第9卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 4
1985年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1985

可重整的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型中的轴矢 Ward 恒等式和维数正规化

张 跃 中
(四川大学物理系)

摘 要

利用维数正规化方法，通过到单圈的明显计算，证明了包含重轻子的无 Adler-Bell-Jackiw (ABJ) 反常的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型中的轴矢 Ward 恒等式的成立性是与 γ_5 的两个在 n 维中的定义无关的．它的一个自然的推论是维数正规化方法适用于我们的有轴矢耦合费米子的模型．当把 AVV 三角形嵌入到轴矢费米子顶角中时，发现在 $n \to 4$ 的物理极限下它并不会引起任何新的有限的反常，从而至少到两圈的水平证明了 Frampton 有关存在新的与质量相关的反常的猜测在我们的非 Abel 情况下同样是不成立的．

引 言

维数正规化是一个很好用的方法．如果理论中无轴矢耦合的费米子，它的应用是直接的．然而此方法自 t'Hooft 和 Veltman 发明以来，人们就认识到了 γ_5 推广到 n 维的困难性．有很多作者试图得到一个令人满意的推广，到目前为止，已有两种可能的推广方案：'tHooft 和 Veltman[1] 定义 n 维中的 γ_5 具有性质：

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$
$$[\gamma_5, \gamma_\mu] = 0 \qquad (\mu = 4, 5, \cdots n)$$
$$\gamma_5^2 = 1 \tag{1}$$

后来 Bardeen, Gastamans 和 Lautrup[2] 为了得到正确的 Ward 恒等式，定义 γ_5 具有性质：

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad (\mu = 0, 1, \cdots, n)$$
$$\gamma_5^2 = 1 \tag{2}$$

Gohiliab 和 Donuhue[3] 在一个 Abel 理论中，考虑了任意外动量，发现偶宇称费米子闭合圈的 Ward 恒等式与(2)式一致而不与定义(1)符合．近来 Ovrut[4] 在一个 Abel 无反常理论中，发现奇宇称的闭合费米子圈的 Ward 恒等式的成立性是与选用上述哪一个 γ_5 在 n 维的定义无关的．本文的目的之一是，通过到单圈的明显计算，证明奇宇称闭合费米

本文 1984 年 6 月 12 日收到．

子圈的 Ward 恒等式的成立性在非 Abel 无 ABJ 反常的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型中同样与两个 γ_5 在 n 维中的定义无关.

在我们所考虑的模型中，由于费米子有非零质量，当利用维数正规化时，在 n 维中 AVV 顶角的轴矢 Ward 恒等式有以$(n-4)$的幂级数形式出现的附加项，这些附加项在单圈的水平在 $n\to 4$ 的物理极限下为零. 然而 Frampton 猜测[5]: 若把 AVV 顶角作为一个子图嵌入到更高阶的图，一些象 $1/(n-4)$ 这样的极点可能会消去附加部分中的$(n-4)$因子，从而产生一个即使在四维中也是有限的与质量相关的反常. 由于它的质量相关性，即使在一个无反常的理论中也存在. 本文通过到两圈的明显计算，证明了 Frampton 的新的与质量相关的反常在我们的非 Abel 模型中保持无穷小.

I. 包含重轻子的 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 弱电模型

我们想考查一个场论模型，其中包含有宇称破坏的费米子；要求此理论可重整，因此无 AVV 反常；进一步要求其中的一部分费米子和玻色子有非零质量.

满足上述要求的一个非 Abel 模型是包含重轻子的 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 弱电模型. 在此模型中除原有的电子和电子中微子多重态外，还包含另两个带相反轴荷的重轻子多重态:

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}(1-\gamma_5)E$$

它们与电子多重态:

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}(1+\gamma_5)e$$

按同样的方式与标量场，矢量场相互作用. 这样修改 W-S 模型后，就不存在发散.

选取 Higgs 标量二重态:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \eta_2 + i\eta_1 \\ v + \eta_4 - i\eta_3 \end{pmatrix}$$

且选择 v 使到任何阶，η_4 的真空期望值为零. 这样就排除了 η_4 的蝌蚪图的贡献.

取协变规范量子化，且把规范参数取为 1，对我们要考查的问题，鬼场只对 η_4 的蝌蚪图有贡献，在我们的对 v 的选取下，此贡献为 0，因此忽略鬼场 Lagrangian. 按裸场和裸参数表示的、量子化的 Lagrangian:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = & -W^+_\mu(-\partial^2 g^{\mu\nu} + M^2_W g^{\mu\nu})M^-_\nu - \frac{1}{2} z^0_\mu(-\partial^2 g^{\mu\nu} + M^2_z g^{\mu\nu})z^0_\nu \\
& - \frac{1}{2} A_\mu(-\partial^2 g^{\mu\nu})A_\nu - \frac{1}{2}\eta_i(\partial^2\delta_{ij} + m^2_{\eta ij})\eta_j \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} g W^+_\mu(\eta_1\partial^\mu\eta_4 + i\eta_1\partial^\mu\eta_2 + \eta_2\partial^\mu\eta_3 - i\eta_2\partial^\mu\eta_1 - \eta_3\partial^\mu\eta_2 \\
& + i\eta_3\partial^\mu\eta_4 - \eta_4\partial^\mu\eta_1 - i\eta_4\partial^\mu\eta_3) + \frac{1}{2\sqrt{2}} g W^-_\mu(\eta_1\partial^\mu\eta_4 - i\eta_1\partial^\mu\eta_2 \\
& + \eta_2\partial^\mu\eta_3 + i\eta_2\partial^\mu\eta_1 - \eta_3\partial^\mu\eta_1 - i\eta_3\partial^\mu\eta_4 - i\eta_4\partial^\mu\eta_1 + i\eta_4\partial^\mu\eta_3)
\end{aligned}$$

$$+\frac{gg'}{2\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu(\eta_1\partial^\mu\eta_2+\eta_3\partial^\mu\eta_4-\eta_2\partial^\mu\eta_1-\eta_4\partial^\mu\eta_3)$$

$$-\frac{gg'}{2\sqrt{g^2+g'^2}}z^0_\mu(\eta_1\partial^\mu\eta_2+\eta_3\partial^\mu\eta_4-\eta_2\partial^\mu\eta_1-\eta_4\partial^\mu\eta_3)$$

$+$（与轴矢流或矢量流无关的项）

$$+\bar{e}(i\not\partial-m_e)e+\bar{\nu}i\not\partial\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu+\bar{E}(i\not\partial-m_E)E$$

$$+\bar{N}i\not\partial\frac{1}{2}(1+\gamma_5)N+\frac{1}{2}v\sqrt{g^2+g'^2}z^0_\mu\partial^\mu\eta_3$$

$$-\frac{g}{2\sqrt{2}}vW^+_\mu(\partial^\mu\eta_1+i\partial^\mu\eta_2)-\frac{g}{2\sqrt{2}}vW^-_\mu(\partial^\mu\eta_1-i\partial^\mu\eta_2)$$

$$+\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW^+_\mu+\text{h.c.}+\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{N}\gamma^\mu(1+\gamma_5)EW^+_\mu$$

$$+\text{h. c.}-\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\bar{e}\gamma_\mu eA^\mu-\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\bar{E}\gamma_\mu EA^\mu$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{g^2+g'^2}\left[\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu+\bar{e}\gamma_\mu\left(\gamma_5+\frac{3g'^2-g^2}{g^2+g'^2}\right)e\right]z^{0\mu}$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{g^2+g'^2}\left[\bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)N+\bar{E}\gamma_\mu\left(-\gamma_5+\frac{3g'^2-g^2}{g^2+g'^2}\right)E\right]z^{0\mu}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}G_e\bar{e}(\eta_4-i\gamma_5\eta_3)e-\frac{1}{2\sqrt{2}}G_E\bar{E}(\eta_4+i\gamma_5\eta_3)E$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}G_e[\bar{e}(\eta_2+i\gamma_5\eta_1)\nu-i\bar{e}(\eta_1-i\gamma_5\eta_2)\nu+\bar{\nu}(\eta_2+i\gamma_5\eta_1)e$$

$$+i\bar{\nu}(\eta_1-i\gamma_5\eta_2)e]-\frac{1}{2\sqrt{2}}G_E[\bar{E}(\eta_2-i\gamma_5\eta_1)N$$

$$-i\bar{E}(\eta_1+i\gamma_5\eta_2)N+\bar{N}(\eta_2-i\gamma_5\eta_1)E+i\bar{N}(\eta_1+i\gamma_5\eta_2)E], \tag{I.1}$$

其中:

$$m_e=\frac{1}{\sqrt{2}}G_ev,\quad m_E=\frac{1}{\sqrt{2}}G_Ev,$$

$$M^2_W=\frac{1}{4}g^2v^2,\quad M^2_z=\frac{1}{4}(g^2+g'^2)v^2,$$

$$m^2_\eta=\text{diag}(0,0,0,-2\mu^2) \tag{I.2}$$

根据 I.1 式,可写出动量空间的传播子:

$$i\Delta^\eta_{ij}(q)=\text{diag}\ (iq^{-2},iq^{-2},iq^{-2},i(q^2-m^2_{\eta_4})^{-1})$$

$$i\Delta^A_{\mu\nu}(q)=i\Delta^W_{\mu\nu}(q)=i\Delta^z_{\mu\nu}(q)=-ig_{\mu\nu}/q^2$$

$$i\Delta^e(q)=i(\not q-m_e)^{-1}\quad i\Delta^E(q)=i(\not q-m_E)^{-1}$$

$$i\Delta^\nu(q)=i\Delta^N(q)=i\not q^{-1} \tag{I.3}$$

从 I.3 式中对传播子的选择可知我们已把混合项 $z^0_\mu\partial^\mu\eta_3$，$W^+_\mu(\partial^\mu\eta_1+i\partial^\mu\eta_2)$，和$W^-_\mu(\partial^\mu\eta_1-i\partial^\mu\eta_2)$ 和质量项 $M^2_WW^+_\mu W^{-\mu}$，$M^2_zz^0_\mu z^{0\mu}$ 看成了相互作用. 因此在 Feynman 图中会

出现图 1 所示的二点顶角：

图 1　Higgs-矢量场玻色子相互作用，● 表示导数耦合

本文中所有的计算都建立在 Lagrangian (I.1) 的基础上.

II. 利用维数正规化计算 AVV 反常

在我们的模型中，AVV 三点顶角有 $Z°AA$，$Z°Z°Z°$，$Z°WW$，$WWZ°$和 WWA. 不失一般性. 我们只考查 $Z°WW$ 三点顶角，对应于它的费曼图为图 2：

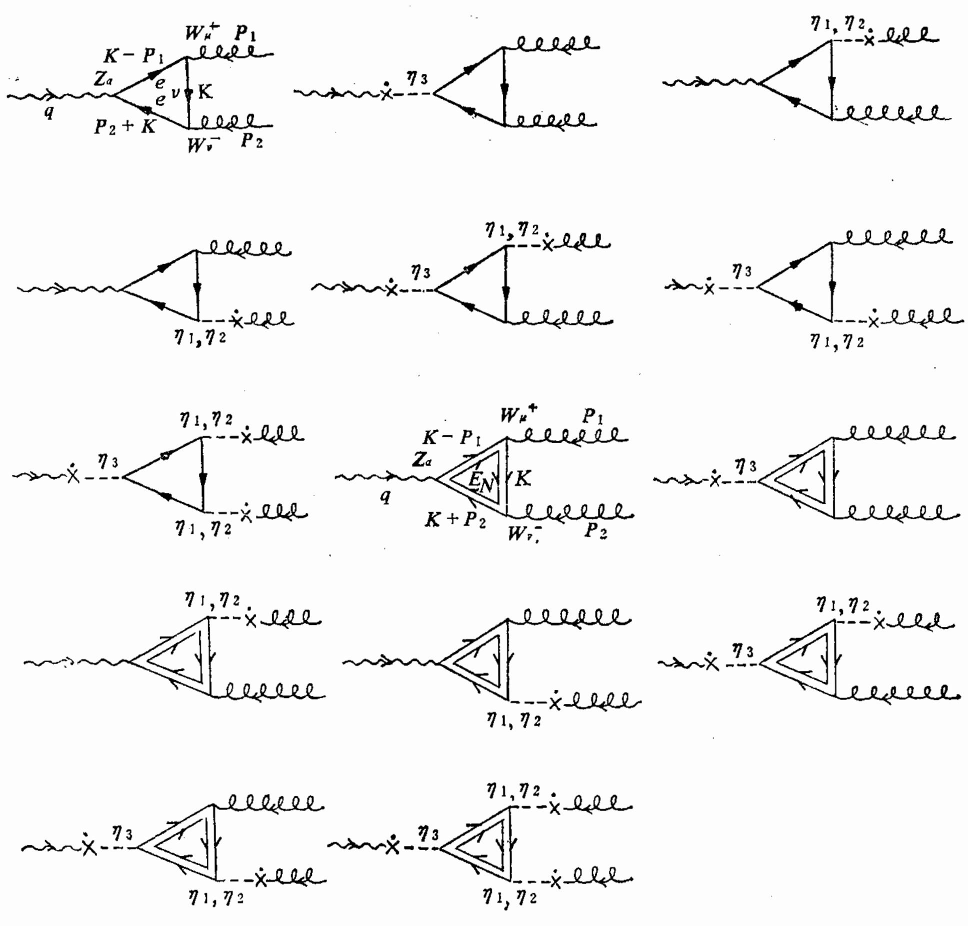

图 2　对 $Z°WW$ 的单圈有贡献的图，每个图中，三角形左边是轴矢顶角，右边两个是矢量顶角

经过计算，可得与 γ_5 在 n 维中的两个定义无关，有下面的矢量和轴矢量 Ward 恒等式：

$$p_1^\mu \Gamma^{(ZWW)}_{\alpha;\mu\nu}(p_1, p_2) = P_2^\nu \Gamma^{(ZWW)}_{\alpha;\mu\nu}(p_1, p_2) = 0 \tag{II.1}$$

$$q^{\alpha}\Gamma^{(ZWW)}_{\alpha;\mu\nu}(p_1, p_2) = \frac{1}{4\pi^2}\left(-\frac{g^2}{32}\sqrt{g^2+g'^2}\right)\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}p_1^{\sigma}p_2^{\rho}$$
$$\cdot\left\{(n-4)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\ln\left(\frac{M_E^2+Q^2}{M_e^2+Q^2}\right)+O[(n-4)^2]\right\} \quad \text{(II.2)}$$

其中 $\Gamma^{(ZWW)}_{\alpha;\mu\nu}(p_1, p_2)$ 表下面的三点顶角函数：

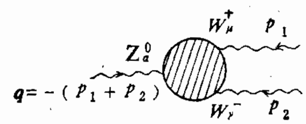

图 3 AVV三点顶角

且：
$$M_e^2 = m_e^2(x+y) - xp_2^2 - yp_1^2,$$
$$M_E^2 = m_E^2(x+y) - xp_2^2 - yp_1^2, \quad Q_\mu = xp_{2\mu} - yp_{1\mu}.$$

我们强调，(II.1)和(II.2)式是用维数正规化得到的，且是与选用引言中讲到的哪一个 γ_5 在 n 维中的定义无关的. 把(II.2)式取 $n\to 4$ 的物理极限，得：

$$q^{\alpha}\Gamma^{(ZWW)}_{\alpha;\mu\nu}(p_1,p_2) = 0 \quad \text{(II.3)}$$

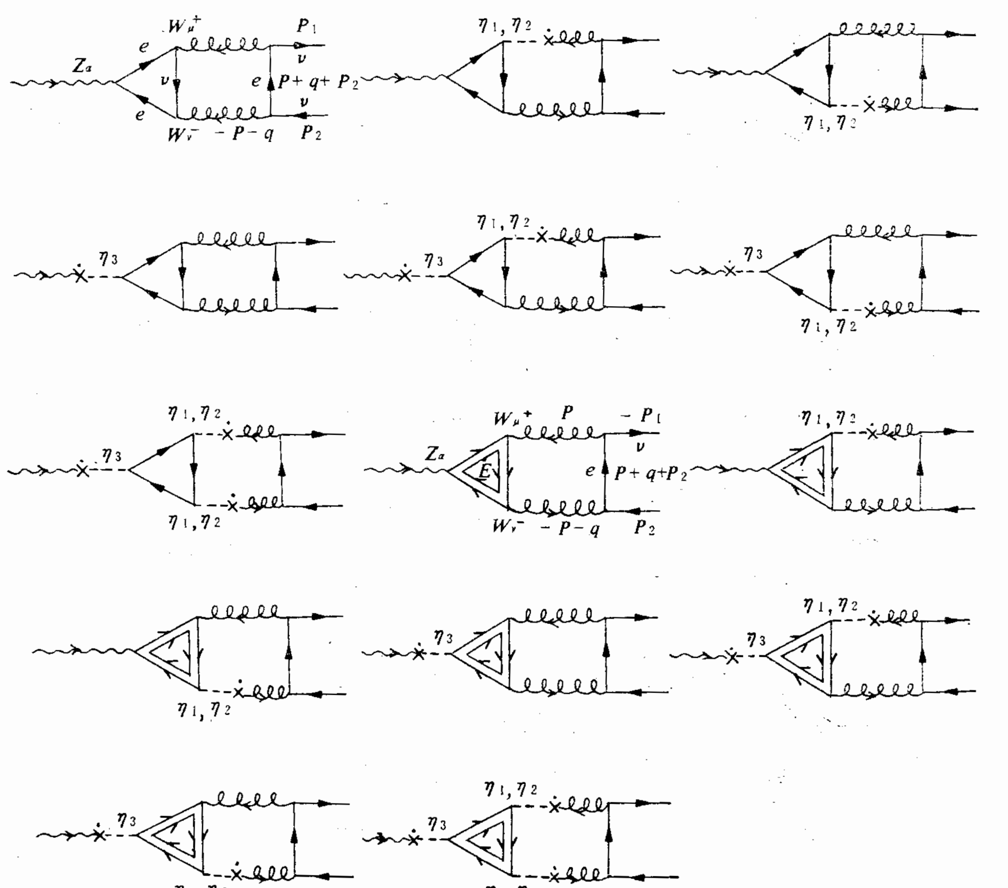

图 4 奇宇称三角形对轴矢中微子顶角修正的贡献

因此得出结论：对非 Abel 无反常的 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 模型，至少到单圈，轴矢 Ward 恒等式的成立性与 γ_5 的两个在 n 维中的定义无关．这样，在利用维数正规化方法时，选用哪一个 γ_5 在 n 维中的定义是无关紧要的．

III. Frampton 的质量相关的新反常在高圈中也保持无穷小

从(II. 2)式可知;在任意维数 n．ZWW 顶角的轴矢 Ward 恒等式并不成立，除非重轻子和电子的质量简并或 $n=4$．

就象在引言中讲到的，Frampton 猜测当把 (II.2) 式嵌入到更高阶图时，可能会出现一个与质量相关的新反常．这个新的反常将破坏 W-S 模型的可重整性．在本节中我们将看到，Frampton 的猜测是不正确的．

不失普遍性，把注意力集中于 $Z^\circ WW$ 三角形对轴矢中微子顶角的贡献．这些贡献来自图 4．

利用玻色子和费米子传播子以及 (II.2) 式得：

$$
\begin{aligned}
q^\alpha\Gamma_\alpha^{(Z\mu\nu)}(p_1,p_2)&=\frac{1}{16\pi^2}\left(-\frac{g^4}{256}\sqrt{g^2+g'^2}\right)\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\,\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}\not{q})\\
&\times\frac{\gamma^\mu(\not{p}+\not{q}+\not{p}_2+m_e)\gamma^\nu}{p^2(p+q)^2[(p+q+p_2)^2-m_e^2]}(n-4)\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\\
&\times\ln\left(\frac{M_e^2+Q^2}{M_E^2+Q^2}\right)+O[(n-4)^2].
\end{aligned}\tag{III.1}
$$

它与 γ_5 在 n 维中的两个定义无关．

利用恒等式：

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{M_e^2+Q^2}{M_E^2+Q^2}\right)&=\int_{m_E}^{m_e}dm\\
&\times\frac{2m(x+y)}{m^2(x+y)-x(1-x)(p+q)^2-y(1-y)p^2+2p\cdot(p+q)xy}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q^\alpha\Gamma_\alpha^{(Z\nu\nu)}(p_1,p_2)&=(n-4)\left(-\frac{g^4}{256}\sqrt{g^2+g'^2}\right)\int_{m_E}^{m_e}2mdm\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\\
&\cdot(x+y)\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}T_r(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}\not{q})\frac{\gamma^\mu(\not{p}+\not{q}+\not{p}_2+m_e)^{m_E}\gamma^\nu}{p^2(p+q)^2[(p+q+p_2)^2-m_e^2]}\\
&\cdot\frac{1}{m^2(x+y)-x(1-x)(p+q)^2-y(1-y)p^2+2p\cdot(p+q)xy}\\
&+O[(n-4)^2].
\end{aligned}\tag{III.2}
$$

由数幂定理，上式右边对 p 的积分是收敛的，即对 p 积分后并不会出现象 $\frac{1}{n-4}$ 或 $\frac{1}{(n-4)^2}$ 这样的极点，从而 Frampton 的与质量相关的反常保持无穷小，它在 $n\to4$ 的物理极限下为零．

IV. 结论与讨论

我们利用维数正规化证明了至少到两圈的水平，轴矢 Ward 恒等式在四维中的成立

性在非 Abel 无反常的 W-S 模型中同样是与 γ_5 在 n 维中的两个定义无关的. 从而说明: 在 n 维中我们怎样定义 γ_5 并不重要. 我们首先考虑了 AVV 三角形，然后讨论了把它们嵌入到轴矢中微子顶角中时产生的新的反常的问题. 证明了 Frampton 与质量相关的新反常在 $n\to 4$ 的物理极限下为零，从而至少到两圈证明了 Franpton 的猜测在我们的模型中是不成立的.

尽管我们没有证明: 对任意的非 Abel 无反常模型，到微扰论的所有阶. Frampton 猜测的不成立. 但我们确信，遵从本文中的程序不难给出这个证明.

作者感谢王珮先生的许多有益的讨论，特别他曾两次阅读了初稿，并提出了许多修改意见.

参 考 文 献

[1] G'thooft and Veltman, *Nucl. Phys*., **B44** (1972), 189.
[2] W. Bardeen, Gastamans and B. Lantrup, *Nucl. Phys*., **B46** (1972), 319.
[3] S. Gottlieb and J. T. Donohue, *Phys. Rev*., **D20** (1979), 3378.
[4] Burt A. Orut, *Nucl. Phys*., **B23** (1983), 241.
[5] P. H. Frampton, *Phys. Rev*., **D20** (1979), 3372.

AXIAL VECTOR WARD IDENTITIES AND DIMENSIONAL REGULARIZATION IN RENORMALIZABLE $SU(2)_L\times U(1)_Y$ MODEL

ZHANG YUE-ZHONG

(Sichuan University, Physics Department)

ABSTRACT

Using dimensional regularization, we show by explicitly calculation to the one-loop level that the validity of the axial vector Ward identities in $SU(2)_L\times U(1)_Y$ model which contains heavy leptons and is free from Adler-Bell-Jackiw(ABJ) anomalies is independent of two definitions of γ_5 in n dimensions. A natural corollary is that the method of the dimensional regularization is suitable to the model in which there exist axial vector coupling fermions. When AVV triangles are embeded into the vertices of axial vector fermions, we find that in physical limit $n\to 4$ they do not induce any new finite anomalies. We therefore show that to at least two-loop the conjecture originally raised by Frampton that there exist new mass-dependent anomalies is also incorrect in the non-Abelian case.