第12卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 12, No. 4
1988年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1988

# Elliott $SU(3)$ 模型连续变量表示的求解问题*

曹建民 王顺金
(兰 州 大 学)

**摘 要**

本文给出了 Elliott $SU(3)$ 模型的一种新的连续变量表示．基于这种连续变量表示，提出了一套求解 $SU(3)$ 的连续变量表示的不可约基矢的微分方程途径——极态的本征方程途径，求得了正则群链下 $SU(3)$ 的连续变量的所有不可约基矢．运用已求得的内禀极态和投影算子方法，建立起 Elliott 的 $SU(3)$ 不可约基矢的表达式．讨论了这种连续变量表示的物理几何意义．

## 引 言

李群及其表示论在物理学中的应用一直受到人们的重视[1-7]．在前文[8]中，我们给出了 Elliott $SU(3)$ 模型的连续变量表示，讨论了该模型的几何形态． 其中我们提出了两点想法，也是给自己的两条任务． 第一点是，$SU(3)$ 群的连续变量表示是 $SO(3)$ 的连续变量表示的推广．作为任务，就是运用生成坐标方法建立一般动力学群的连续变量表示．这一任务已在文献[9]中部分地完成了．第二点是，提出了动力学群的连续变量表示中求解本征值问题的任务．在[8]中，由于 $SU(3)$ 群生成元的连续变量表示过于复杂，这一任务没有完成．本文将采用另一条途径去解决这一问题．对于一般动力学群的连续变量表示中的求解问题，将在另一篇文章中讨论．

本文仍把生成坐标方法作为动力学群连续变量表示论和广义表象变换理论，但对动力学群元中的陪集元素作进一步的分解(即选用欧拉角类型的群参数)，从而给出 $SU(3)$ 的更为简单的连续变量表示，并在该表示下求解该模型，讨论 Elliott 模型中集体运动内禀态的物理意义．以 Elliott $SU(3)$ 模型为例说明用集体变量表示的一阶偏微分方程组求解动力学群的可行性．本文所采用的方法的特点在于，用极态的本征值问题(为一阶偏微分方程组)代替高阶偏微分方程组求解不可约基矢的本征值问题．

---

* 国家教委科学基金资助的课题

本文1987年1月26日收到．

## 一、Elliott $SU(3)$ 生成元的一种新的连续变量表示

Elliott $SU(3)$ 群的八个生成子包括五个四极算子 $Q_\mu$ 和三个角动量算子 $L_i$. 设声子转化算子为:

$$A_{ij}=\frac{1}{2}(a_i^+a_j+a_ja_i^+),\quad i,j=x,y,z \tag{1}$$

其中 $A_{ij}$ 满足:

$$[A_{ij},A_{kl}]=\delta_{ik}A_{il}-\delta_{il}A_{kj}. \tag{2}$$

则 Elliott $SU(3)$ 的八个生成子可以写为:

$$\begin{aligned}
&L_x=i(A_{zy}-A_{yz}),\quad L_y=i(A_{xz}-A_{zx}),\quad L_z=i(A_{yx}-A_{xy});\\
&(Q_2+Q_{-2})=\sqrt{6}\,(A_{xx}-A_{yy}),\quad (Q_2-Q_{-2})=i\sqrt{6}\,(A_{xy}+A_{yx}),\\
&(Q_1+Q_{-1})=-i\sqrt{6}\,(A_{yz}+A_{zy}),\quad (Q_1-Q_{-1})=-\sqrt{6}\,(A_{xz}+A_{zx}),\\
&Q_0=(2A_{zz}-A_{xx}-A_{yy}).
\end{aligned} \tag{3}$$

$SU(3)$ 群的一个最大子群是 $U(2)=U(1)\otimes SU(2)$, 其生成元是:

$$L_z,\quad (Q_2+Q_{-2}),\quad (Q_2-Q_{-2}),\quad Q_0. \tag{4}$$

其中前三个涉及 $X$-$Y$ 平面内的声子转化算子,构成 $SU(2)$ 代数, $Q_0$ 涉及 $Z$ 轴声子数与 $X$ 和 $Y$ 轴声子数之差,构成 $U(1)$ 代数.

如果我们对 $SU(3)$ 群元做 $SU(3)/U(2)$ 的右陪集分解,并利用 $SU(2)$ 子群的类欧拉角参数,则么正的 $SU(3)$ 任意群元可以写为[10],

$$\begin{aligned}
\hat{g}=\;&e^{-i\theta Q_0}\cdot e^{-i\alpha(Q_2+Q_{-2})}\cdot e^{-i\beta L_z}\cdot e^{-i\gamma(Q_2+Q_{-2})}\\
&\cdot e^{-i[i\mu(Q_1+Q_{-1})+\mu' L_x+\nu(Q_1-Q_{-1})+\nu' L_y]}.
\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $SU(3)/U(2)$ 陪集算子可以经群参数的非线性变换进一步分解. 利用 $SU(3)$ 生成子的对易关系可算出

$$\begin{aligned}
&e^{-i\alpha'(Q_2+Q_{-2})}\cdot e^{-i\beta' L_z}\cdot e^{-i\gamma'(Q_2+Q_{-2})}\cdot e^{-i\nu L_y}\cdot e^{i\gamma'(Q_2+Q_{-2})}\cdot e^{i\beta' L_z}\cdot e^{i\alpha'(Q_2+Q_{-2})}\\
&=\exp\Big\{-i\nu\Big[\frac{i}{\sqrt{6}}S(\beta')S(\sqrt{6}\,(\gamma'-\alpha'))(Q_1+Q_{-1})\\
&-S(\beta')C(\sqrt{6}\,(\gamma'-\alpha'))L_x-\frac{1}{\sqrt{6}}S(\beta')S(\sqrt{6}\,(\gamma'+\alpha'))(Q_1-Q_{-1})\\
&+C(\beta')C(\sqrt{6}\,(\gamma'+\alpha'))L_y\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{6}$$

这里简写记号 $S(\beta')\equiv\sin\beta'$, $C(\beta')\equiv\cos\beta'$. 利用上式,可把(5)式改写为,

$$\begin{aligned}
\hat{g}=\;&e^{-i\theta Q_0}\cdot e^{-i\alpha(Q_2+Q_{-2})}\cdot e^{-i\beta L_z}\cdot e^{-i\gamma(Q_2+Q_{-2})}\cdot e^{-i\nu L_y}\cdot e^{i\gamma'(Q_2+Q_{-2})}\\
&\cdot e^{i\beta' L_z}\cdot e^{i\alpha'(Q_2+Q_{-2})}.
\end{aligned} \tag{7}$$

我们以 $(Q_2+Q_{-2})$、$L_z$、$(Q_2-Q_{-2})$ 构成的 $SU(2)$ 代数为最大稳定子代数,考虑 $SU(3)$ 的下列正则群链

$$\underset{(\lambda,\mu)}{SU(3)}\supset\underset{(\Lambda,\varepsilon)}{U(2)}\supset\underset{(\Lambda)}{SU(2)}\supset\underset{(\Lambda_3)}{U(1)}, \tag{8}$$

选取 $SU(3)$ 表示中一个 $SU(2)$ 的标量态:

$$|\phi_0\rangle = |\phi[(\lambda_\mu), \Lambda = 0, \Lambda_3 = 0, \varepsilon]\rangle, \tag{9}$$

该内禀态满足:

$$Q_{\pm 2}|\phi_0\rangle = L_z|\phi_0\rangle = 0, \; Q_0|\phi_0\rangle = \varepsilon|\phi_0\rangle. \tag{10}$$

从(10)式可知，这种 $SU(2)$ 标量态表示原子核关于 $Z$-轴对称的内禀形变态. 由(7)和(10)式可知，包含这种标量内禀态的 $SU(3)$ 表示中的任意状态可写为，

$$|\phi(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \nu)\rangle = e^{-i\frac{\theta}{3}Q_0} \cdot e^{-i\frac{\alpha}{\sqrt{6}}(Q_2+Q_{-2})} \cdot e^{-i\beta L_z} \cdot e^{-i\frac{\gamma}{\sqrt{6}}(Q_2+Q_{-2})} \cdot e^{-i\nu L_y}|\phi_0\rangle. \tag{11}$$

上式参数中多加的因子是为了后面计算的方便而引入的. 与前文[8]相比，有两点差别: ① $SU(3) \supset U(2) \supset SU(2)$ 是正则群链，② 对陪集 $SU(3)/U(2)$ 作了进一步分解，以便给出较为简单的 $SU(3)$ 生成元的表示.

利用动力学群广义表象变换理论中 Dyson 表示的定义

$$G^D(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \nu)\langle\phi(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \nu)|\phi'\rangle \equiv \langle\phi(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \nu)|\hat{G}(x)|\phi'\rangle, \tag{12}$$

和(10)式，可以算出 $SU(3)$ 八个生成元的 Dyson 表示（见附录，其中我们用了与[8]、[9]中计算生成元的 Dyson 表示略微不同的方法，以适应对陪集算子所作的分解），

$$\begin{aligned}
L_X^D = & -\frac{3}{2}S(\theta+\alpha-\gamma)S(\beta)\,\mathrm{tg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}S(\theta+\alpha-\gamma)\csc\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} \\
& - C(\theta+\alpha-\gamma)C(\beta)\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{2}S(\theta+\alpha-\gamma)(\csc\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu \\
& + S(\beta)\,\mathrm{tg}\,\nu)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma} - C(\theta+\alpha-\gamma)S(\beta)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu}, \\
L_Y^D = & \frac{3}{2}S(\theta-\alpha-\gamma)C(\beta)\,\mathrm{tg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}S(\theta-\alpha-\gamma)\sec\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} \\
& - C(\theta-\alpha-\gamma)S(\beta)\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{2}S(\theta-\alpha-\gamma)(\sec\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu \\
& + C(\beta)\,\mathrm{tg}\,\nu)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma} + C(\theta-\alpha-\gamma)C(\beta)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu}, \\
L_z^D = & -\mathrm{ctg}\,2\beta S(2\alpha)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} + C(2\alpha)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta} + \csc 2\beta S(2\beta)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}, \qquad (13) \\
(Q_2+Q_{-2})^D = & \sqrt{6}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad Q_0^D = 3\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}, \\
(Q_2-Q_{-2})^D = & i\sqrt{6}\Big(-\mathrm{ctg}\,2\beta C(2\beta)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} - S(2\alpha)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta} \\
& + \csc 2\beta\, C(2\alpha)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big), \\
(Q_1+Q_{-1})^D = & -i3\sqrt{\frac{3}{2}}C(\theta+\alpha-\gamma)S(\beta)\,\mathrm{tg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + i\sqrt{\frac{3}{2}}C(\theta+\alpha-\gamma) \\
& \cdot\csc\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} + i\sqrt{6}\,S(\theta+\alpha-\gamma)C(\beta)\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta}
\end{aligned}$$

$$-i\sqrt{\frac{3}{2}}C(\theta+\alpha-\gamma)(\csc\beta\operatorname{ctg}\nu+S(\beta)\operatorname{tg}\nu)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}$$
$$+i\sqrt{6}S(\theta+\alpha-\gamma)S(\beta)\cdot\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu}$$

$$(Q_1-Q_{-1})^D=-3\sqrt{\frac{3}{2}}C(\theta-\alpha-\gamma)C(\beta)\operatorname{tg}\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}-\sqrt{\frac{3}{2}}C(\theta-\alpha-\gamma)$$
$$\cdot\sec\beta\operatorname{ctg}\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sqrt{6}S(\theta-\alpha-\gamma)S(\beta)\operatorname{ctg}\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta}$$
$$-\sqrt{\frac{3}{2}}C(\theta-\alpha-\gamma)(\sec\beta\operatorname{ctg}\nu+C(\beta)\operatorname{tg}\nu)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}$$
$$+\sqrt{6}S(\theta-\alpha-\gamma)C(\beta)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu}$$

从(11)式可以看出群参数的几何物理意义：$\theta$ 表示偏离球对称的参数，$\beta$ 与角动量 $Z$ 分量相联系，$\nu$ 与绕 $Y$ 轴转动有关，$\alpha$、$\gamma$ 与非轴对称形变有关.

Dyson 表示的厄密共轭定义为

$$\int\mu(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu)d\alpha d\beta d\gamma d\theta d\nu\psi^*G^D\varphi=\int\mu(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu)d\alpha d\beta d\gamma d\theta d\nu(G^{D+}\psi)^*\varphi,\tag{14}$$

其中 $\mu(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu)$ 为不变测度. 若要求上面的连续变量表示保持算子的厄密性，即

$$G^{+D}=G^{D+}\tag{15}$$

则可用利用(13)和(14)式求得不变测度

$$\mu(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu)=S(2\beta)S(2\nu)S^2(\nu),\tag{16}$$

利用 $U(3)$ 算子 $A_{ij}$ 的三维基本矩阵表示[11]，

$$L_z=\begin{pmatrix}0&i&0\\-i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad L_y=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad \frac{Q_0}{3}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix},\tag{17}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(Q_2+Q_{-2})=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求解上述算子的本征方程，可得 $\frac{Q_0}{3}$ 的本征值为 $-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $L_z$、$L_y$、$\frac{(Q_2+Q_{-2})}{\sqrt{6}}$ 的本征值为 $\pm 1, 0$. 从(11)式群元单值性要求及上述本征值可得 $\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu$ 的取值范围：

$$0\leqslant\theta\leqslant 6\pi,\quad 0\leqslant\alpha,\beta,\gamma,\nu\leqslant 2\pi.\tag{18}$$

## 二、内禀极态本征值问题求解与不可约表示基矢

求得 $SU(3)$ 生成元的连续变量表示以后，就可以计算它的 Casimir 算子 $\hat{C}_2$ 和 $\hat{C}_3$ 的

连续变量表示．剩下的问题是求解 Elliott $SU(3)$ 在连续变量表示下的不可约表示基矢．按常规做法，需要选择一组完备的可互易算子集（例如 $\hat{C}_2$, $\hat{C}_3$, $\hat{\Lambda}^2$, $\Lambda_3$, $Q_0$），计算这组算子集在连续变量表示下的共同本征函数，就得到不可约表示基矢[11]．对 $SU(3)$ 群，这是求广义球谐函数的问题，比求 $SU(2)$ 和 $SD(3)$ 的球谐函数要复杂得多．困难来自 Casimir 算子，随着群秩的增加，其高阶 Casimir 算子包含越来越高阶的微分算子和越来越复杂的形式．在粒子物理中 $SU(3)$ 生成元取 Gell-Mann 形式，已经有人用巧妙的方法求出了广义球谐函数及 $D$ 函数[10,12,13]．但是，对于 $SU(3)$ 群的 Elliott 基，尚没有人做这项工作．本节中，我们运用不同于文献[10]和[11]的方法，求解 Elliott $SU(3)$ 群连续变量表示下的不可约表示的基矢问题．这一方法的基本思想，是把求解不可约基矢的包含高阶微分算子的本征值问题，转化成求解不可约基矢中极态的只包含一阶微分算子的本征值问题．

为了实现上述目标，我们应当从 $SU(3)$ 生成元的卡当标准形式中选取可互易算子 $H_i(i=1,2)$，同时区分升算子 $E_\alpha$ 与降算子 $E_{-\alpha}$．由（3）、（4）式可知 $SU(3)$ 代数的 Cartan 子代数可选为

$$H_1 = Q_0 = (2A_{zz} - A_{xx} - A_{yy}), \quad H_2 = \Lambda_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}(Q_2 + Q_{-2}) = \frac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy}). \tag{19}$$

给定 Cartan 子代数后，很容易得出 $A_2(SU(3))$ 李代数中对应于正根的升算子和对应于负根的降算子，

$$E_\alpha = \{A_{xy}, A_{zx}, A_{zy}\}, \quad E_{-\alpha} = \{A_{yx}, A_{xz}, A_{yz}\} \tag{20}$$

通常 $SU(3)$ 不可约表示由 $(\lambda\mu)$ 标记：

$$\lambda = (n_z - n_x), \quad \mu = (n_x - n_y) \tag{21}$$

其中 $n_i$ 是 $i$-方向的声子数．在群链(8)式的正则表示中，按最高权态的定义，要求 Cartan 子代数 $Q_0$ 及 $\Lambda_3$ 取最大本征值对应的共同本征态为最高权态．由(19)式得知，在声子数守恒的条件下（$SU(3)$ 的要求），$Q_0$ 取最大本征值要求 $n_z$ 取最大值，$\Lambda_3$ 取最大值就要求在最大 $n_z$ 的条件下使 $n_x$ 也取最大值．综合上述要求，得出内禀极态 $\phi_m$ 应满足：

$$\begin{aligned}
&Q_0\phi_m = (2\lambda + \mu)\phi_m, \quad \Lambda_3\phi_m = \frac{1}{2\sqrt{6}}(Q_2 + Q_{-2})\phi_m = \frac{\mu}{2}\phi_m; \\
&A_{xy}\phi_m = \left[-\frac{i}{2\sqrt{6}}(Q_2 - Q_{-2}) + \frac{i}{2}L_z\right]\phi_m = 0, \\
&A_{zx}\phi_m = \left[-\frac{1}{2\sqrt{6}}(Q_1 - Q_{-1}) + \frac{i}{2}L_y\right]\phi_m = 0, \\
&A_{zy}\phi_m = \left[\frac{i}{2\sqrt{6}}(Q_1 + Q_{-1}) - \frac{i}{2}L_x\right]\phi_m = 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

由上式可知内禀极态仅与不可约表示指标 $(\lambda\mu)$ 有关．(22)式前两个方程为本征方程，而后三个式子为内禀极态应满足的条件．这样一来，前文[8]中五个可互易高阶微分算子的本征值问题就转化为一阶微分算子的带条件的本征值问题，从而简化了计算．

在连续变量表示下，把 $SU(3)$ 生成元的 Dyson 表示代入(22)式，并把它改写为较对称的方程组:

$$
\begin{aligned}
&Q_0^D\phi_m=(2\lambda+\mu)\phi_m;\quad Q_2^D\phi_m=\sqrt{\frac{3}{2}}(\mu+L_z^D)\phi_m,\\
&Q_{-2}^D\phi_m=\sqrt{\frac{3}{2}}(\mu-L_z^D)\phi_m;\quad Q_1^D\phi_m=\sqrt{\frac{3}{2}}(L_X^D+iL_Y^D)\phi_m,\\
&Q_{-1}^D\phi_m=\sqrt{\frac{3}{2}}(L_X^D-iL_Y^D)\phi_m
\end{aligned}
\tag{23}
$$

上式表明 $SU(3)$ 算子对内禀态的作用等价于角动量算子. 把(13)式代入(23)式，可解得下列不耦合的一阶线性齐次偏微分方程组:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi_m=\frac{1}{3}(2\lambda+\mu)\phi_m,\quad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}\phi_m=\mu\phi_m,\quad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}\phi_m=-\mu\phi_m,\\
&\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta}\phi_m=-i\mathrm{ctg}\,\beta\cdot\mu\phi_m,\quad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}\phi_m=(-i\mu\,\mathrm{ctg}\,\nu+i\lambda\,\mathrm{tg}\,\nu)\phi_m.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

很容易求出(24)式的解

$$
\begin{aligned}
\phi_m^{[\lambda\mu]}(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu)&=c(\lambda,\mu)\cdot(\sin\beta)^\mu\cdot(\sin\nu)^\mu\cdot(\cos\nu)^\lambda\cdot e^{\frac{i}{3}(2\lambda+\mu)\theta}\\
&\cdot e^{i\mu\alpha}\cdot e^{-i\mu\gamma}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

其中 $C(\lambda\mu)$ 是归一化常数. 从极态 $\phi_m^{[\lambda\mu]}$ 的连续、单值、有界、周期性条件，可以唯一地确定 $\lambda$、$\mu$ 的取值范围: $\lambda$、$\mu$ 只能取一切可能的正整数. 这一结论与 $SU(3)$ 群表示的代数处理结果一致，也与 $SU(3)$ 代数的声子表示(3)式的物理直观要求一致.

对于轴对称形变的内禀态，$\mu=0$，(25)式变为

$$
\phi_m^{[\lambda0]}(\theta,\nu)=C(\lambda)\cdot(\cos\nu)^\lambda\cdot e^{i\frac{2}{3}\lambda\theta}=C(\lambda)\cdot d_{\lambda\lambda}^\lambda(2\nu)\cdot e^{i\frac{2}{3}\lambda\theta}. \tag{26}
$$

上式表示具有确定的 Z 轴对称形变的状态 ($Q_0$ 的量子数是 $2\lambda$)，相应的 $\theta$ 是完全不确定的，而 $d_{\lambda\lambda}^\lambda(2\nu)$ 则描述 Z 轴对称的变形核绕 Y 轴的转动.

据群链(8)式和最高权态满足的方程组(22)式可知，最高权态(25)式可记为

$$
\begin{aligned}
&\phi_m\left[(\lambda\mu),\ \varepsilon=2\lambda+\mu,\ \Lambda=\frac{\mu}{2},\ \Lambda_3=\frac{\mu}{2}\right]=C(\lambda\mu)d_{\mu\mu}^\mu(\pi-2\beta)\\
&\cdot d_{\mu\mu}^\mu(\pi-2\nu)\cdot d_{\lambda\lambda}^\lambda(2\nu)\cdot e^{\frac{i}{3}(2\lambda+\mu)\theta}\cdot e^{i\mu\alpha}\cdot e^{-i\mu\gamma}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

从最高权态(27)式出发，利用 $SU(3)$ 的降算子可以给出 $SU(3)$ 的整个不可约表示的态矢，其运算过程与代数方法一致[14]. 关键是利用 (13) 式求出降算子的连续变量表示:

$$
\begin{aligned}
A_{yx}^D&=-\frac{i}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}(Q_2-Q_{-2})^D+L_z^D\right]=\frac{1}{2}e^{-2i\alpha}\left[-\mathrm{ctg}\,2\beta\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}\right.\\
&\left.+\csc\beta\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right],\\
A_{xz}^D&=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}(Q_1-Q_{-1})^D+iL_y^D\right]=-\frac{1}{2}e^{-i(\theta-\alpha-\gamma)}\left[-\frac{3}{2}\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right.
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\sec\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}-i\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{2}(\sec\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu$$
$$+\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\nu)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}+i\cos\beta\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big],\tag{28}$$

$$A^D_{yz}=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}(Q_1+Q_{-1})^D+L^D_x\right]=\frac{i}{2}\,e^{-i(\theta+\alpha-\gamma)}\Big[-\frac{3i}{2}\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial Q}$$
$$+\frac{i}{2}\csc\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\cos\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{i}{2}(\csc\beta\,\mathrm{ctg}\,\nu+\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\nu)$$
$$\cdot\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}-\sin\beta\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big],$$

产生 $SU(3)$ 的任意不可约表示基矢的算子按通常方法可以写为[5,14]

$$\hat{F}^D(\lambda\mu\varepsilon\Lambda\Lambda_3)=N(pqr)(A^D_{yx})^r\cdot\{A^D_{yz}A^D_{xz}-A^D_{yz}(A^D_{xx}+A^D_{yy}+1)\}^q\cdot A^D_{xz}\tag{29}$$

其中

$$(A^D_{xx}-A^D_{yy}+1)=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}+1\tag{30}$$

归一化常数为：

$$N(pqr)=\left\{\frac{\lambda!\,\mu!\,(\lambda+\mu+1)!\,p!\,q!\,r!\,(\mu+p+1)!}{(\lambda-p)!\,(\mu-q)!\,(\lambda+\mu+1-q)!\,(\mu+p-q-r)!\,(\mu+p-q+1)!}\right\}^{-1/2}.\tag{31}$$

所以，在连续变量表示中，$SU(3)$ 的任意不可约表示的基矢可写为

$$\phi[(\lambda\mu)\varepsilon\Lambda\Lambda_3]=\hat{F}^D(\lambda\mu\varepsilon\Lambda\Lambda_3)\phi_m\left[(\lambda\mu),\ \varepsilon=2\lambda+\mu,\ \Lambda=\frac{\mu}{2},\ \Lambda_3=\frac{\mu}{2}\right]\tag{32}$$

其中

$$\varepsilon=2\lambda+\mu-3p-3q,\quad \Lambda=\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}(p-q),\quad \Lambda_3=\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}(p-q)-r.\tag{33}$$

$$0\leqslant p\leqslant\lambda,\quad 0\leqslant q\leqslant\mu,\quad 0\leqslant r\leqslant 2\Lambda\tag{34}$$

相应于一组 $p$、$q$、$r$ 值，有一组 $\varepsilon$、$\Lambda$、$\Lambda_3$ 值．给定 $(\lambda\mu)$ 后，$SU(3)$ 表示的状态总数为：

$$\sum_{p=0}^{\lambda}\sum_{q=0}^{\mu}\left[2\left(\frac{\mu}{2}+\frac{p}{2}-\frac{q}{2}\right)+1\right]=\frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\lambda+\mu+2)\tag{35}$$

至此，我们不仅给出了 Elliott $SU(3)$ 代数的连续变量表示，而且求得了该表示下 $SU(3)$ 的一切不等价不可约表示的基矢．通过这一途径，把群的完备算子集的高阶偏微分方程组的本征值问题，化成最高权态的一阶偏微分方程组的本征值问题． 这里的方法具有一般性，即群表示论的连续变量或微分方程途径．

应当指出，Elliott $SU(3)$ 模型是用于描述原子核系统的；由于 Pauli 原理，并非所有的 $SU(3)$ 不可约表示都是原子核系统所允许的．正确地考虑 Pauli 原理对 $SU(3)$ 不可约表示的限制是 Elliott $SU(3)$ 模型的关键问题之一．在用生成坐标方法求解 Elliott 模型的连续变量表示时，Pauli 原理是通过起始状态——(9) 式中的 $|\phi_0\rangle$ 引进的： 要求 $|\phi_0\rangle$ 是反对称化的原子核的波函数，这就对 $(\lambda\mu)$ 加以限制． 由于 $SU(3)$ 生成子对于

核子坐标的交换是对称的，$|\phi_0\rangle$ 被群元作用，以及后来的投影运算，均不改变波函数的反对称性，故 Pauli 原理始终保持．在前面的讨论中，由于我们没有考虑 Pauli 原理对 $|\phi_0\rangle$ 的限制，所以求得了 $SU(3)$ 的所有的不等价不可约表示．

## 三、Elliott $SU(3)$ 模型中的集体转动态

求集体转动态，需要实行从内禀态到转动态的投影变换．投影算子为

$$\hat{P}^L = \frac{2L+1}{8\pi^2 a(\lambda\mu LK)}\int d\Omega' D^L_{MK}(\Omega')\hat{R}(\Omega') \tag{36}$$

其中转动算子

$$\hat{R}(\Omega') = e^{-i\alpha' L^D_z}\cdot e^{-i\beta' L^D_y}\cdot e^{-i\gamma' L^D_z} \tag{37}$$

连续变量表示中的集体转动态

$$\phi^{(\lambda\mu)}_{KLM}(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu) = \frac{2L+1}{8\pi^2 a(\lambda\mu LK)}\int d\Omega' D^L_{MK}(\Omega')\cdot e^{-i\alpha' L_z^{D(\alpha,\beta,\gamma)}} \cdot e^{-i\beta' L_y^{D(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu)}}\cdot e^{-i\gamma' L_z^{D(\alpha,\beta,\gamma)}}\phi^{[\lambda\mu]}_m(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu) \tag{38}$$

从(23)式可知角动量算子作用在权态上等价于四极算子作用在极态上，而后者可以产生不同的角动量 $L$，通过 $D^L_{MK}$ 投影出确定的 $(KLM)$ 态．对于 $\mu=0$ 的表示有

$$\phi^{(\lambda 0)}_{0LM}(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu) = P^L(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu)\phi^{[\lambda 0]}_m(\theta,\nu), \tag{39}$$

$K$、$L$、$M$ 的取值见文献[5]．

选择如下的模型哈密顿量[8]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + K\hat{Q}\cdot\hat{Q} = \hat{H}_0 + K(\hat{C}_2 - 3\hat{L}^2). \tag{40}$$

由于投影算子 $\hat{P}^L$ 与 $\hat{H}^D$、$\hat{L}^{D^2}$ 对易，

$$[\hat{H}^D, \hat{P}^L] = [\hat{L}^{D^2}, \hat{P}^L] = 0, \tag{41}$$

从本征方程

$$\hat{H}^D\phi^{(\lambda\mu)}_{KLM}(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu) = [\alpha(N,\lambda,\mu) - 3KL(L+1)]\phi^{(\lambda\mu)}_{KLM}(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu), \tag{42}$$

很容易得到

$$(\hat{H}^D + 3K\hat{L}^{D^2})\phi^{[\lambda\mu]}_m(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu) = \alpha(N,\lambda,\mu)\phi^{[\lambda\mu]}_m(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu), \tag{43}$$

其中

$$\alpha(N,\lambda,\mu) = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}A\right) + KC_2(\lambda,\mu). \tag{44}$$

$C_2$ 是二阶 Casimir 算子 $\hat{C}_2$ 的本征值

$$\hat{C}_2(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu)\phi^{[\lambda\mu]}_m(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\nu) = \frac{2}{3}[(\lambda+\mu+3)(\lambda+\mu) - \lambda\mu]\phi^{[\lambda\mu]}_m. \tag{45}$$

通常把 $\hat{H}+3K\hat{L}^2$ 叫内禀哈密顿量，而 $\alpha(N,\lambda,\mu)$ 叫内禀能量．前面已指出，$\lambda$ 与轴对称形变相联系，$\mu$ 与非轴对称形变有关．因此，内禀量子数 $(\lambda\mu)$ 与 Bohr 模型中的 $\beta$ 和 $\gamma$ 振动量子数相对应，而内禀能 $\alpha(N,\lambda,\mu)$ 与 $\beta$ 和 $\gamma$ 振动能量相对应．

# 四、讨　论

动力学群的连续变量表示有两方面的问题：1）群空间和陪集空间中连续变量的选取以及生成元连续变量表示的计算；2）对于给定的群的连续变量表示，求出群的一切不可约表示基矢及其量子数．而这两个问题结合在一起，就构成了群表示论的连续变量或微分方程途径．本文和前文[8]一道，以 $SU(3)$ 群为实例，完成了这两方面的工作．在前文中，强调了 Elliott $SU(3)$ 群连续变量表示的几何意义，陪集空间算子的参数选取 5 个 $a_\mu$，这导致非正则群链．加之对陪集算子没有进一步做 Euler 角类型的分解，使得 $SU(3)$ 生成元的连续变量表示异常复杂．针对这一缺点，我们选用正则群链，并对陪集算子做 Euler 角类型的分解，导致较为简单的生成元的连续变量表示．剩下的问题是求不可约表示基矢及其量子数．有了生成元的连续变量表示（这里是在正则群链的陪集空间做的，也可以不在正则群链的陪集空间做）以后，求不可约表示基矢时，我们回到生成元的 Cartan 标准形和正则群链，运用 $H_i$ 对于极态 $\phi_m$ 的本征方程和 $E_\alpha$ 给出的极态条件，得出确定 $\phi_m$ 的完整的一阶偏微分方程组．在本文的情况下，该方程组可分离变量，十分容易求解．从极态的连续、单值、有界和周期性条件，得出 $(\lambda\mu)$ 的取值范围即不可约表示量子数．从极态 $\phi_m$ 出发运用降算子施行常规的微分运算，就可以求得一切不等价不可约表示基矢及其相应的量子数，完成了 $SU(3)$ 连续变量表示下的求解问题．

上述求解 $SU(3)$ 连续变量不可约表示基矢的方法具有普遍性，把这一方法推广到一般动力学群的工作正在进行中．

# 附　录

正文中 Dyson 表示之定义可写成

$$\hat{G}^D\langle\phi_0|S^+ = \langle\phi_0|S^+\hat{G} \tag{A1}$$

其中

$$S^+ = e^{i\nu L_y}\cdot e^{i\frac{\gamma}{\sqrt{6}}(Q_2+Q_{-2})}\cdot e^{i\beta L_z}\cdot e^{i\frac{\alpha}{\sqrt{6}}(Q_2+Q_{-2})}\cdot e^{i\frac{\theta}{3}Q_0} \tag{A2}$$

由 $U(2)$ 子代数的封闭性及 (A1) 式可算得

$$\begin{gathered}\frac{3}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} = Q_0^D,\quad \frac{\sqrt{6}}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} = (Q_2+Q_{-2})^D,\quad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta} = \cos 2\alpha L_z^D + \frac{i}{\sqrt{6}}\sin 2\alpha(Q_2^D - Q_{-2}^D)\\ \sqrt{6}\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma} = \cos 2\beta(Q_2^D + Q_{-2}^D) - i\sin 2\beta\cos 2\alpha(Q_2^D - Q_{-2}^D) + \sqrt{6}\sin 2\beta\sin 2\alpha L_z^D\end{gathered} \tag{A3}$$

由 (A3) 解得：

$$\begin{aligned}Q_0^D &= \frac{3}{i}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad (Q_2+D_{-2})^D = \frac{\sqrt{6}}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha},\\ (Q_2-Q_{-2})^D &= i\sqrt{6}\left[-\cos 2\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\beta\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin 2\alpha\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta} + \cos 2\alpha\csc 2\beta\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right]\\ L_z^D &= \left[-\sin 2\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\beta\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \cos 2\alpha\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{i}\sin 2\alpha\csc 2\beta\,\frac{\partial}{\partial\gamma}\right]\end{aligned} \tag{A4}$$

对于 $SU(3)$ 的其余生成元，根据 Dyson 表示一般性质，设

$$\hat{G}^D = 3d^\theta(G)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sqrt{6}\,d^\alpha(G)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \alpha^\beta(G)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\beta} + \sqrt{6}\,d^\gamma(G)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\gamma} + d^\nu(G)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu}. \tag{A5}$$

把 (A5) 代入 (A1) 左边,具体计算得

$$\hat{G}^D\langle\phi_0|S^+ = \langle\phi_0|[L_x, L_y, (\theta_1+\theta_{-1}), (\theta_1-\theta_{-1}), \theta_0]B\begin{pmatrix} d^\theta(G) \\ d^\alpha(G) \\ d^\beta(G) \\ d^\gamma(G) \\ d^\nu(G) \end{pmatrix}S^+ \tag{A6}$$

其中 5 × 5 矩阵 $B$ 的元素为:

$$\begin{aligned} &B_{12} = -\sqrt{6}\,S(2\beta)S(2\gamma)S(\nu), \quad B_{13} = -C(2\gamma)S(\nu); \quad B_{25} = 1; \\ &B_{32} = -iS(2\beta)C(2\gamma)S(\nu), \quad B_{33} = \frac{i}{\sqrt{6}}S(2\gamma)S(\nu); \quad B_{41} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,S(2\nu), \\ &B_{42} = -\frac{1}{2}C(2\beta)S(2\nu); \quad B_{44} = -\frac{1}{2}S(2\nu); \quad B_{51} = \left(1-\frac{3}{2}S^2(\nu)\right), \\ &B_{52} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,C(2\beta)S^2(\nu), \quad B_{54} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,S^2(\nu); \quad \text{其余 } B_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{A7}$$

从 (A7) 算得:

$$\det B = \frac{i}{2}S(2\beta)S^2(\nu)S(2\nu) = \frac{i}{2}\mu(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \nu) \tag{A8}$$

$$\begin{aligned} &(B^{-1})_{14} = \sqrt{6}\,\frac{S^2(\nu)}{S(2\nu)}, \quad (B^{-1})_{15} = 1; \quad (B^{-1})_{21} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{S(2\gamma)}{S(2\beta)S(\nu)}, \\ &(B^{-1})_{23} = i\frac{C(2\gamma)}{S(2\beta)S(\nu)}; \quad (A^{-1})_{31} = -\frac{C(2\gamma)}{S(\nu)}, \quad (B^{-1})_{33} = -i\sqrt{6}\,\frac{S(2\gamma)}{S(\nu)}; \\ &(B^{-1})_{41} = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{C(2\beta)S(2\gamma)}{S(2\beta)S(\nu)}, \quad (B^{-1})_{43} = -i\,\frac{C(2\beta)C(2\gamma)}{S(2\beta)S(\nu)}, \\ &(B^{-1})_{44} = -2\,\frac{\left(1-\frac{3}{2}S^2(\nu)\right)}{S(2\nu)}, \quad (B^{-1})_{45} = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad (B^{-1})_{52} = 1; \quad \text{其余 } (B^{-1})_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{A9}$$

对于 $\hat{G} = L_x, L_y, (\theta_1+\theta_{-1}), (\theta_1-\theta_{-1})$ 及 $\theta_0$, 从 (A1) 右边可得算到:

$$\langle\phi_0|\hat{S}^+\hat{G} = \langle\phi_0|[L_x, L_y, (\theta_1+\theta_{-1}), (\theta_1-\theta_{-1}), \theta_0]\begin{pmatrix} f_1^G \\ f_2^G \\ f_3^G \\ f_4^G \\ f_5^G \end{pmatrix}S^+ \tag{A10}$$

其中 $f_i^G(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \nu)$ 是已经算出的已知函数. 比较 (A6) 与 (A10), 可求得待定系数函数 $d^i(G)$:

$$d^i(G) = (B^{-1})_{ij}f_j^G(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \nu), \quad i = \theta, \alpha, \beta, \gamma, \nu \tag{A11}$$

代入 (A5) 即得 $SU(3)$ 的全部生成元的 Dyson 表示.

## 参 考 文 献

[1] J. P. Elliott, Symmetry in Physics (The Macmillan Press Ltd, 1979).
[2] B. G. Wybourne, Classical Groups for Physics (John Wiley, 1974).

[3] Howard Georgi, Lie Algebras in Particle Physics (Benjamin, 1982).
[4] M. Moshinsky, Group Theory and the Many-Body Problem (Gordon and Breach, 1968).
[5] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc.*, **245**(1958), 128, 567; **272**(1963), 557.
[6] Cheng, Li Wu, Da Hsuan Feng, *Phys. Lett.*, **168B**(1986), 313.
[7] Rowe, *J. Phys. A. Math. and Gen.*, **19**(1986), 1093.
[8] 王顺金，曹建民、徐躬耦，高能物理与核物理，**11**(1987)，111.
[9] 徐躬耦、王顺金、杨亚天，动力学群表示论的生成坐标途径，(待发表).
[10] T. J. Nelson, *J. Math. Phys.*, **6**(1967), 677.
[11] 陈金全，群表示论的新途径，上海科学技术出版社，(1984)，p. 216.
[12] M. Beg and M. Rashid, *J. Math. Phys.*, **6**(1965), 677.
[13] D. Akyeampong and M. Rashid, *J. Math. Phys.*, **13**(1972), 1218.
[14] M. Harvey, *in 'Advances in Nuclear Physics'*, Vol. 1, 1969.

# SOLUTION OF ELLIOTT $SU(3)$ MODEL IN CONTINUOUS VARIABLE REPRESENTION

CAO JIANMIN　　WANG SHUNJIN
*(Lanzhou University)*

## ABSTRACT

A new continuous variable representation of the Elliott $SU(3)$ model is given. Based on this representation, a novel approach——the extreme state eigen equation approach is proposed, by which all irreducible representation bases of $SU(3)$ in canonical group chain have been obtained. By virtue of projection operation, the Elliott $SU(3)$ irreducible bases are given. The physics and geometric meaning of this representation is discussed.