

## $\gamma$ 矩阵的 Gordon 约化及其某些应用

苏君辰 吴式枢

(吉林大学, 长春)

### 摘 要

本文在 Gordon 恒等式的基础上, 推导出一些  $\gamma$  矩阵的约化公式. 应用这些公式来推导夸克反夸克间的单胶子交换势和约化夸克体系 Bethe-Salpeter 方程中的  $\gamma$  矩阵, 分别得到了与 Faessler 等人和 Mitra 等人不同的结果.

### 一、引 言

熟知 Gordon 恒等式<sup>[1]</sup>在量子场论的计算中是十分有用的公式. 利用这种公式可以很方便地揭示一个体系的自旋结构. Mitra 等人在他们利用 Bethe-Salpeter 方程计算介子和重子谱的论文<sup>[2,3,4]</sup>中, 首次应用 Gordon 恒等式来约化方程中核函数的  $\gamma$  矩阵, 求得了一些显示体系自旋结构的表示式. 但是, 由于他们没有正确地运用 Gordon 恒等式求得所需要的约化公式, 致使他们所推导的 Bethe-Salpeter 方程中的  $\gamma$  矩阵约化表示式出现了若干错误. 显然, 利用这种表示式所做的介子和重子谱的计算也不能说是可靠的.

本文第二节在 Gordon 恒等式的基础上, 进一步推导出一些  $\gamma$  矩阵的矩阵元的约化公式. 这些公式将  $\gamma$  矩阵的矩阵元更明显地通过  $\gamma^0$ 、自旋矩阵  $\Sigma$  等的矩阵元表示出来. 由于在约化公式中所出现的  $\gamma^0$ 、 $\Sigma$  和单位矩阵, 当通过  $2 \times 2$  自旋矩阵  $\sigma$  和单位矩阵表示时, 均呈现对角的形式, 这就给  $4 \times 4$  矩阵的矩阵元向  $2 \times 2$  矩阵的矩阵元的约化带来不少方便. 尤其是当从相对论的表示式向非相对论的表示式过渡时, 利用这些表示式往往使我们只需要考虑旋量波函数大分量的贡献, 从而大大简化了矩阵元的计算.

作为所求得的  $\gamma$  矩阵约化公式的一个直接应用, 本文第三节将再一次推导夸克-反夸克的单胶子交换势. 熟知夸克-反夸克散射道的单胶子交换势就是 Fermi-Breit 势<sup>[5]</sup>, 而湮没道的单胶子交换势首先由 Faessler 等人<sup>[6]</sup>讨论过. 他们曾利用所求得的单胶子交换势计算了核子反核子间的等效位势, 得出了核子和反核子在近距范围内总是排斥的结论. 本文作者及其合作者曾在前一篇文章<sup>[7]</sup>中指出了 Faessler 等人工作中的问题, 并根据自己所推导的夸克-反夸克湮没道单胶子交换势, 重新计算了核子-反核子的等效位势, 得出了与 Faessler 等人完全相反的结论. 本文将再一次肯定这一结果, 并将给出夸克-反夸克单胶子交换势另一种表示形式.

本文最后一节将指出 Mitra 等人文章中的错误之所在, 并将根据本文所求得之  $\gamma$  矩阵约化公式, 重新推导夸克体系 Bethe-Salpeter 方程的核函数中的  $\gamma$  矩阵约化表示式, 给出相应的正确结果。

## 二、Gordon 约化公式

通常所谓 Gordon 恒等式是指下列两个基本公式<sup>[1]</sup>:

$$\bar{u}^\alpha(p)\gamma^\mu u^\beta(q) = \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{2m} [(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu] u^\beta(q) \quad (1)$$

$$\bar{u}^\alpha(p)\gamma^\mu \gamma_5 u^\beta(q) = \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{2m} [(p-q)^\mu \gamma_5 + i\sigma^{\mu\nu}(p+q)_\nu \gamma_5] u^\beta(q) \quad (2)$$

为了求得进一步的约化公式, 有必要将(1)式的时间分量和空间分量分别写出来,

$$\bar{u}^\alpha(p)\gamma^0 u^\beta(q) = \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{2m} [(p+q)^0 + i\sigma^{j0}(p-q)^j] u^\beta(q) \quad (3)$$

$$\bar{u}^\alpha(p)\gamma^i u^\beta(q) = \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{2m} [(p+q)^i + i\sigma^{j0}(p-q)^0 - i\sigma^{ji}(p-q)^j] u^\beta(q) \quad (4)$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

利用 Dirac 方程、 $\gamma$  矩阵的反对易关系以及(4)式, 不难推出下列恒等式:

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(p)i\sigma^{j0}u^\beta(q) &= \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} \{ (p-q)^0 [(p+q)^j - i\sigma^{ji}(p-q)^j] \\ &\quad - 2m\gamma^0 [(p-q)^j - i\sigma^{ji}(p+q)^j] \} u^\beta(q) \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)式代入(3)式和(4)式, 再应用关系式:

$$\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk}\Sigma^k = \epsilon_{ijk}\Sigma_k \quad (6)$$

$\Sigma^k$  是四维自旋矩阵, 即可求得下列约化公式:

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(p)\gamma^0 u^\beta(q) &= \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{2m} \left\{ (p+q)^0 + \frac{1}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} [(p-q)^0(p^2 - q^2) \right. \\ &\quad \left. - 2m(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2 \gamma_0 + 4mi\gamma_0(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\Sigma}] \right\} u^\beta(q) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(p)\gamma^i u^\beta(q) &= \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{2m} \left\{ \left[ 1 + \frac{(p_0 - q_0)^2}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} \right] \right. \\ &\quad \cdot [(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - i(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \boldsymbol{\Sigma}] - \frac{2m(p_0 - q_0)}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} \\ &\quad \left. \cdot \gamma_0 [(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \times \boldsymbol{\Sigma}] \right\} u^\beta(q) \end{aligned} \quad (8)$$

为了讨论(2)式的约化, 有必要首先求得  $\gamma_5$  矩阵元的约化。根据  $\gamma_5$  的表示式<sup>[1]</sup>:

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\lambda\tau} \quad (9)$$

应用运动方程, 可得

$$\bar{u}^\alpha(p)\gamma_5 u^\beta(q) = \bar{u}^\alpha(p) \frac{i}{3!} \epsilon_{ijk} \frac{1}{2m} \gamma_0 [(p-q)_0 \sigma^{ij} \sigma^{jk} - i(p-q)^i \sigma^{jk}]$$

$$+ p_l \sigma^{il} \sigma^{ik} + q_l \sigma^{jk} \sigma^{il}] u^\beta(q) \quad (10)$$

按照类似的方法, 可证

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(p) \varepsilon_{ijk} \gamma^0 \sigma^{il} \sigma^{jk} u^\beta(q) &= \bar{u}^\alpha(p) \varepsilon_{ijk} \frac{1}{2m} [(p - q)_0 \sigma^{il} \sigma^{jk} \\ &+ i(p + q)^i \sigma^{jk} + p^l \sigma^{il} \sigma^{jk} - q^l \sigma^{jk} \sigma^{il}] u^\beta(q) \end{aligned} \quad (11)$$

将(11)式代到(10)式中, 即可得

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(p) \gamma_5 u^\beta(q) &= \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} [(p_0 - q_0)(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\Sigma} \\ &- 2m \gamma_0 (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\Sigma}] u^\beta(q) \end{aligned} \quad (12)$$

另外, 根据关系式<sup>[1]</sup>:

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma^5 = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \sigma^{\lambda\tau} \quad (13)$$

以及(5)式和(6)式, 可知:

$$\sigma^{i0} \gamma_5 = -i \Sigma^i \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(p) \sigma^{ij} \gamma_5 u^\beta(q) &= \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} \{ (p - q)_0 [\varepsilon^{ijk} (p + q)^k \\ &- i(p - q)^i \Sigma^j + i(p - q)^j \Sigma^i] - \frac{1}{2} m \gamma_0 [\varepsilon^{ijk} (p - q)^k \\ &- i(p + q)^i \Sigma^j + i(p + q)^j \Sigma^i] \} u^\beta(q) \end{aligned} \quad (15)$$

将(12)、(14)和(15)三式代入到(2)式, 即可求得其时间分量和空间分量如下的约化公式:

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(p) \gamma^0 \gamma^5 u^\beta(q) &= \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{2m} \left\{ \left[ 1 + \frac{(p_0 - q_0)^2}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} \right] (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\Sigma} \right. \\ &\left. - \frac{2m(p_0 - q_0)}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} \gamma^0 (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\Sigma} \right\} u^\beta(q) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha(p) \boldsymbol{\gamma} \gamma^5 u^\beta(q) &= \bar{u}^\alpha(p) \frac{1}{2m} \left\{ \left[ (\mathbf{p} + \mathbf{q})_0 + \frac{1}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} \right. \right. \\ &\left. \left. \cdot [ (p - q)_0 (\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2) - 2m(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 \gamma_0 ] \right] \boldsymbol{\Sigma} \right. \\ &\left. - \frac{4m}{4m^2 - (p_0 - q_0)^2} \gamma_0 [ i \mathbf{p} \times \mathbf{q} - \mathbf{p}(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \right. \\ &\left. - \mathbf{q}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \right\} u^\beta(q) \end{aligned} \quad (17)$$

显而易见, 在(7)、(8)、(12)、(16)和(17)诸式中所出现的  $4 \times 4$  矩阵, 当通过  $2 \times 2$  矩阵表示时, 均为对角矩阵。

### 三、夸克反夸克间的单胶子交换势

通常推导单玻色子交换势, 是利用旋量波函数通过二分量子旋波函数表示的形式和  $4 \times 4$  的  $\boldsymbol{\gamma}$  矩阵通过  $2 \times 2$  自旋等矩阵表示的形式来计算。此时在取  $\mathbf{p}^2/m^2$  级近似下, 旋量波函数的大小分量和  $\boldsymbol{\gamma}$  矩阵的各个分量的贡献均须考虑。但若利用以上所求得的  $\boldsymbol{\gamma}$  矩

行  
4

在  
换  
ST  
角

阵的约化公式来计算。如下所示,一般地仅需考虑旋量波函数大分量所给出的贡献。

对于如图所示的夸克-反夸克散射道和湮没道的单胶子交换相互作用,根据 Feynman 规则及下述对旋量、味和色矩阵元的 Fierz 换位变换<sup>[6,7,8]</sup>:

$$\begin{aligned} & \bar{u}^{\alpha'}(p_1)\gamma_{\mu\nu\beta'}(p_2)\bar{u}^{\beta}(p_2)\gamma^{\mu\alpha}(p_1) \\ &= -\bar{u}^{\alpha'}(p_1)u^{\alpha}(p_1)\bar{u}^{\beta'}(p_2)u^{\beta}(p_2) - \frac{1}{2}\bar{u}^{\alpha'}(p_1) \\ & \quad \times \gamma^{\mu\alpha}(p_1)\bar{u}^{\beta'}(p_2)\gamma_{\mu\beta}(p_2) + \frac{1}{2}\bar{u}^{\alpha'}(p_1)\gamma_{\mu}\gamma^{\nu\alpha}(p_1)\bar{u}^{\beta'}(p_2) \\ & \quad \times \gamma^{\mu}\gamma^{\nu\beta}(p_2) + \frac{1}{2}\bar{u}^{\alpha'}(p_1)\gamma_{\nu}u^{\alpha}(p_1)\bar{u}^{\beta'}(p_2)\gamma^{\nu\beta}(p_2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$(\lambda)_{a'b'} \cdot (\lambda)_{ba} = \left\langle a'b' \left| \frac{1}{6} (\lambda_1 - \lambda_2^*)^2 \right| ab \right\rangle \quad (19)$$

$$(\chi_i, \bar{\chi}_j)(\bar{\chi}_k, \chi_l) = \chi_i^{\dagger}\bar{\chi}_j^{\dagger} \left( \frac{1 - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2}{2} \right) \chi_l\bar{\chi}_k \quad (20)$$

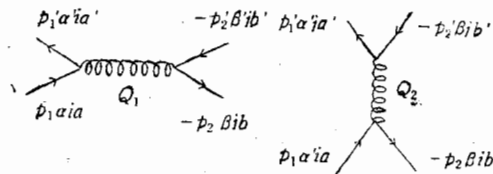


图 1

很容易写出  $u, d$  夸克与其反夸克的散射道等效相互作用矩阵元  $V_{12}$  和湮没道的等效相互作用矩阵元  $V_{1\bar{2}}$ , 如下:

$$\begin{aligned} V_{12} &= g^2 \xi_a^{\dagger} \xi_b^{\dagger} \left( \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2^*}{4} \right) \xi_a \xi_b \bar{u}^{\alpha'}(p_1)\bar{u}^{\beta'}(p_2)\gamma_{1\mu}\gamma_2^{\mu}u^{\alpha}(p_1)u^{\beta}(p_2) \\ & \quad \cdot \frac{1}{Q_1^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V_{1\bar{2}} &= -g^2 \xi_a^{\dagger} \xi_b^{\dagger} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2^*)^2}{24} \xi_a \xi_b \chi_i^{\dagger} \bar{\chi}_i^{\dagger} \frac{1}{2} (1 - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \chi_i \bar{\chi}_i \\ & \quad \cdot \bar{u}^{\alpha'}(p_1)\bar{u}^{\beta'}(p_2) \left[ -I - \frac{1}{2} \gamma_{1\mu}\gamma_2^{\mu} + \frac{1}{2} (\gamma_{1\mu}\gamma_1^{\mu})(\gamma_2^{\mu}\gamma_2^{\mu}) \right. \\ & \quad \left. + \gamma_1^{\nu}\gamma_2^{\nu} \right] u^{\alpha}(p_1)u^{\beta}(p_2) \frac{1}{Q_2^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (22)$$

在以上诸式中,  $u^{\alpha}(p), v^{\beta}(p)$  表示旋量波函数,  $\chi_i$  和  $\bar{\chi}_i$  分别为夸克和反夸克由  $G$  宇称变换相联系的  $SU(2)$  同位旋量波函数,  $\xi_a$  为色波函数,  $\boldsymbol{\tau}$  是同位旋 Pauli 矩阵,  $\lambda_c$  是色

$SU(3)$  的 Gell-Mann 矩阵,  $\lambda \cdot \lambda^* = \sum_{c=1}^8 \lambda_c \lambda_c^*$ . 此外,

$$Q_1 = p_1 - p_1' = p_2' - p_2, \quad Q_2 = p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \quad (23)$$

角标“1”与“2”分别标示属于夸克和反夸克的量。

利用约化公式(7)、(8)、(12)、(16)和(17)五式,不难求得(21)式和(22)式中的旋量矩阵元在准至  $p^2/m^2$  近似下的表示式。例如,

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\alpha'}(p'_1)\bar{u}^{\beta'}(p'_2)\gamma_{1\mu}\gamma_2^\mu u^\alpha(p_1)u^\beta(p_2) = \bar{u}^{\alpha'}(p'_1)\bar{u}^{\beta'}(p'_2) \left\{ I + \frac{1}{4m^2} \right. \\ \cdot [3\mathbf{q}^2 + 3\mathbf{k}^2 + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - (\gamma_1^0 + \gamma_2^0)(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 - (\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 \Sigma_1 \\ \cdot \Sigma_2 + 2i(\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \cdot [(1 + \gamma_1^0)\Sigma_1 + (1 + \gamma_2^0)\Sigma_2] + i[\mathbf{p} \\ \times (\mathbf{q} - \mathbf{k})] \cdot [(1 - \gamma_1^0)\Sigma_1 - (1 - \gamma_2^0)\Sigma_2] + [(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \\ \cdot \Sigma_1][(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \Sigma_2] \left. \right\} u^\alpha(p_1)u^\beta(p_2). \end{aligned} \quad (24)$$

式中

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2), \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (25)$$

考虑到旋量波函数的近似表示式:

$$u^\alpha(p) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) \varphi_\alpha \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \varphi_\alpha \end{bmatrix} \quad (26)$$

$\varphi_\alpha$  是二分量自旋量波函数。可见在准至  $p^2/m^2$  的近似下, (24) 式花括号中除了第一项外, 对于其余各项的计算, 只需作下列代换:

$$u^\alpha(p) \rightarrow \varphi_\alpha, \quad \gamma_0 \rightarrow I, \quad \Sigma \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \quad (27)$$

这样, 便可求得如下结果:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\alpha'}(p'_1)\bar{u}^{\beta'}(p'_2)\gamma_{1\mu}\gamma_2^\mu u^\alpha(p_1)u^\beta(p_2) \\ = \varphi_{\alpha'}^+ \varphi_{\beta'}^+ \left\{ 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{m^2} - \frac{1}{4m^2} (\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right. \\ \left. + \frac{3i}{4m^2} (\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{i}{8m^2} [\mathbf{p} \times (\mathbf{q} - \mathbf{k})] \right. \\ \left. \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{1}{4m^2} [(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1][(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2] \right\} \varphi_\alpha \varphi_\beta \end{aligned} \quad (28)$$

在(21)式中代入(28)式及下列传播子  $p^2/m^2$  级近似的表示式:

$$\frac{1}{Q_i^2 + i\epsilon} \approx -\frac{1}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} - \frac{[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{k})]^2}{4m^2(\mathbf{q} - \mathbf{k})^4} + \frac{(\mathbf{q}^2 - \mathbf{k}^2)^2}{4m^2(\mathbf{q} - \mathbf{k})^4} \quad (29)$$

便可求得

$$V_{12} = \varphi_{\alpha'}^+ \varphi_{\beta'}^+ \xi_{\alpha'}^+ \xi_{\beta'}^+ \hat{V}_{12} \xi_\alpha \xi_\beta \varphi_\alpha \varphi_\beta \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{V}_{12} = 4\pi\alpha_s \left(\frac{\lambda_1^i}{2}\right) \left(-\frac{\lambda_2^{i*}}{2}\right) \left\{ \frac{1}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} - \frac{1}{4m^2} - \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{q}^2}{m^2(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} + \frac{[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{k})]^2}{4m^2(\mathbf{q} - \mathbf{k})^4} - \frac{[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{k})]^2}{m^2(\mathbf{q} - \mathbf{k})^4} \right. \\ \left. + \frac{1}{4m^2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{1}{4m^2(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} [(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1][(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{3i}{4m^2} \frac{(\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} + \frac{i[\mathbf{p} \times (\mathbf{q} - \mathbf{k})] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)}{8m^2(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} \}. \quad (31)$$

这就是众所周知的 Fermi-Breit 势<sup>[5]</sup>.

完全类似的考虑和计算,可从 (22) 式求得

$$\begin{aligned} V_{12}^a &= \varphi_a^+ \varphi_{\beta'}^+ \xi_a^+ \xi_{\beta'}^+ \chi_i^+ \bar{\chi}_i^+ \hat{V}_{12}^a \chi_i \bar{\chi}_i \xi_a \xi_{\beta} \varphi_a \varphi_{\beta} \quad (32) \\ \hat{V}_{12}^a &= 2\pi\alpha_s \frac{(\lambda_1 - \lambda_2^*)^2}{24} \frac{(1 - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)}{2} \frac{1}{4m^2} \left\{ (3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \right. \\ &\quad - \frac{1}{4m^2} (3\mathbf{p}^2 + 8\mathbf{q}^2 + 8\mathbf{k}^2) - \frac{1}{4m^2} (\mathbf{p}^2 + 4\mathbf{q}^2 + 4\mathbf{k}^2) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \\ &\quad + \frac{1}{4m^2} [4(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + 4(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \\ &\quad + (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1] \\ &\quad \left. + \frac{i}{4m^2} [\mathbf{p} \times (\mathbf{q} - \mathbf{k})] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \right\}. \quad (33) \end{aligned}$$

式中  $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ . 这就是夸克-反夸克湮没道的单胶子交换势.

需要指出,在推导(33)式时,代入了胶子传播子如下的近似表示式:

$$\frac{1}{Q_2^2 + i\epsilon} \approx \frac{1}{4m^2} \left[ 1 - \frac{1}{2m^2} (\mathbf{q}^2 + \mathbf{k}^2) \right] \quad (34)$$

而在作者前一工作<sup>[7]</sup>中,为了便于与 Faessler 等人的工作相对比,曾采取下列传播子的近似表示式:

$$\frac{1}{Q_2^2 + i\epsilon} \approx \frac{1}{4m^2 - Q^2 + i\epsilon} \left[ 1 - \frac{1}{8m^2} (2Q^2 + \mathbf{q}^2 + \mathbf{q}'^2) \right] \quad (35)$$

这一近似实际上部分地顾及了某些相对论修正. 而 (33) 式所给出的则是彻底的准至  $p^2/m^2$  的结果. 利用(33)式的单胶子交换势算出的核子反核子间的相互作用能,如同文献[7]的结果一样,在近距离范围内显示一个相当深的位阱,与 Faessler 等人的结果恰好相反.

#### 四、夸克-反夸克束缚态的 Bethe-Salpeter 方程

对于考虑单胶子交换和谐振子型禁闭势的夸克-反夸克束缚态的 Bethe-Salpeter 方程<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} \chi_{p\alpha}(q) &= -i \frac{4}{3} D^{-1}(p, q) \int \frac{a^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{4\pi\alpha_s}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} (2\pi)^3 \omega_{q\bar{q}}^2 \nabla_k^2 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \right] V_{1\mu} V_2^{\mu} \chi_{p\alpha}(k) \quad (36) \end{aligned}$$

其中  $\chi_{p\alpha}(q)$  是动量空间的 Bethe-Salpeter 波函数,

$$D(p, q) = \left( \frac{p^2}{4} + p \cdot q + q^2 - m^2 + i\epsilon \right) \left( \frac{p^2}{4} - p \cdot q + q^2 - m^2 + i\epsilon \right) \quad (37)$$

$$V_{1\mu} V_2^{\mu} = \left( \frac{p}{2} + q + m \right) \left( \frac{p}{2} - q + m \right) \gamma_{1\mu} \gamma_2^{\mu} \quad (38)$$

Mitra 曾用 Gordon 恒等式来约化方程中的  $\gamma$  矩阵。在瞬时近似  $q_0 = k_0$  之下,得到了如下的结果:

$$V_{1\mu}V_2^\mu = T_0 + T_1q_0 + T_2q_0^2 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} T_0 = & p^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{k})^2 + 2i(\sigma_1^i + \sigma_2^i)q^i k^i + i(\sigma_1^i - \sigma_2^i)p^i(q - k)^i \\ & + i(\sigma_1^0 - \sigma_2^0)p^0(q - k)^i - \sigma_1^i \sigma_2^i (q - k)^i (q - k)^i \\ & + \sigma_1^0 \sigma_2^0 (q - k)^i (q - k)^i \end{aligned} \quad (40)$$

$$T_1 = -2i(\sigma_1^0 + \sigma_2^0)(q - k)^i \quad (41)$$

$$T_2 = -4 \quad (42)$$

对于(40)式和(41)式中  $\sigma^0$  的进一步约化, Mitra 实际上是利用了瞬时近似下的如下关系式进行的,

$$i\sigma_\alpha^0 = \frac{1}{2m} r_\alpha^0 [(p_\alpha + p'_\alpha)^i - i\sigma_\alpha^i (p_\alpha - p'_\alpha)^i], \quad (\alpha = 1, 2) \quad (43)$$

此处

$$p_1 = \frac{p}{2} + q, \quad p_2 = \frac{p}{2} - q, \quad p'_1 = \frac{p}{2} + k, \quad p'_2 = \frac{p}{2} - k \quad (44)$$

(43)式与(1)式所示的  $r^i$  的约化表示式本质上完全相同, 尽管  $i\sigma^0 \neq r^i$ , 这显然是不合理的。但(43)式可以看作从(1)式而得的在波函数  $u^{\alpha+}(p)$  与  $u^\beta(p')$  之间的一个等价关系式。将(43)式代到(40)式和(41)式中, 考虑到  $\sigma^i (q - k)^i (q - k)^i = 0$ , 则(43)式右边第二项实际上没有贡献。这样, (43)式便等价于下列关系式:

$$2mr_\alpha^i = (p_\alpha + p'_\alpha)^i \quad (45)$$

这就是文献[2]中的(4.15)式。文献[3]中的(2.4)式, 亦即文献[2]中  $m_1 = m_2$  的(4.12) — (4.14)式, 正是利用(43)式或(45)式从(40) — (42)式导出的。

这里强调指出, Gordon 恒等式是旋量矩阵在波函数  $\bar{u}^\alpha(p)$  与  $u^\beta(p')$  之间的等价关系式, 而 B-S 波函数  $\chi_{p\alpha}$  也是通过旋量场  $\psi(x)$  和  $\bar{\psi}(x)$  来定义的, 所以, 对于(40)式和(41)式中的  $\sigma_\alpha^0$  的进一步约化, 也应当利用在波函数  $\bar{u}^\alpha(p)$  和  $u^\beta(p')$  之间, 而不是在  $u^{\alpha+}(p)$  和  $u^\beta(p')$  之间的等价关系式来进行。这个等价关系式按本文公式(5), 在瞬时近似下表现为

$$i\sigma_\alpha^0 = -\frac{1}{2m} r_\alpha^0 [(p_\alpha - p'_\alpha)^i - i\sigma_\alpha^i (p_\alpha + p'_\alpha)^i] \quad (46)$$

对比(43)式和(46)式, 可见两式中始末态动量之间的和差符号。正好相反。这一差别将给其后的推导带来明显不同的结果。Mitra 等人工作中的错误就在于不是利用(46)式, 而是不适当地利用(45)式来约化矩阵  $i\sigma_\alpha^0$  所致。

将(46)式代入到(40)式和(41)式中, 在利用(6)式之后, 令  $\Sigma \rightarrow \sigma$ ,  $r^0 \rightarrow I$ , 则可得在质心系中的如下结果:

$$\begin{aligned} T_c = & M^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{k})^2 + 2i(\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{M}{m} (\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 \\ & + \frac{iM}{m} (\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) - (\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 \sigma_1 \cdot \sigma_2 + [(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sigma_1][(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \sigma_2] + \frac{1}{4m^2} \{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^4 - 2i(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2(\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \\ & \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) - 4[(\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \cdot \sigma_1][(\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \cdot \sigma_2]\} \end{aligned} \quad (47)$$

$$T_1 = -\frac{2i}{m} (\mathbf{q} \times \mathbf{k}) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (48)$$

在瞬时近似下,将(47)式和(48)式代入到方程(36)中,并假定对轻夸克介子,禁闭势起着主要作用,而(36)式中与 $(\mathbf{q} - \mathbf{k})^{-2}$ 相关的单胶子交换项可作为微扰来处理。这样,在对方程(36)两边实行对 $q_0$ 的积分后,便可求得零级近似的下列方程式:

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{q}^2 + m^2 - \frac{1}{4} M^2 - \frac{1}{2} M \omega_{q\bar{q}}^2 \nabla_q^2 \right) \psi(\mathbf{q}) \\ & = \frac{1}{2} M^{-1} \omega_{q\bar{q}}^2 \left[ Q_q - \frac{6M}{m} - 8 \left( 1 + \frac{M}{2m} \right) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right. \\ & \left. - 4 \left( 1 + \frac{\mathbf{q}^2}{3m^2} \right) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \frac{2\mathbf{q}^2}{m^2} T_q \right] \psi(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (49)$$

式中

$$\psi(\mathbf{q}) = \int d q_0 \chi_{p\alpha}(q) \quad (50)$$

是瞬时近似下的三维空间波函数。

$$Q_q = 4\mathbf{q}^2 \nabla_q^2 + 8\mathbf{q} \cdot \nabla_q + 6 \quad (51)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{q} \times (-i\nabla_q) \quad (52)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (53)$$

$$T_q = \frac{1}{\mathbf{q}^2} (\mathbf{q} \cdot \sigma_1) (\mathbf{q} \cdot \sigma_2) - \frac{1}{3} \sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad (54)$$

而 Mitra 等人根据(43)式或(45)式所求得的结果(参看文献[3]中的(2.8)–(2.11)式)则为

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{q}^2 + m^2 - \frac{1}{4} M^2 - \frac{1}{2} M \omega_{q\bar{q}}^2 \nabla_q^2 \right) \psi(\mathbf{q}) \\ & = \frac{1}{2} M^{-1} \omega_{q\bar{q}}^2 \left[ Q_q + \frac{2}{m^2} \mathbf{q}^2 - \frac{4M}{m} \left( \mathbf{q} \cdot \nabla_q + \frac{3}{2} \right) \right. \\ & \left. - 8\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} - 4\sigma_1 \cdot \sigma_2 \right] \psi(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (55)$$

其中 $\frac{2}{m} \mathbf{q}^2$ 这一在文献[3]中被遗漏的项,在文献[4]中已被重新考虑进去。

对比(49)式和(55)式,可见两者的差异是很明显的。除了自旋-轨道耦合、自旋-自旋相互作用等项有所不同而外,(49)式中还出现了(55)式所没有的张量力作用项。这些差异对方程的进一步求解及其数值结果将产生重要的影响。依据方程(49)及其它类似的方程来讨论强子结构的问题,拟将另文报道。



## 参 考 文 献

- [ 1 ] J. D. Bjorken & S. D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics, New York, McGraw-Hill, 1964.  
C. Itzykson & J. B. Zuber: Quantum Field Theory. McGraw-Hill, 1980.
- [ 2 ] A. N. Mitra, *Z. Phys.*, **C8**(1981), 25.
- [ 3 ] A. N. Mitra & I. Santhanam, *Z. Phys.*, **C8**(1981), 33.
- [ 4 ] A. N. Mitra & D. S. Kulshreshtha, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 3123.
- [ 5 ] A. De Rujula, et al. *Phys. Rev.*, **D12**(1975), 147.
- [ 6 ] A. Faessler, et. al. *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 3280.
- [ 7 ] 苏君辰、王秀江、朱耀银, 高能物理与核物理, Vol. **10** (1986), 40.
- [ 8 ] M. Fierz, *Phys.*, **104**(1937), 553.  
K. M. Case, *Phys. Rev.*, **97**(1955), 810.

GORDON DECOMPOSITIONS FOR  $\gamma$ -TYPE MATRICES AND  
SOME OF THEIR APPLICATIONS

SU JUN-CHEN WU SHI-SHU

(Jilin University, Changchun)

## ABSTRACT

In this paper, some decomposition formulas of  $\gamma$ -type matrices are derived based on Gordon identities. As an illustration of the application of these formulas, the one gluon exchange potential between quark and antiquark is rederived which appears to be different from that obtained by Faessler, et al. As another illustration, the correct reduction of the  $\gamma$ -matrices appearing in the kernel function of Bethe-Salpeter equation for quark-antiquark system is achieved and yields an expression different from that derived by Mitre whose calculation was grounded on a wrong decomposition formula for one  $\gamma$ -type matrix.