第 9 卷 第 3 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 9, No. 3
1985 年 5 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　May, 1985

关于超 Sine-Gordon 方程的孤子解

黄 念 宁

摘　　要

给出了二维超对称模型方程——所谓超 Sine-Gordon 方程的单孤子解.

不久以前，S. Sciuto[1] 指出，在处理某些线性问题时，宜于联系到某种二维超对称模型一道考虑，并提出了一种新的模型方程——所谓超 Sine-Gordon 方程（超 SG 方程）. 由于此方程之 Lax 偶是简并的，因而运用通常的反散射法求解将碰到困难. 作者在访问都灵大学期间，应 S. Sciuto 教授的要求，用如下简单方法求出了超 SG 方程的单孤子解.

按[1]，超 SG 方程是如下联立方程:

$$\theta_{\mu\mu} + \varepsilon \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \lambda_\mu \lambda_\mu = 0 \tag{1}$$

$$\partial_\mu \left\{ \lambda_\mu \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right\} = 0 \tag{2}$$

式中 $\mu = 0, 1$ 分别相应于 t 和 x. $\varepsilon = \pm 1$ 分别对应 $m^2 > 0$ 和 $m^2 < 0$ 的情况（以上取 $|m^2| = 1$）. 我们注意，以上方程与复 Sine-Gordon 方程（复 SG 方程）[2] 的区别只在于，复 SG 方程以 $\frac{1}{2}\sin 2\theta$ 替代了(1)中之 $\frac{1}{4}\sin 4\theta$. 这一区别是本质的[1]，它反映超 SG 方程的矩阵结构属于 $U(3)$ 代数，而复 SG 的属于 $O(4)$ 代数. 由于超 SG 方程的 Lax 偶是简并的[1]，所以我们要采用新的解法.

由于复 SG 的解法已知[3]，我们可以利用它的解的知识，作为求解超 SG 方程的假设（Ansatz）. 在复 SG 方程那里，存在两个不同的单孤子解. 在各自特定的 Lorentz 系中，两个单孤子解分别具有如下性质:

$$\text{(A)} \quad \lambda = \lambda(t), \quad \lambda_t = \omega \ (\text{常数}), \quad \theta = \theta(x). \tag{3}$$

$$\text{(B)} \quad \lambda = \lambda(x), \quad \theta = \theta(x).$$

我们注意 x 与 t 的交换，相应于 $\varepsilon = +1$ 与 $\varepsilon = -1$ 的交换. 以上复 SG 方程孤子解的性质，我们将取作解超 SG 方程的假设.

在假设 (A) 下，(2)已满足，(1)化成

$$-\theta_{xx} + \varepsilon \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \omega^2 = 0 \tag{4}$$

$$\text{以:} \quad f = \cos\theta \tag{5}$$

作代换，(4)化成

本文 1984 年 6 月 4 日收到.

$$f_{xx}+(f_x)^2f/(1-f^2)+\omega^2f/(1-f^2)-\varepsilon f(1-f^2)(1-2f^2)=0. \tag{6}$$

我们将(6)表成如下形式：

$$\left\{f_{xx}+\omega^2f-\frac{1}{2}V'\right\}+\{(f_x)^2+\omega^2f^2-V\}f/(1-f^2)=0, \tag{7}$$

式中 V 为 f 的函数，$V'=\dfrac{dV}{df}$. 将(7)与(6)比较，得 V 的一阶方程，其解

$$V=\varepsilon f^2(1-f^2)^2 \tag{8}$$

写成(7)的形式是本解法的另一要点．(7)反映出，若第二个括号为 0，则第一个括号就为 0，因而第二个括号为 0 为方程的一个特解．即

$$(f_x)^2+\omega^2f^2-\varepsilon f^2(1-f^2)^2=0 \tag{9}$$

为(6)之特解．

由于(9)只在 $\varepsilon>0$ 时有解，此时可积分得

$$\begin{aligned}x&=\int\frac{df}{\sqrt{f^2(1-f^2)^2-\omega^2f^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{df^2}{f^2\sqrt{(1-f^2)^2-\omega^2}}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{\sqrt{1-\omega^2}}\log\frac{2(1-\omega^2)-2f^2+2\sqrt{(1-\omega^2)[(1-f^2)^2-\omega^2]}}{f^2}\right\}\end{aligned} \tag{10}$$

此处与以下均略去无关紧要的积分常数．令

$\omega=\sin\alpha$，从(10)可解出 $f^2=\cos^2\theta$ 为

$$\cos^2\theta=\frac{4\cos^2\alpha\exp(-2x\cos\alpha)}{4\sin^2\alpha+4\exp(-2x\cos\alpha)+\exp(-4x\cos\alpha)} \tag{11}$$

与（A）之：　$\lambda=t\sin\alpha$　　(12)

合起来，就是超 SG 方程在 $\varepsilon=1$ 时的一个特解．在 $\varepsilon=-1$ 时的特解，由(11)，(12)中的 x 与 t 互换而得．

在假设（B）之下，(2)化成

$$\partial_x\left\{\lambda_x\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right\}=0, \tag{13}$$

即：
$$\lambda_x=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\rho,\quad(\rho\ 常数) \tag{14}$$

(1)化成：
$$-\theta_{xx}+\varepsilon\frac{1}{4}\sin4\theta+\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\rho^2=0. \tag{15}$$

以：
$$g=\sin\theta \tag{16}$$

作代换，(15)化为

$$g_{xx}+(g_x)^2\frac{g}{1-g^2}+\rho^2\frac{g}{1-g^2}+\varepsilon g(1-g^2)(1-2g^2)=0. \tag{17}$$

与(6)相比，注意到 ε 前的符号之不同，对应于以上作法，显见

$$(g_x)^2+\rho^2g^2+\varepsilon g^2(1-g^2)^2=0 \tag{18}$$

为(17)之特解．

(18)只在 $\varepsilon<0$ 时有解，令 $\rho=\sin\beta$，对应于(12)得

$$\cos^2\theta=1-g^2=1-\frac{4\cos^2\beta\exp(-2x\cos\beta)}{4\sin^2\beta+4\exp(-2x\cos\beta)+\exp(-4x\cos\beta)}. \tag{19}$$

代入(14),积分得

$$\lambda = -\operatorname{arctg}\left\{\frac{2\sin^2\beta + \exp(-2x\cos\beta)}{2\sin\beta\cos\beta}\right\}. \tag{20}$$

(19),(20)为 $\epsilon = -1$ 时超 SG 方程的特解. 对于 $\epsilon = 1$ 的特解,只要将(19),(20)中的 x 换为 t 即得.

利用 Lorentz 变换,不难将以上的特解写到任意 Lorentz 系中去.

最后,对于 V. de Alfaro 和 A. Bottino 教授给予作者访问都灵大学的邀请,意大利国家核物理研究所(INFN)给予财政支持和 S. Sciuto 教授的经常讨论,作者表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] S. Sciuto, *Phys. Lett.*, **90**(1980), 75.
[2] F. Lund, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **115** (1978), 251.
[3] Huang Nian-ning, *Lettere Al Nuovo Cimento*, **38**(1983), 60.

ON THE ONE-SOLITON SOLUTIONS OT SUPER-SINE-GORDON EGUATION

HUANG NIAN-NING

ABSTRACT

The one-soliton solutions of the so called super sine-Gordon equation-one of the two-dimensional supersymmetric models-are obtained.