mathbf{x})$ 为处于 \mathbf{x} 处的 plaquette.

相应的对称变分矩阵元为: ($n \geq m$ 时)

$$W_{nm} = 8m^2 (Y_{m-m} + Y_{n+m} - 2Y_n Y_m) \quad (8)$$

$$D_{nn} = 2(Y_{n-m} - Y_{n+m}) \quad (9)$$

通过求此本征值方程的本征值,可以得到不同变分态数 N 时, am 与 $1/g^2$ 的关系曲线。如图 1, 从图中可以看出, am 随 $1/g^2$ 的增大而指数减少, 但是:

1. 在弱耦合区 ($1/g^2 > 2$) 的指数减少斜率远比周期性高斯模型^[6]预言的斜率大。
2. 深度弱耦合区的斜率远比现有的 Monte Carlo 方法及其它解析方法^[6-10]经常讨论的过渡区 ($1/g^2 \leq 2$) 的斜率大得多。
3. 看来, 指数减少的斜率有随 $1/g^2$ 增大而继续增大的趋势, 也就是说, ma 比指数减少更快。

对于 $J^{pc} = 0^{++}$ 态, 我们选取变分态:

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = U_{n_p}(\mathbf{x}) + U_{n_p}^+(\mathbf{x}), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

其中 $U_{n_p}(\mathbf{x})$ 为处于 \mathbf{x} 的 $n \times n$ Wilson 圈。

相应的对称变分矩阵元是: ($n \geq m$ 时)

$$W_{mn} = 16 \sum_{i=1}^m l Y_1^{n^2+m^2-2im} (1 - Y_2^{im}) + 8m(n-m-1) Y_1^{n^2-m^2} (1 - Y_2^{m^2}) \quad (10)$$

$$D_{mn} = 2(n-m-1)^2 Y_1^{n^2+m^2} (1 + Y_2^{m^2} - 2Y_1^{2m^2}) + 8(n-m-1) \sum_{i=1}^m Y_1^{n^2+m^2-2im} (1 + Y_2^{im} - 2Y_1^{2im}) + 8 \sum_{i,j=1}^m Y_1^{n^2+m^2-2ij} (1 + Y_2^{ij} - 2Y_1^{2ij}) \quad (11)$$

同样通过求解本征值方程, 可得 βam 与 $1/g^2$ 的关系曲线, 如图 2。在弱耦合区 ($1/g^2 > 2$), 从图可看到标度行为: $am(0^{++}) = 2.78g^2$ 。

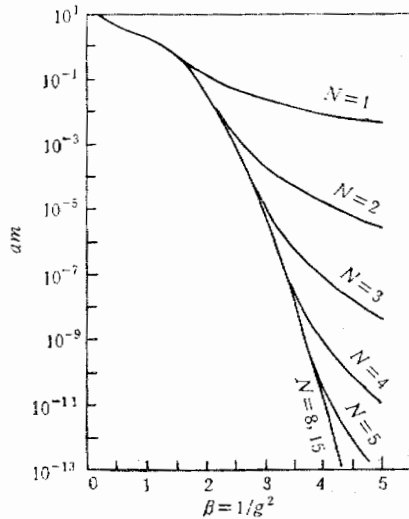


图 1

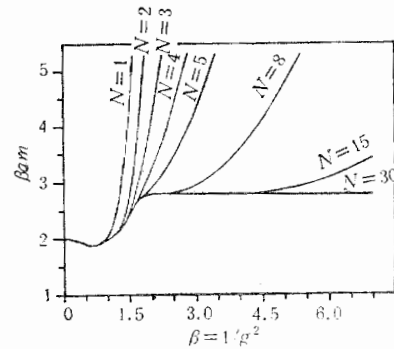


图 2

同时计算表明, 其它变分态对降低 $N = 15$ 的 am 贡献很小。上面计算结果与采用 H_1 计算的结果^[3]在弱耦合区基本相同。但是, 为什么两个不同连续极限的哈密顿量 H_1 与

H_2
同

[1]
[2]
[3]
[4]
[5]

[6]
[7]
[8]
[9]
[10]

(1)
clas:
with

H_2 , 能得到相同的 0^{+-} 和 0^{++} 胶球质量, 为什么 $am(0^{++})$ 的标度行为与 $am(0^{+-})$ 不同, 还有待进一步探讨。

参 考 文 献

- [1] Guo S. H., Liu J. M. and Chen Q. Z., *Chin. Phys. Lett.*, 2(1985), 409.
 [2] Guo S. H., Zheng W. H. and Liu J. M., *Chin. Phys. Lett.*, 3(1986), 445.
 [3] 郑维宏、刘金明、郭硕鸿, 高能物理与核物理, 1(1988), 134.
 [4] 刘金明、郑维宏、郭硕鸿, 高能物理与核物理, 3(1988), 420.
 [5] Guo S. H. and Zheng W. H., "A New Form of Lattice Hamiltonian With Exact Ground State", to be published.
 [6] P. Suranyi, *Phys. Lett.*, B122(1983), 279; *Nucl. Phys.*, B225(1983), 538; B210(1982), 519.
 [7] M. Gopfert and G. Mack, *Commun. Math. Phys.*, 82(1982), 545.
 [8] M. Karliner and G. Mack, *Nucl. Phys.*, B225(1983), 371.
 [9] C. J. Hamer, *Z. Phys.*, C27(1985), 145.
 [10] G. G. Batrouni, *Nucl. Phys.*, B208(1982), 12.

THE VARIATIONAL CALCULATION OF MASS GAP IN 2+1 DIMENSIONAL $U(1)$ LGT

ZHENG WEIHONG GUO SHUOHONG

(Physics Depart., Zhongshan Univer., Guangzhou)

ABSTRACT

We present a variational calculation of 0^{+-} and 0^{++} glueball masses in 2+1 dimensional $U(1)$ lattice gauge theory by using a Hamiltonian which possesses exact ground state and correct classical continuum limit. In deep weak coupling region, we obtain that $am(0^{+-})$ decreases with $1/g^2$ exponentially and $am(0^{++}) = 2.78 g^2$.