

C型块状磁铁涡流场的有限元分析

裴国玺 张武 田宝瑛
(中国科学技术大学,合肥)

徐建铭
(中国科学院高能物理研究所,北京)

摘 要

本文对近几年发展起来的二维时变场的有限元方法作了详细介绍,对合肥同步辐射装置的块状模拟弯铁进行了实算,理论计算结果同实验测量吻合较好,论证了块状弯铁用于慢加速电子储存环的可能性。

一、引 言

很多装置,由于一个方向的尺寸远大于其他方向,可以简化为二维问题处理。静态线性二维问题处理起来比较容易,但对依赖于时间的非线性二维问题,解起来仍有不少困难。有些文献的作者对问题附加了一些限制,比如正弦激励、线性的磁化曲线等。Aldefeld^[1]曾用有限差分法克服了这些困难,但仍然有很多不足之处,如不能适应各种复杂的边界条件等。后来 J. A. MacBain^[2]把有限差分改为有限元,才使这一工作更加完善。但对具体问题也还存在着解的稳定性和收敛性问题。

我们参照 MacBain 的方法,对中国科学技术大学国家同步辐射实验室的一块模拟磁铁——C型块铁做了计算,旨在研究其用于慢加速电子储存环的可能性。

二、基本方程和边界条件

介质中的麦克斯韦方程组:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (4)$$

和电磁性质方程:

$$D = \varepsilon E, \quad (5)$$

$$B = \mu H, \quad (6)$$

$$J = \sigma E. \quad (7)$$

其中 ε 是介质的介电常数, μ 是磁导率, σ 是电导率. 引进磁矢势 \mathbf{A} , 很容易从方程 (1)~(7) 得到二维非线性方程:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma(x, y, t) \nabla \phi(x, y, t)) + S(x, y, t) \\ = \sigma(x, y) \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

式中 γ 是磁导率的倒数, S 为电流密度, ϕ 为 \mathbf{A} 的 z 分量.

图 1 是 C 型铁的截面图, 坐标系的选取是把中心右 OA 当成 x 轴. 原点定在弯铁的曲率中心. 选 $OABD$ 为求解区域, 显然有如下的边界条件和衔接条件:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{OA} = 0, \quad (9)$$

$$\phi|_{ABCD} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0, \quad (11)$$

$$\phi_2 - \phi_1 = 0. \quad (12)$$

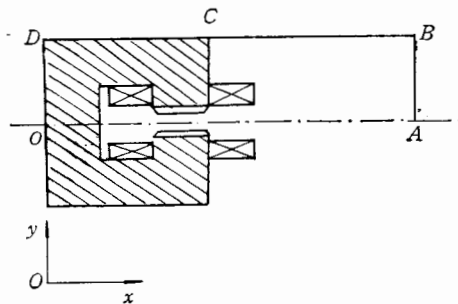


图 1 C 型铁截面

三、离散方程及其解

方程 (8) 常用的处理方法是在一个瞬时考虑问题, 即首先把时间 t 看作某一参数, 对偏微分方程的空间坐标离散, 再用差分方法对时间维处理. 用三角网格剖分和向后欧拉差分不难得出离散方程:

$$\phi_{\text{Base}}^{\text{new}} = \frac{\phi_{\text{Base}}^{\text{old}} + \Delta t \left[\sum_{i=1}^6 \frac{W_i \phi_i^{\text{new}}}{G_{\text{Base}}} + \frac{\dot{S}_{\text{Base}}}{G_{\text{Base}}} \right]}{\left[1 + \Delta t \sum_{i=1}^6 W_i / G_{\text{Base}} \right]}. \quad (13)$$

“Base” 表示我们当前所关心的点,

$$S_{\text{Base}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 \Delta_i S_i, \quad G_{\text{Base}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 \sigma_i \Delta_i,$$

求和是对 “Base” 周围相邻 6 个单元进行的, $\phi_{\text{Base}}^{\text{old}}$ 是所考虑点上一时间步的 ϕ 值, w 称为耦合系数. 如图 2 中 D 点和 E 点的耦合系数:

$$w = \frac{1}{2} (\gamma_1 \cot \theta_1 + \gamma \cot \theta_2).$$

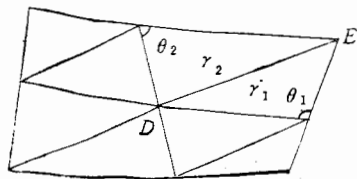


图 2

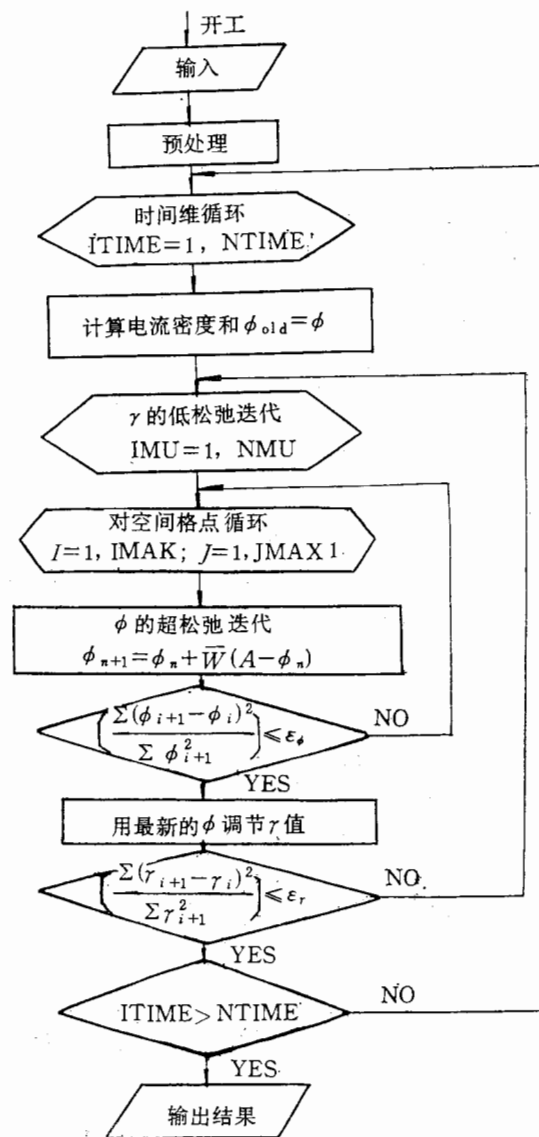


图 3 程序框图

在以上方程中, ϕ , S , w_i 都是相互制约的, 采用迭代解法。这里有两个迭代, 一是磁势 ϕ 的超松弛迭代:

$$\phi_{n+1}^{\text{new}} = \phi_n^{\text{new}} + \bar{w} \left[\frac{\phi_n^{\text{old}} + \Delta t \left(\sum_{i=1}^6 w_i \phi_i^{n,n+1} + \frac{S}{G} \right)}{\left(1 + \Delta t \sum_{i=1}^6 w_i / G \right)} - \phi_n^{\text{new}} \right]. \quad (14)$$

式中 \bar{w} 是超松弛因子, 取 1.95, $\phi_i^{n,n+1}$ 表示取最新结果的 ϕ 值。二是 γ 的迭代, 它包含在系数 w_i 中

$$\gamma^{(l+1)} = Q\bar{\gamma}^{(l+1)} + (Q-1)\gamma^l. \quad (15)$$

Q是
我们
的初

空间
去, C
速时
中心
到, 湮
速时
时间
已相
影响
对磁
度 60
给出
求。步
比较
而定。
速时
4, 以
步提
网格

[1]
[2]
[3]

Q 是低松弛因子, 取 0.2, $\bar{\gamma}$ 是用最新磁场值查磁化曲线得到的 γ . 由于问题的非线性, 我们先给出一个 γ 分布, 迭代求 ϕ , 然后再修改 γ , 进行 γ 迭代, 如图 3 所示直到收敛. ϕ 的初值选零, γ 初值为 0.0011, 控制误差 ϵ_ϕ 和 ϵ_γ 分别取 1.0×10^{-5} 和 0.05.

四、计算结果及分析

对中国科技大学国家同步辐射实验室的一块模拟磁铁, 在 M-140 机上进行了实算. 空间格点数 80×37 , 电流分 10 步加上去, CPU 时间大致 3 小时. 图 4 是不同加速时间下的场形分布 (已把 x 零点从曲率中心移到磁极间隙中心). 从图中可以看到, 涡流效应对场分布的影响很大, 随着加速时间的延长, 这种影响又很快减弱, 加速时间为 4 分钟时, 动态场同静态场的分布已相差甚微, 涡流效应可略而不计.

就计算而言, 有两种办法判断涡流场影响的大小. 如果计算精度好于好场区内对磁场分布的要求 (设计指标: 好场区宽度 60 mm, $\Delta B/B \leq \pm 5 \times 10^{-4}$) 可直接给出动态场的分布, 看其是否满足设计要求. 如果计算精度不足以做上述判断, 可比较静态场同动态场分布, 视其差别大小而定. 我们采用的是后者.

为了对计算精度有个估计, 我们把加速时间为 2 分钟时测得的结果也画入了图 4, 以虚线表示^[3]. 通过比较可以看出, 在 0.1% 精度范围内, 计算同实测吻合较好. 进一步提高计算精度可从以下几个方面作些努力和改进: 磁铁的磁化曲线和电导率要测准, 网格剖分加密, 适当改变时间步长使结果最佳. 另外, 把计算量改为双精度进行计算.

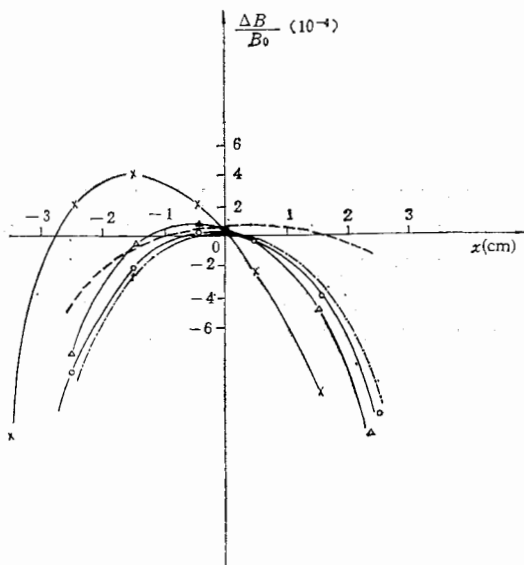


图 4 中心面 x 轴上的场形
 —•—静态情况 —○—加速时间 4 分钟 —△—加速时间 2 分钟 —×—加速时间 0.5 分钟 ———加速时间 2 分钟的测量结果

参 考 文 献

- [1] B. Aldefeld, "A Numerical Solution of Transient Nonlinear Eddy-Current Problems Including Moving Iron Parts" INTERMAN Conference 1978, France.
- [2] J. A. MacBain "A Numerical Analysis of Time-Dependent Two-Dimensional Magnetic Fields" IEEE Vol. MAG-17, No. 6, 1981.
- [3] 裴国玺等, 高能物理与核物理, 10(1986), 578.

一是磁

(14)

包含在

(15)

THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF EDDY-CURRENT FIELDS OF A C-TYPE SOLID YOKE BENDING MAGNET

PEI GUO-XI ZHANG WU TIAN BAO-YING

(University of Science and Technology of China, Hefei)

XU JIAN-MING

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

The finite element method developed recent years and used for solving two-dimensional time-dependent magnetic fields is introduced. Using this method, we have calculated the eddy-current fields of a C-type solid yoke bending magnet which is a model magnet of the 800 MeV electron storage ring in Hefei. The calculation results are in agreement with measurements. The possibility of applying a solid yoke bending magnet in the case of slow acceleration is discussed.

的物
的出
低,因
电离
能的
技术,
Y. 这
了这
在大
到的
位置
修正,
高飞