

ϕ^4 模型的蒙特卡洛重整化群研究

李志兵 钟朝武 陈天峯 黄五群
(南开大学,天津)

摘 要

本文采用 Callaway 的蒙特卡洛重整化群方案作出了二维三角点阵 ϕ^4 模型的重整化群流向图、固定点和临界指数。在区域 $0.1 < \lambda < 10^9$ 内没有发现固定点,大 λ 极限的结果与 Ising 模型一致。

一、引 言

格点场论的连续极限行为是格点理论的核心问题之一。1976年 Ma^[1] 提出把蒙特卡洛模拟方法和实空间重整化群方法结合起来(简称 MCRG 方法)分析临界性质。至今,这方面的工作已取得了很大的进展。不少作者提出各种方法实现 Ma 的思想^[2-4],并证明 MCRG 方法是分析临界性质及连续极限的十分有效的工具。两年前, Callaway^[5] 提出一个确定 block 耦合常数的巧妙方法,使计算的系统误差有了比较大的改进。

对 ϕ^4 模型已经有很多借助微扰论和维数展开的解析研究。1981年 M. Aizenmann^[6] 给出维数大于四的 ϕ^4 模型平庸的严格证明。维数等于四的 ϕ^4 模型是否平庸仍没有最后定论。维数小于四的情况通常认为是非平庸的,但对其非微扰的重整化群性质仍了解得不多。Callaway 用他自己提出的 MCRG 方案对二、三和四维方块点阵的 ϕ^4 模型作了研究^[7],除了 Ising 极限的铁磁固定点和退耦合固定点外,没有得到新的固定点。

我们在二维三角点阵上对 ϕ^4 模型进行了 MCRG 研究。在小 λ 端采用了新的计算方法,对结果的准确性有较好的改进,发现流向图有变化的趋势。在大 λ 端得到与 Callaway 的结果一致的流线和 Ising 极限。不同点阵的一致性正是普适性所预言的。这里采用的三角点阵具有最大的最近邻数(就正规点阵而言),可以加快趋向连续极限的速度^[8]。

二、二维三角点阵 ϕ^4 模型的 MCRG 研究

考虑格点上的标量场 $\{\varphi_i\}$, 其作用量为 $A[\varphi]$, 经 block 变换后的作用量为 $A'[\varphi']$, 它由下式给出:

$$\exp(-A'\{\varphi'\}) = \prod_i \int d\varphi_i P[\{\varphi'\}, \{\varphi\}] \exp(-A\{\varphi\}). \quad (1)$$

其中 φ' 为 block 场量, P 为投影算子, 为方便选取 P 为

$$P[\{\varphi'\}, \{\varphi\}] = N(\beta) \prod_I \exp\{-\beta(\varphi'_I - g_I\{\varphi\})^2\}. \quad (2)$$

此处

$$g_I\{\varphi\} = \text{sign}\left(\sum_{i \in I} \varphi_i\right) \sqrt{\sum_{i \in I} \varphi_i^2 / S}. \quad (3)$$

$N(\beta)$ 为归一化因子, 使得

$$\prod_i \int d\varphi'_i P[\{\varphi'\}, \{\varphi\}] = 1. \quad (4)$$

$\sum_{i \in I}$ 表示对第 I 个 block 内的 Site 场量求和, S 为一个 block 内的 Site 数目. 当 $\beta \rightarrow \infty$ 时(2)式变成多数法则的 δ -函数乘积.

在实欧空间, ϕ^4 模型的作用量可表示为

$$A[\varphi] = -T\{\varphi\} + \sum_i V(\varphi_i). \quad (5)$$

其中

$$T\{\varphi\} = K \sum_{\langle ij \rangle} \varphi_i \varphi_j \equiv K S_0\{\varphi\}. \quad (6a)$$

$$V(\varphi_i) = \lambda(\varphi_i^2 - f)^2. \quad (6b)$$

$\langle ij \rangle$ 代表对最近邻求和, S_0 为最近邻相互作用. 经标度变换可令 $f = 1$. 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 此模型虽然趋向 Ising 模型: $\varphi_i = \pm 1$, Site 作用量为 $A_{\text{Ising}}\{\varphi\} = -K \sum_{\langle ij \rangle} \varphi_i \varphi_j$. 这个性质可以用于自洽检验. 经 block 变换后的作用量原则上会出现如下式所示的各种相互作用:

$$A'\{\varphi'\} = -T'\{\varphi'\} + \sum_I V'(\varphi'_I). \quad (7a)$$

$$T'\{\varphi'\} = K' S_0\{\varphi'\} + K'_1 S_1\{\varphi'\} + K'_2 S_2\{\varphi'\} + \dots. \quad (7b)$$

$$V'(\varphi'_I) = \lambda'(\varphi'^2_I - f')^2. \quad (7c)$$

其中 S_1, S_2, \dots 分别为次近邻、四近邻等等相互作用.

在一般的 MCRG 方案中, 测量 block 参数 K' , λ' 和 f' 时需要将 (7b) 式中新出现的相互作用作一截取. Callaway 的方案大大地压低了这种截取引入的系统误差. 主要技巧是在预先设计的 block 组态下进行 Site 组态的蒙特卡洛模拟. 令 $\tilde{S}_\alpha\{\varphi'\}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) 为 $S_\alpha\{\varphi'\}$ 中与 block 场量 φ'_0 有关的项. 适当选取一个 block 组态 $\{\varphi'_I, I \neq 0\}$, 仅让 φ'_0 随 Site 组态的变化而涨落, 使得尽可能多的与“不关心”的参数有关的 \tilde{S}_α 恒等于零. 在图 1(a) 的组态中, 可以明显看到 \tilde{S}_0, \tilde{S}_1 和 \tilde{S}_2 都等于零. 为使 block 组态为设计的确定态, Site 作用量必须增加一项 $\sum_{I \neq 0} \beta(\varphi'_I - g_I\{\varphi\})^2$.

在组态图 1(a) 下, 从 Site 的平衡态系列中块化出 φ'_0 的概率密度为

$$\rho(\varphi'_0) \sim \exp\{-\lambda'(\varphi'^2_0 - f')^2\}. \quad (8)$$

由此可测量出 λ' 和 f' :

$$f' = \frac{\langle \varphi_0'^4 \rangle - 3\langle \varphi_0'^2 \rangle \langle \varphi_0'^2 \rangle}{\langle \varphi_0'^4 \rangle - 3\langle \varphi_0'^2 \rangle^2}. \quad (9a)$$

$$\lambda' = \frac{1}{4} \frac{1}{\langle \varphi_0'^4 \rangle - f' \langle \varphi_0'^2 \rangle}. \quad (9b)$$

测量 K' 可采用组态图 1(b), 此时 $\tilde{S}_0 \approx 0$, (8)式相应地在指数中增加一项 $K'\tilde{S}_0[\varphi']$. 当 λ 很大时, $\varphi_0' \approx \pm 1$, 近似地有

$$K' = \frac{1}{2\alpha} \ln(\rho_+/\rho_-). \quad (10)$$

其中 $\rho_+(\rho_-)$ 为 φ_0' 大于零(小于零)的几率, α 为 φ_0' 的最近邻场量之和.

求 block 变换的偏导数矩阵有标准的方法^[2]. 当 λ 很大时使用下式更为简便^[5]:

$$\frac{\partial K'}{\partial K} = \frac{1}{2\alpha} (\langle S_0 \rangle_+ - \langle S_0 \rangle_-). \quad (11)$$

其中 $\langle S_0 \rangle_+(\langle S_0 \rangle_-)$ 为 S_0 在 $\varphi_0' \geq 0$ ($\varphi_0' < 0$) 的组态中的平均值. 在固定点 K^* 附近, 有线性展开式

$$K' - K^* = \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} \cdot (K - K^*). \quad (12)$$

可用(11)式近似地代替上式中在固定点的偏导数, 求出 K^* 的位置. 临界指数为

$$y = \ln \lambda_c / \ln \sqrt{3}. \quad (13)$$

此处 λ_c 即前述偏导数.

在小 λ 端, Ising 模型不再是 ϕ^4 模型的好的近似, 故(10)式不适用, 这时我们用了级数拟合法. 设 ρ_{x_0} 为 $\varphi_0' \geq x_0$ 的几率, 可把它展开成级数:

$$\rho_{x_0} = \frac{\sum_{K,m,n} y_0^K a^m b^n \Gamma\left(\frac{3K+2m+n+1}{4}\right) / K!m!n!}{\sum_{K,n} [1 + (-1)^{K+n}] \frac{y_0^K b^n}{K!n!} \sum_m \frac{a^m}{m!} \Gamma\left(\frac{3K+2m+n+1}{4}\right)}. \quad (14)$$

其中

$$y_0 = -4 \sqrt[4]{\lambda'} x_0, \quad (15)$$

$$a = 2 \sqrt{\lambda'} f' - \frac{3}{8} y_0^2,$$

$$b = \frac{\alpha K'}{\sqrt[4]{\lambda'}} - y_0 \left(\frac{y_0^2}{16} - \sqrt{\lambda'} f' \right).$$

(14)式左端可在计算机上测量出来; 当 $x_0 = 0$ 时, 右端是 K' 的单调函数. 要求(14)式成立可拟合出 K' . 我们还可以导出测量 K' 的准确公式:

$$K' = \frac{4\lambda'(\langle \varphi_0'^4 \rangle - f' \langle \varphi_0'^2 \rangle) - 1}{\alpha \langle \varphi_0' \rangle}. \quad (16)$$

但上式的统计行为没有(14)式好.

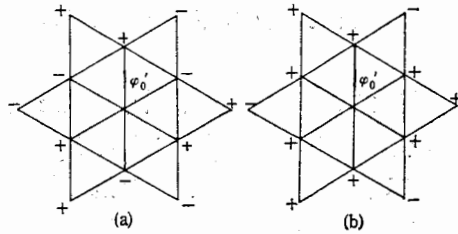


图 1

三、结果与分析

我们在 12×12 的周期性边界的三角点阵上得到 ϕ^4 模型的定性流向图如图 2 所示.

与 Callaway^[7] 的结果比较,本文得到的固定点要低一些。这是意料中的,因为我们采用了不同的点阵。图2中 $\lambda \sim 1$, $K > 0$ 部分的上翘趋势是 Callaway 的结果中所没有的。

在大 λ 端,我们找到两个固定点: $(K^*, \lambda^*) = (0.24, \infty)$ 和 $(0, \infty)$ 。第一个固定点是排斥固定点,对应 Ising 模型的铁磁固定点,测得其临界指数 $\gamma = 0.81$, 参见图3和表1。第二个固定点为吸引固定点,对应 Ising 模型的退耦合固定点。除上述两个固定点外,在 $0.1 \leq \lambda \leq 10^9$ 的范围内没有发现其它固定点。

表 1

总迭代次数	固定点 K^*	临界指数 γ	$(\lambda = 10^9)$
20000	0.240	0.760	12×12 点阵
45000	0.244	0.764	12×12 点阵
50000	0.241	0.778	12×12 点阵
精确值	0.27	1.0	Ising model

与之相比较的 Callaway 在方块点阵上得到的结果是:

总迭代次数	固定点 K^*	临界指数 γ	$(\lambda = 10^9)$
10000	0.47	1.0	45×45 点阵
20000	0.48	0.79	15×15 点阵
50000	0.71	2.0	10×10 点阵
精确值	0.44	1.0	Ising model

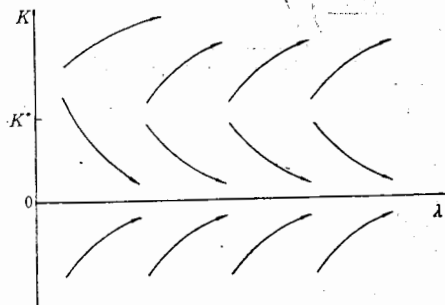


图 2

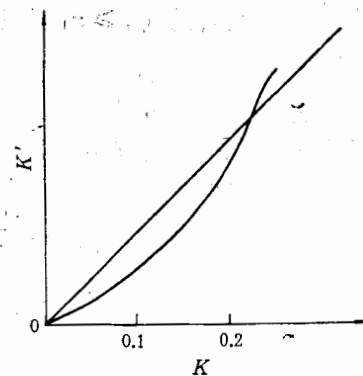


图 3

此处得到的固定点 ($K^* = 0.24$) 与 Ising 模型精确解 ($K^* = 0.27$) 的差异主要来源于对 Site 作用量动能项的选取。本文采用的 Site 作用量只包含最近邻相互作用。原则上应逐步增加其它相互作用,使结果更好。我们与只调节最近邻耦合常数的 Ising 模型 MCRG 研究中所得的 $K^* = 0.23$ 和临界指数 $\gamma = 0.88$ 相比,结果基本一致。已有结果表明,在作用量中增加次近邻和四自旋相互作用可以显著改善以上结果^[9]。

在大 λ 端的蒙特卡洛模拟中采用了 heat bath 方法,在小 λ 端采用 Metropolis 方法并分别用(10)式和级数拟合法测量了 block 耦合常数 K' ,部分数据列于表2。在不同区

域使用的两种蒙特卡洛方法在 $\lambda \sim 10$ 处吻合得很好, 如表 3 所示。

表 2 K' 和 $K'_{\text{级}}$ 分别由(10)式和级数拟合法求得

迭代次数	λ	K	K'	$K'_{\text{级}}$	λ'	f'
20000	10.	0.23	0.220	0.224	26.9	0.991
10000	8.	0.25	0.261	0.264	23.1	0.990
10000	5.	0.25	0.251	0.256	13.7	0.981
10000	3.	0.25	0.219	0.230	7.71	0.962
20000	1.	0.25	0.211	0.236	3.19	0.978
20000	0.5	0.25	0.231	0.251	1.77	1.12
20000	0.1	0.25	0.331	0.291	0.97	1.66

表 3

迭代次数	K	λ	K'	λ'	f'	方法
20000	0.23	10.	0.221	29.0	0.992	heat bath
20000	0.23	10.	0.220	26.9	0.991	Metropolis

本文计算工作得到南开大学计算中心的大力支持, 致谢。

参 考 文 献

- [1] S.-K. Ma, *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976), 461.
- [2] R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 859.
- [3] R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1165.
- [4] M. Creutz, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 875.
- [5] D. J. E. Callaway, R. Petronzio, *Phys. Lett.*, **B139**(1984), 189.
- [6] M. Aizenmann, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1.
- [7] D. J. E. Callaway, R. Petronzio, Ref. TH. 3844-CERN(1984).
- [8] A. Guha, M. Okawa, *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 2649.
- [9] 黄五群, 陈天岩, 钟朝武及李志兵, 高能物理与核物理, **11**(1987), 563.

MONTE CARLO RENORMALIZATION GROUP STUDY OF ϕ^4 MODEL

LI ZHI-BING ZHONG CHAO-WU CHEN TIAN-LUN HUANG WU-QUN

(Nankai University, Tianjin)

ABSTRACT

The Monte Carlo renormalization group method proposed by Callaway is applied to ϕ^4 model on two dimensional triangle lattice. The flow diagram, fixed point and critical exponent are determined. There is no fixed point in the range of $0.1 < \lambda < 10^0$. The large λ limit, as expected, is consistent with the Ising model.