第 8 卷 第 5 期 高能物理与核物理 Vol. 8, No. 5
1984 年 9 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1984

分立对称性与 $SU(N)$ 大统一模型

万陵德 鲁公儒 杜东生
(新乡师范学院) (中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文应用分立对称性 S，对低秩 $SU(N)\times S$ 大统一模型的各种方案进行了全面系统的分析．我们发现，只有 $SU(7)\times S$ 与 $SU(8)\times S$ 是较好的代大统一规范群．作为例子，本文给出 $SU(7)\times S$ 与 $SU(8)\times S$ 两个具体的大统一模型．它们容纳了四代通常费米子，并保持 $SU_c(3)$ 渐近自由．模型保留了 $SU(5)$ 模型中得到的全部好的结果．

一、引 言

$SU(5)$ 大统一模型[1]以简洁优美的形式给出了强、弱和电磁三种相互作用的统一描述．它得到的一些结论和给出的预言引起了理论物理工作者的极大兴趣．但 $SU(5)$ 大统一理论中存在的主要问题之一就是"代统一"问题．在 $SU(5)$ 模型中不同代的费米子重复填入同样的表示中，因此，对"代"的重复填充不能做出任何解释．

Georgi 对 $SU(N)$ 大统一理论进行了系统研究，提出构造代统一模型的三条原则[2]：(1) 左手费米子表示对于子群 $SU_c(3)$ 是实表示，(2) 左手费米子表示对于子群 $G_1=SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 是复表示，(3) 左手费米子的表示中没有任何一个不可约表示出现多于一次．当然，费米子表示必须是反常相消的．照此原则，为了容纳三代费米子，至少需要 $SU(11)$ 群．这样的高秩群不仅带来了巨大的复杂性，而且模型中会产生数目惊人的超重费米子，这给理论带来了极大的困难．

为了解决这一困难，文献[3]提出了让大的规范群第一步破缺后保留 $G_1'=G_1\times U'(1)$ 对称性，文献[4]提出了第一步破缺到 $G_1'=G_1\times Z_{N-5}$．费米子表示对于 G_1 是实表示，而对于 G_1' 是表复示．因而在第一步破缺后，费米子不会获得 10^{15}GeV 量级的超重质量．

文献[5]让大统一规范群 $G\times S$ 第一步破缺为 $G_1'=G_1\times S$，其中分立对称性 S 为下述变换下的不变性，即当 $\psi_L\to i\psi_L$，$\psi_R\to -i\psi_R$，$A_\mu\to A_\mu$，$\chi\to\chi$，$\phi\to-\phi$ 时，系统的 Lagrange 具有不变性．其中 Higgs χ 实现大能标破缺，Higgs ϕ 实现低能标破缺．显然 $\bar{\psi}_L\Gamma_1\psi_R\chi$，$\tilde{\psi}_L\Gamma_2C^{-1}\psi_L\chi$ 等形式的规范不变的 Yukawa 耦合不具有 S 对称性，即 S 对

本文 1983 年 3 月 8 日收到．

称性禁戒 Higgs 场 χ 同费米子场的 Yukawa 耦合，所以在第一步破缺中费米子不能获得超重的质量.

本文应用文献[5]的方法，引入 $G \times S$ 做为大统一规范群，全面系统分析了用低秩 $SU(N)$ 群构造大统一模型的各种方案. 我们要求这些模型既能实现代的统一，同时又要保持 $SU_c(3)$ 的渐近自由这一重要性质. 我们发现：用 $SU(9) \times S$ 做为大统一规范群，能实现代统一的费米子填充都破坏渐近自由；用 $SU(6) \times S$ 做为大统一规范群，只能容纳二代具有左手荷电弱流的通常费米子，这与一般认为已发现三代费米子这一事实不符. $SU(7) \times S$ 与 $SU(8) \times S$ 是可行的代大统一规范群. 它既能容纳四代具有左手荷电弱流的通常费米子，解决了代统一问题，同时又保持 $SU_c(3)$ 渐近自由.

本文还给出了用 $SU(7) \times S$ 与 $SU(8) \times S$ 做为大统一规范群的两个具体模型. 它们都实现了四代通常费米子的统一，对于代的统一给了一种可能的解释；所有费米子都是"轻"的，不产生超重费米子；它保留了 $SU(5)$ 模型中全部好的结果和预言[7]. 同时由于适当选取 Higgs 场真空期待值，得到了 $m_d \sim 3m_e$，$m_\mu \sim 3m_s$，及第一 Cabibbo 角 $\sin\theta_1 \sim \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}$ 等结果.

二、模型分析

下面我们具体分析低秩 $SU(N) \times S$ 大统一模型. 文中$[m]$表示 $SU(N)$ 群的 m 阶全反称表示，L、R 标示这一表示的手征性选择. 模型应当满足 Georgi 的三原则. 具体说：由于 S 对称性禁戒 χ 场同费米场的 Yukawa 耦合，因此在第一步破缺后不产生 10^{15}GeV 量级的超重费米子，这就解决了实表示的问题；要能实现代的统一，即在一个大统一群内，同时包含各代费米子的表示；要消去 Adler 反常；鉴于 QCD 的成就，我们进一步要求模型保持 $SU_c(3)$ 渐近自由这个吸引人的特性.

下面分别分析 $N = 6, 7, 8, 9$ 的情况. 对于 $N \geqslant 10$ 的情况，由于破坏渐近自由，不予考虑.

1. 用 $SU(6) \times S$ 做为大统一规范群，选取费米子表示为：$[1]+[2]+[3]+[4]+[5]$. 反常相消的等价的手征性选择及其特征列表 1：

表 1

手征性＼表示	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	R	L	R	L	R	5_R、5_L、5^*_R、5^*_L、$\underline{10}_L$、$\underline{10}_R$、$\underline{10}^*_L$、$\underline{10}^*_R$、$2\times\underline{1}_R$	8	2 代 $V-A$ 型 2 代 $V+A$ 型
II	R	L	L	L	R	5_R、5_L、5^*_L、5^*_R、$2\times\underline{10}_L$、$2\times\underline{10}^*_L$、$2\times\underline{1}_R$	8	同上

上述模型包含两代具有左手荷电弱流的通常费米子及两代具有右手荷电弱流的重费米子实现了两代的统一，保持 $SU_c(3)$ 渐近自由. 详细讨论见文献[6].

2.用 $SU(7)\times S$ 做为大统一规范群,费米子表示有如下几种方案:

(1) 选取 [1]+[2]+[3]+[4]+[5]+[6] 作为费米子表示. 反常相消的等价的手征性选择及特征列表 2:

表 2

手征性＼表示	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	R	L	R	L	R	L	$3\times\underline{1}_R,2\times\underline{5}_R,2\times\underline{5}^*_R$ $3\times\underline{1}_L,2\times\underline{5}_L,2\times\underline{5}^*_L,$ $2\times\underline{10}_L,2\times\underline{10}_R,2\times\underline{10}^*_L,2\times\underline{10}^*_R$	16	四代 $V-A$ 型 四代 $V+A$ 型
II	L	R	L	R	L	R	同上	16	同上
III	R	L	R	R	L	R	$4\times\underline{1}_R,2\times\underline{5}_R,2\times\underline{5}^*_R$ $2\times\underline{1}_L,2\times\underline{5}_L,2\times\underline{5}^*_L,$ $\underline{10}_L,3\times\underline{10}_R,3\times\underline{10}^*_R,\underline{10}^*_L$	16	同上
IV	R	R	R	R	R	R	$6\times\underline{1}_R,4\times\underline{5}_R,4\times\underline{5}^*_R,4\times\underline{10}_R,4\times\underline{10}^*_R$	16	同上
V	L	R	R	R	R	L	$2\times\underline{1}_R,\underline{5}_L,3\times\underline{5}_R$ $4\times\underline{1}_L,\underline{5}^*_L,3\times\underline{5}^*_R,$ $4\times\underline{10}_R,4\times\underline{10}^*_R$	16	同上
VI	L	L	R	R	L	L	$6\times\underline{1}_L,$ $\underline{5}_R,3\times\underline{5}_L,$ $\underline{5}^*_R,3\times\underline{5}^*_L,$ $\underline{10}_L,\underline{10}^*_L,3\times\underline{10}_R,3\times\underline{10}^*_R$	16	同上
VII	L	R	L	L	R	L	$4\times\underline{1}_L,2\times\underline{5}_L,2\times\underline{5}^*_L,$ $2\times\underline{1}_R,2\times\underline{5}_R,2\times\underline{5}^*_R,$ $\underline{10}_R,3\times\underline{10}_L,3\times\underline{10}^*_L,\underline{10}^*_R$	16	同上
VIII	L	L	L	L	L	L	$6\times\underline{1}_L,4\times\underline{5}_L,4\times\underline{5}^*_L,4\times\underline{10}_L,4\times\underline{10}^*_L$	16	同上
IX	R	L	L	L	L	R	$4\times\underline{1}_R,\underline{5}_R,3\times\underline{5}_L,$ $2\times\underline{1}_L,\underline{5}^*_R,3\times\underline{5}^*_L,$ $4\times\underline{10}_L,4\times\underline{10}^*_L$	16	同上
X	R	R	L	L	R	R	$6\times\underline{1}_R,$ $\underline{5}_L,3\times\underline{5}_R$ $\underline{5}^*_L,3\times\underline{5}^*_R,$ $\underline{10}_R,\underline{10}^*_R,3\times\underline{10}_L,3\times\underline{10}^*_L$	16	同上

上述模型包含四代具有左手荷电弱流的通常费米子和四代具有右手荷电弱流的重费米子,实现了四代费米子的统一. 模型保持 $SU_c(3)$ 渐近自由.

(2) 选取[1]+[2]+[3]+[4]作为费米子表示. 反常相消的等价手征性选择及其特征列表 3:

表 3

手征性＼表示	[1]	[2]	[3]	[4]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	R	R	L	R	$3\times\underline{1}_R,3\times\underline{5}_R,\underline{5}_L,\underline{5}^*_R,2\times\underline{10}_L,2\times\underline{10}_R,2\times\underline{10}^*_R,\underline{10}^*_L$	13	三代 $V-A$ 型 二代 $V+A$ 型 一代 V 型
II	L	L	R	L	$3\times\underline{1}_L,3\times\underline{5}_L,\underline{5}_R\underline{5}^*_L 2\times\underline{10}_R,2\times\underline{10}_L,2\times\underline{10}^*_L,\underline{10}^*_R$	13	三代 $V-A$ 型 三代 $V+A$ 型 一代 V 型

模型 I 容纳三代具有左手荷电弱流的通常费米子，两代具有右手荷电弱流的重费米子，一代具有纯矢量型荷电弱流的重费米子及半代上夸克. 模型实现了三代通常费米子的统一,保持 $SU(3)_c$ 渐近自由.

模型 II 实现了两代通常费米子的统一，保持 $SU(3)_c$ 渐近自由。

(3) 选取[2]＋[3]＋[4]＋[5]作为费米子表示。反常相消的等价手征性选择及特征列表 4：

表 4

表示 手征性	[2]	[3]	[4]	[5]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	L	L	L	L	$2\times\underline{1}_L, 3\times\underline{5}_L, 3\times\underline{5}^*_L, 4\times\underline{10}_L, 4\times\underline{10}^*_L$	15	三代$V-A$型，三代$V+A$型，一代V型
II	R	R	R	R	$2\times\underline{1}_R, 3\times\underline{5}_R, 3\times\underline{5}^*_R, 4\times\underline{10}_R, 4\times\underline{10}^*_R$	15	同上
III	R	L	L	R	$2\times\underline{1}_R, 2\times\underline{5}_R, \underline{5}_L, \underline{5}^*_L 2\times\underline{5}^*_R \underline{10}_R, \underline{10}^*_R$ $3\times\underline{10}_L$ $3\times\underline{10}^*_L$	15	同上
IV	L	R	R	L	$2\times\underline{1}_L, 2\times\underline{5}_L, \underline{5}_R, \underline{5}^*_R 2\times\underline{5}^*_L \underline{10}_L, \underline{10}^*_L, 3\times\underline{10}_R, 3\times\underline{10}^*_R$	15	同上

模型实现了三代通常费米子的统一，保持 $SU(3)_c$ 渐近自由。

(4) 选取[1]＋[3]＋[4]＋[6]作为费米子表示。反常相消的等价手征性选择及特征列表 5：

表 5

	[1]	[3]	[4]	[6]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	L	L	L	L	$4\times\underline{1}_L, 2\times\underline{5}_L, 2\times\underline{5}^*_L, 3\times\underline{10}_L, 3\times\underline{10}^*_L$	11	两代$V-A$型，两代$V+A$型 一代V型
II	R	L	L	R	$4\times\underline{1}_R, \underline{5}_R, \underline{5}_L, \underline{5}^*_R \underline{5}^*_L, 3\times\underline{10}_L, 3\times\underline{10}^*_L$	11	同上
III	L	R	R	L	$4\times\underline{1}_L, \underline{5}_L, \underline{5}_R, \underline{5}^*_L, \underline{5}^*_R, 3\times\underline{10}_R, 3\times\underline{10}^*_R$	11	同上
IV	R	R	R	R	$4\times\underline{1}_R, 2\times\underline{5}_R, 2\times\underline{5}^*_R 3\times\underline{10}_R, 3\times\underline{10}^*_R$	11	同上

模型实现了两代通常费米子的统一，保持 $SU(3)_c$ 渐近自由。

(5) 选取[1]＋[2]＋[3]作为费米子表示。反常相消的等价手征性选择及特征列表 6：

表 6

	[1]	[2]	[3]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	R	L	R	$2\times\underline{1}_R, \underline{1}_L, 2\times\underline{5}_R, 2\times\underline{5}_L, \underline{10}_L, \underline{10}^*_R, 2\times\underline{10}_R$	8	两代$V-A$型 两代$V+A$型
II	L	R	L	$2\times\underline{1}_L, \underline{1}_R, 2\times\underline{5}_L, 2\times\underline{5}_R, \underline{10}_R, \underline{10}^*_L 2\times\underline{10}_L$	8	同上

模型实现了两代通常费米子的统一，保持 $SU(3)_c$ 渐近自由。

3. 用 $SU(8)\times S$ 作为大统一规范群，费米子表示有如下的几种方案：

（1）选取[1]+[2]+[3]作为费米子表示．反常相消的等价手征性选择及特征列表7：

表 7

	[1]	[2]	[3]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	R	R	L	$\underline{1}_L 6\times\underline{1}_R, 4\times\underline{5}_R, 3\times\underline{5}_L, 3\times\underline{10}_L\underline{10}_R, \underline{10}^*_L$	11	三代$V-A$型 二代$V+A$型
II	L	L	R	$\underline{1}_R, 6\times\underline{1}_L, 4\times\underline{5}_L, 3\times\underline{5}_R, 3\times\underline{10}_R, \underline{10}_L, \underline{10}^*_R$	11	两代$V-A$型 三代$V+A$型

模型 I 实现了三代通常费米子的统一，模型 II 仅统一了两代，均保持 $SU(3)_c$ 渐近自由．

（2）选取[3]+[5]作为费米子表示．反常相消的等价手征性选择及特征列表 8：

表 8

	[3]	[5]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	L	L	$2\times\underline{1}_L, 3\times\underline{5}_L, 3\times\underline{5}^*_L, 4\times\underline{10}_L, 4\times\underline{10}^*_L$	15	三代$V-A$型， 三代$V+A$型， 一代V型
II	R	R	$2\times\underline{1}_R, 3\times\underline{5}_R, 3\times\underline{5}^*_R, 4\times\underline{10}_R, 4\times\underline{10}^*_R$	15	同上

模型实现了三代通常费米子的统一，保持 $SU(3)_c$ 渐近自由．

（3）选取 [2]+[4]+[6] 作为费米子表示．反常相消的等价手征性选择及特征列表 9：

表 9

	[2]	[4]	[6]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	R	L	R	$6\times\underline{1}_R, 3\times\underline{5}_R, 3\times\underline{5}^*_R, \underline{5}_L, \underline{5}^*_L, \underline{10}_R\underline{10}^*_R, 3\times\underline{10}_L, 3\times\underline{10}^*_L$	16	四代$V-A$型 四代$V+A$型
II	L	L	L	$6\times\underline{1}_L, 4\times\underline{5}_L, 4\times\underline{5}^*_L, 4\times\underline{10}_L, 4\times\underline{10}^*_L$	16	同上
III	R	R	R	$6\times\underline{1}_R, 4\times\underline{5}_R, 4\times\underline{5}^*_R, 4\times\underline{10}_R, 4\times\underline{10}^*_R$	16	同上
IV	L	R	L	$6\times\underline{1}_L, 3\times\underline{5}_L, 3\times\underline{5}^*_L, \underline{5}_R, \underline{5}^*_R\underline{10}_L, \underline{10}^*_L, 3\times\underline{10}_R, 3\times\underline{10}^*_R$	16	同上

（4）选取 [1]+[3]+[5]+[7] 作为费米子表示．反常相消的等价手征性选择及特征列表 10．

上述(3)、(4)两组模型，是较好的代大统一模型．它们均容纳四代具有左手荷电弱流的通常费米子和四代具有右手荷电弱流的重费米子．实现了四代通常费米子的统一描述，并保持 $SU(3)_c$ 渐近自由．

费米子表示的其它选取方法，都破坏 $SU_c(3)$ 渐近自由．

表 10

	[1]	[3]	[5]	[7]	按 $SU(5)$ 分解包含的表示	味数	弱作用形式
I	R	L	L	R	$2\times\underline{1}_L, 6\times\underline{1}_R, \underline{5}_R, \underline{5}^*_R, 3\times\underline{5}_L, 3\times\underline{5}^*_L, 4\times\underline{10}_L, 4\times\underline{10}^*_L$	16	四代$V-A$型 四代$V+A$型
II	L	L	L	L	$8\times\underline{1}_L, 4\times\underline{5}_L, 4\times\underline{5}^*_L, 4\times\underline{10}_L, 4\times\underline{10}^*_L$	16	同上
III	L	R	R	L	$2\times\underline{1}_R, 6\times\underline{1}_L, \underline{5}_L, \underline{5}^*_L, 3\times\underline{5}_R, 3\times\underline{5}^*_R, 4\times\underline{10}_R, 4\times\underline{10}^*_R$	16	同上
IV	R	R	R	R	$8\times\underline{1}_R, 4\times\underline{5}_R, 4\times\underline{5}^*_R, 4\times\underline{10}_R, 4\times\underline{10}^*_R$	16	同上

4. 用 $SU(9)\times S$ 作为大统一规范群. 反常相消的费米子填充，或者不能实现代的统一，或者破坏 $SU_c(3)$ 渐近自由. 这里不赘述.

三、结　论

应用 $SU(N)\times S$ 做为大统一规范群构造大统一模型时，上述分析表明：对于 $SU(6)\times S$ 仅能包含二代具有 $V-A$ 型弱作用的通常费米子，这不能统一地概括现今实验上认为已发现三代费米子这一事实. 对于 $SU(9)\times S$ 能实现代统一的费米子填充都破坏 $SU_c(3)$ 渐近自由这一重要性质. 因此这两类模型不是我们所期望的.

对于 $SU(7)\times S$ 模型"(1)"，对于 $SU(8)\times S$ 模型"(3)""(4)"它们都能实现四代具有 $V-A$ 型弱作用的通常费米子的统一，同时又保持 $SU_c(3)$ 渐近自由，是味统一的可能的模型.

对于 $SU(7)\times S$ 模型"(2)""(3)"，对于 $SU(8)\times S$ 模型"(1)""(2)"，它们都能统一地描述现今发现的三代费米子，同时都保持 $SU_c(3)$ 渐近自由，所以都是有现实意义的模型.

在上述模型中还存在具有 $V+A$ 型及 V 型弱作用的费米子，我们称为重费米子. 适当的 Higgs 机制可使它们获得比 $V-A$ 型弱作用费米子的质量大，可以认为重费米子是现今实验测不到的.

下面我们具体分析计算两个典型的模型. 一个是 $SU(7)\times S$ 之"(1)"，另一个是 $SU(8)\times S$ 之"(3)".

四、模型举例 (I)

用 $SU(7)\times S$ 作大统一规范群，反常相消的费米子表示取为

$$\underline{7}_R+\underline{21}_L+\underline{35}_R+\underline{35}^*_L+\underline{21}^*_R+\underline{7}_L \tag{4.1}$$

定义

$$\frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu=\sum_a\frac{1}{2}T^aW^a_\mu,\qquad a=1,2,\cdots 48$$

其中 T^a 为 $SU(7)$ 生成元，W^a_μ 为相应的规范场. W_μ 的矩阵表示为表 11:

表 11

$W_\mu \equiv$

$G_1^1 - \frac{2B}{\sqrt{30}} + \frac{2W'^{35}}{\sqrt{70}}$	G_2^1	G_3^1	$\bar{X}_1$	$\bar{Y}_1$	$\bar{P}_1$	$\bar{Q}_1$
G_1^2	$G_2^2 - \frac{2B}{\sqrt{30}} + \frac{2W'^{35}}{\sqrt{70}}$	G_3^2	$\bar{X}_2$	$\bar{Y}_2$	$\bar{P}_2$	$\bar{Q}_2$
G_1^3	G_2^3	$G_3^3 - \frac{2B}{\sqrt{30}} + \frac{2W'^{35}}{\sqrt{70}}$	$\bar{X}_3$	$\bar{Y}_3$	$\bar{P}_3$	$\bar{Q}_3$
X_1	X_2	X_3	$\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} + \frac{2W'^{35}}{\sqrt{70}}$	W^+	$\bar{P}_4$	$\bar{Q}_4$
Y_1	Y_2	Y_3	W^-	$-\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} + \frac{2W'^{35}}{\sqrt{70}}$	$\bar{P}_5$	$\bar{Q}_5$
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	$\frac{-5W'^{35}}{\sqrt{70}} + \frac{W'^{48}}{\sqrt{2}}$	W'^+
Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	W'^-	$\frac{-5W'^{35}}{\sqrt{70}} - \frac{W'^{48}}{\sqrt{2}}$

定义电荷 Q，超荷 Y 和同位旋第三分量 T_{3L} 为：

$$Q=-\frac{\sqrt{6}}{3}T^{15}=\mathrm{diag}(-1/3,-1/3,-1/3,1,0,0,0) \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{Y}{2}&=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{\sqrt{10}}{4}T_{15}+\frac{\sqrt{6}}{4}T_{24}\right)\\&=\mathrm{diag}(-1/3,-1/3,-1/3,1/2,1/2,0,0)\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}T_{3L}&=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}T_{15}+\frac{\sqrt{10}}{4}T_{24}\right)\\&=\mathrm{diag}(0,0,0,1/2,-1/2,0,0)\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$Q=T_{3L}+Y/2 \tag{4.5}$$

由这些量子数可将费米子填入上述反常相消的表示中．具体填法见附录 I．

我们分两步把 $SU(7)\times S$ 破缺到 $SU(3)_c\times U(1)_{em}$．第一步，引入 Higgs 场 χ_i^j，χ_{ij} (i, j 反对称)和 χ_{ij}^{kl}(i, j 反对称，k, l 反对称)，在 10^{15}GeV 标度上把 $SU(7)\times S$ 破缺到 $G_1\times S=SU(3)\times SU(2)\times U(1)\times S$．其中 $\underline{48}$ 维伴随表示 χ_j^i 取如下非零真空值：

$$\langle\chi_i^i\rangle=V_i,\ (i=1,2,\cdots,7)$$

$$V_1=V_2=V_3=-\frac{2}{3}a,\ V_4=V_5=a,$$

$$V_6=-V_7=\frac{1}{2}a.$$

它使规范粒子 X_i, $\bar{X}_i$, Y_i, $\bar{Y}_i$, P_i, $\bar{P}_i$, Q_i, $\bar{Q}_i$, $W'^{\pm}$，获得 10^{15}GeV 量级的质量．

$\underline{21}$ 维反称 Higgs χ_{ij} 的非零真空值为：

$$\langle\chi_{67}\rangle=b \tag{4.6}$$

它使 W'^{35} 获得 10^{15}GeV 量级的质量．

$\underline{392}$ 维 Higgs 场 χ_{ij}^{kl} 取如下非零真空值：

$$\begin{gathered}\langle\chi_{i7}^{k6}\rangle=\langle\chi_{i6}^{k7}\rangle=\delta_{ik}C_i\\c_1=c_2=c_3=\frac{-2}{3}c,\ c_4=c_5=c\end{gathered} \tag{4.7}$$

它使 W'^{48} 获得 10^{15}GeV 量级的质量．即上述 a, b, c 均为 10^{15}GeV 量级．

显然上述 Higgs 场真空值保持 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)\times S$ 对称性．由于 S 对称性的限制，以上三类 Higgs 场均不使费米子获得超重质量，即模型中的费米子全部是“轻”的．

在第二步破缺中，我们应用 Higgs 场 ϕ_{abc}^{ij}(i, j 反对称，a, b, c 全反对称)，ϕ_{ab}^{l}(a, b 反对称)，ϕ^{abc}(a, b, c 全反对称)，ϕ_l^{ij}(i, j 反对称)及 ϕ_m，在 10^2GeV 标度上把 $G_1\times S$ 破缺到 $SU(3)_c\times U(1)_{em}$，并使费米子及规范粒子 $W^{\pm}$, Z^0 获得质量．

其中 ϕ_{abc}^{ij} 取如下非零真空值：

$$\langle\phi_{5bc}^{ij}\rangle=v_{bc}(\delta_{ib}\delta_{jc}-\delta_{ic}\delta_{jb}) \tag{4.8}$$

令，

$$v_{14}=v_{24}=v_{34}=v_u,\quad v_{12}=v_{23}=v_{31}=v_e,$$
$$v_{16}=v_{26}=v_{36}=v_D,\quad v_{17}=v_{27}=v_{37}=v_s$$
$$v_{46}=v_\alpha,\quad v_{47}=v_\beta,\quad v_{67}=v_\gamma,$$

满足:

$$3v_u+v_\alpha+v_\beta=0,\quad 3v_D+v_\alpha+v_\gamma=0,$$
$$2v_c+v_u+v_s+v_D=0,\quad 3v_s+v_\beta+v_\gamma=0.$$
$$v_\gamma>v_\beta>v_\alpha.$$
$$\langle\phi^{a5}_{a67}\rangle=\omega_{a2},\quad a=1,2,3,4,\ \text{对 } a \text{ 不求和.}$$
$$\omega_{12}=\omega_{22}=\omega_{32}=-\frac{1}{3}\omega_{42}=\omega_2$$

ϕ^l_{ab} 取如下非零真空值:

$$\langle\phi^1_{15}\rangle=\langle\phi^2_{25}\rangle=\langle\phi^3_{35}\rangle=-\frac{1}{3}\langle\phi^4_{45}\rangle=v_1$$
$$\langle\phi^6_{65}\rangle=-\langle\phi^7_{75}\rangle=v_2,$$

ϕ^{abc} 的非零真空值为

$$\langle\phi^{567}\rangle=\omega_1,$$

ϕ^{ij}_l 的非零真空值为:

$$\langle\phi^{67}_5\rangle=\omega_3,\quad \langle\phi^{75}_6\rangle=\omega_4.$$

ϕ_m 的非零真空值为:

$$\langle\phi_5\rangle=h \tag{4.9}$$

显然上述真空值保持 $SU(3)_c\times U(1)_{em}$ 对称性.

下面讨论费米子质量.

应用上述第二步破缺中使用的五种 Higgs 场给出费米子质量. 规范不变的 Yukawa 耦合取为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_Y=&\frac{A}{2!3!}\bar{\Phi}_{ij}\phi^{ij}_{abc}\psi^{abc}+\frac{B}{2!2!3!}\tilde{\psi}^{ijk}c^{-1}\bar{\Phi}^{ab}_l\psi^{lcd}\epsilon_{ijkabcd}\\&+\frac{D}{2!2!3!}\bar{\Phi}_{ijkl}\phi^{ij}_{abc}\psi^{abckl}+\frac{E}{2!3!}\tilde{\psi}^{ijkl}c^{-1}\phi^m_{ab}\psi^{abcd}\epsilon_{ijklmcd}\\&+\frac{F}{4!5!}\bar{\Phi}_{iabcd}\phi^i_{jk}\psi^{jkabcd}+\frac{G}{3!3!}\tilde{\psi}^{ijk}c^{-1}\phi^{abc}\psi^l\epsilon_{ijkabcl}\\&+\frac{H}{2!4!}\tilde{\psi}^{abcd}c^{-1}\phi^{kl}_j\psi^{ij}\epsilon_{abcdkli}+\frac{K}{5!}\tilde{\psi}^{abcdei}c^{-1}\bar{\Phi}^l_{ij}\psi^{jk}\epsilon_{abcdelk}\\&+\frac{I}{3!4!}\tilde{\psi}^{ijkl}c^{-1}\phi_m\psi^{mabc}\epsilon_{ijklabc}+\frac{J}{5!5!}\bar{\Phi}_{ijklm}\phi_a\psi^{aijklm}\\&+\mathrm{H\cdot C}\end{aligned}\tag{4.10}$$

在前述各种 ϕ 场的真空值下,我们得到下述费米子的质量矩阵:

$$m_{\nu_e}=m_{\nu_\mu}=m_{\nu_\tau}=m_{\nu_{\tau'}}=0$$

轻子:

$$M_L = \begin{array}{c} \\ \bar{e}_L \\ \bar{\mu}_L \\ \bar{\tau}_L \\ \bar{\tau}'_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_R & \mu_R & \tau_R & \tau_{R'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} & \alpha_1 & & \\ \alpha_1 & 3a & & \\ \alpha_2 & & \rho & \\ & & & \omega \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.11}$$

其中，

$$\alpha = A\omega_2 = G\omega_1, \ a = Bv_1, \ \alpha_2 = H\omega_3,$$
$$\rho = 2(Ih - 3v_1E), \ \omega = Jh - 3Fv_1$$

上夸克：

$$M_u = \begin{array}{c} \\ \bar{u}_L \\ \bar{c}_L \\ \bar{t}_L \\ \bar{t}'_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_R & c_R & t_R & t'_R \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_u & & & \\ & m_c & & \\ & & m_t & \\ & & & m_{t'} \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.12}$$

$$m_u = \frac{2}{3}A(v_\alpha + v_\beta), \quad m_c = \frac{2}{3}A(v_\alpha + v_\beta + v_\gamma)$$

$$m_t = \frac{2}{3}D(v_\alpha + v_\beta + v_\gamma)$$

$$m'_t = \frac{2}{3}D(v_\alpha + v_\beta + 2v_\gamma)$$

适当选取 A，D，可做到

$$m_u < m_c < m_t < m'_t$$

下夸克：

$$M_D = \begin{array}{c} \\ \bar{d}_L \\ \bar{s}_L \\ \bar{b}_L \\ \bar{b}'_L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_R & s_R & b_R & b'_R \end{array} \\ \begin{bmatrix} & \alpha_1 & & \\ \alpha_1 & a & & \\ & & \varphi & \\ & & & \sigma \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.13}$$

$$\varphi = 2(Ih + Ev_1), \ \sigma = 2(Jh + Fv_1)$$

将上述 $(M_{d,L}M_{dL}^{+})$ 对角化后，得轻子质量为：

$$m_e^2 \sim \frac{\alpha_1^4}{9a^2}, \ m_\mu^2 \sim 9a^2, \ m_\tau^2 \sim \rho^2, \ m_{\tau'}^2 \sim \omega^2,$$

下夸克质量为：

$$m_d^2 \sim \frac{\alpha_1^4}{a^2}, \ m_s^2 \sim a^2, \ m_b^2 \sim \varphi^2, \ m_{b'}^2 \sim \sigma^2.$$

显然下述关系成立：

$$m_d \sim 3m_e, \ m_\mu \sim 3m_s, \ \sin\theta_c \sim \frac{\alpha_1}{a} = \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}.$$

其中 θ_c 为第一 Cabibbo 角.

右手流部分的轻子、夸克质量完全可以分开．适当选择耦合常数，可以使具有右手荷电弱流的费米子的质量比具有左手荷电弱流的通常费米子的质量相对的大一些，这样可以解释当前实验中只发现正常夸克与轻子这一事实，而且预言在能量提高后将有右手流夸克与轻子出现．

因为

$$Q=\mathrm{diag}\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},1,0,0,0\right)$$

$$I_3=\mathrm{diag}\left(0\ \ 0\ \ 0\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$$

容易看出，在大统一点

$$\sin^2\theta_w(M)=\frac{\mathrm{Tr}(I_3)^2}{\mathrm{Tr}(Q)^2}=\frac{3}{8} \tag{4.14}$$

由于破缺步骤与 $SU(5)$ 相同，$\sin^2\theta_w$ 的重正化群方程的计算与 $SU(5)$ 的计算相同，因而所得到的 $\sin^2\theta_w(M_w)$ 值与 $SU(5)$ 的值一致．第一步破缺的能标M也与$SU(5)$相同，因此质子寿命的理论值也与 $SU(5)$ 一致．这里不再给出重正化群方程的计算．

计算本模型的荷电弱流可以看出，有四代费米子构成左手荷电弱流，是 $V-A$ 型弱作用，有四代费米子构成右手荷电弱流，是 $V+A$ 型弱作用．

五、模型举例 (II)

用 $SU(8)\times S$ 作为大统一规范群．反常相消的费米子表示取为：

$$\underline{28}_R+\underline{70}_L+\underline{28}_R^* \tag{4.15}$$

与 $SU(8)$的 63 个生成元 T^a 相应，引入 63 个规范场，W_μ^a，$a=1,2,\cdots,63$.

定义

$$\frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu=\sum_a\frac{1}{2}T^aW_\mu^a \tag{4.16}$$

通过适当的变换，W_μ 表为下列形式表 12。

电荷 Q，超荷 Y，同位旋第三分量 T_{3L} 的表示式与(4.2)—(4.4)式类似，只是最后一个位置上多一个“0”．

费米子填充的具体方案见附录 II．

我们分两步把 $SU(8)\times S$ 破缺到 $SU(3)_c\times U(1)_{em}$. 第一步破缺引入 Higgs 场 χ_j^i 和 χ^{ijk} (i,j,k 全反对称)，在 10^{15}GeV 的标度上把 $SU(8)\times S$ 破缺到 $G_1\times S$. 其中 χ_j^i 的非零真空值为：

$$\langle\chi_j^i\rangle=\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
a&&&&&&&\\
&a&&&&&&\\
&&a&&&&&\\
&&&b&&&&\\
&&&&b&&&\\
\hline
&&&&&c_1&c_4&0\\
&&&&&0&c_2&c_5\\
&&&&&0&0&c_3
\end{array}\right]$$

表 12

$W_\mu \equiv$

$G_1^1-\frac{2B}{\sqrt{30}}+\frac{3W'^{48}}{\sqrt{120}}$	G_2^1	G_3^1	$\bar{X}_1$	$\bar{Y}_1$	$\bar{P}_1$	$\bar{Q}_1$	$\bar{R}_1$
G_1^2	$G_2^2-\frac{2B}{\sqrt{30}}+\frac{3W'^{48}}{\sqrt{120}}$	G_3^2	$\bar{X}_2$	$\bar{Y}_2$	$\bar{P}_2$	$\bar{Q}_2$	$\bar{R}_2$
G_1^3	G_2^3	$G_3^3-\frac{2B}{\sqrt{30}}+\frac{3W'^{48}}{\sqrt{120}}$	$\bar{X}_3$	$\bar{Y}_3$	$\bar{P}_3$	$\bar{Q}_3$	$\bar{R}_3$
X_1	X_2	X_3	$\frac{W^3}{\sqrt{2}}+\frac{3B}{\sqrt{30}}+\frac{3W'^{48}}{\sqrt{120}}$	W^+	$\bar{P}_4$	$\bar{Q}_4$	$\bar{R}_4$
Y_1	Y_2	Y_3	W^-	$\frac{-W^3}{\sqrt{2}}+\frac{3B}{\sqrt{30}}+\frac{3W'^{48}}{\sqrt{120}}$	$\bar{P}_5$	$\bar{Q}_5$	$\bar{R}_5$
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	$\frac{W'^{35}}{\sqrt{6}}-\frac{5W'^{48}}{\sqrt{120}}+\frac{W'^{63}}{\sqrt{2}}$	W'^+	W''^+
Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	W'^-	$\frac{W'^{35}}{\sqrt{6}}-\frac{5W'^{48}}{\sqrt{120}}-\frac{W'^{63}}{\sqrt{2}}$	W'''^+
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	W''^-	W'''^-	$\frac{-2W'^{35}}{\sqrt{6}}-\frac{5W'^{48}}{\sqrt{120}}$

满足 $a \neq b \neq c_i$,

$$3a + 2b + c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

上述非零真空值使规范粒子 X_i, $\bar{X}_i$, Y_i, $\bar{Y}_i$, P_i, $\bar{P}_i$, Q_i, $\bar{Q}_i$, R_i, $\bar{R}_i$, $W'^{\pm}$, $W''^{\pm}$, $W'''^{\pm}$, W'^{35}, W'^{63} 获得 10^{15}GeV 的超重质量.

Higgs 场 χ^{ijk} 的非零真空值为:

$$\langle \chi^{678} \rangle = h.$$

它使规范粒子 W'^{48} 获得 10^{15}GeV 量级的质量. 由于 S 对称性禁戒 χ 场同费米场的 Yukawa 耦合,上述破缺过程中费米子不能获得超重质量.

不难看出,上述 Higgs 场真空自发破缺保持 $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times S$ 对称性.

第二步破缺发生在 10^2GeV 标度上. 引入三种 Higgs 场: ϕ^{ij}_{dk}(i, j, 反对称, d, k 反对称), ϕ^a_{ijk}(i, j, k 全反对称)和 ϕ_{ijkl}(i, j, k, l 全反对称),把 $G_1 \times S$ 破缺到 $SU(3)_c \times U(1)_{em}$, 并给出费米子及 $W^{\pm}$, Z^0 的质量. 其中

ϕ^{ij}_{dk} 取如下非零真空值:

$$\langle \phi^{i5}_{i6} \rangle = v_{i6},\ \langle \phi^{i5}_{i7} \rangle = v_{i7},\ \langle \phi^{i5}_{i8} \rangle = v_{i8}$$
$$\langle \phi^{i6}_{i5} \rangle = v'_{i6},\ \langle \phi^{i7}_{i5} \rangle = v'_{i7},\ \langle \phi^{i8}_{i5} \rangle = v'_{i8}$$

满足下列关系:

$$v_{ik} > 0\ (k = 6, 7, 8)\ i = 1, 2, 3, 4,$$
$$v_{ik} < 0 \qquad i > 5.$$
$$v'_{ik} > 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\ v'_{ik} < 0,\ i > 5.$$
$$|v'_{ik}| > |v_{ik}|.$$
$$v_{1k} = v_{2k} = v_{3k},\ v'_{1k} = v'_{2k} = v'_{3k}.$$
$$v_{16} + v_{46} + v_{86} = 0,\ v_{17} + v_{47} + v_{67} = 0$$
$$v_{18} + v_{48} + v_{78} = 0,\ v_{26} + v_{36} + v_{76} = 0$$
$$v_{27} + v_{37} + v_{87} = 0,\ v_{28} + v_{38} + v_{68} = 0$$
$$v'_{16} + v'_{46} + v'_{86} = 0,\ v'_{17} + v'_{47} + v'_{67} = 0$$
$$v'_{18} + v'_{48} + v'_{78} = 0,\ v'_{26} + v'_{36} + v'_{76} = 0$$
$$v'_{27} + v'_{37} + v'_{87} = 0,\ v'_{28} + v'_{38} + v'_{68} = 0$$
$$|v_{46} - v_{36}| < |v_{47} - v_{37}| < |v_{48} - v_{38}|$$
$$|v'_{47} - v'_{37}| < |v'_{48} - v'_{38}| < |v'_{46} - v'_{36}|$$

Higgs 场 ϕ^a_{ijk} 取下列非零真空值:

$$\langle \phi^a_{i85} \rangle = \delta_{ai}\alpha_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{3}\alpha_4 = \alpha,$$
$$\langle \phi^a_{i65} \rangle = \delta_{ai}\beta_i \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = -\frac{1}{3}\beta_4 = \beta,$$
$$\langle \phi^5_{678} \rangle = \delta,\ \langle \phi^6_{785} \rangle = a_1,$$

$$\langle\phi^{7}_{865}\rangle = a_2,\ \langle\phi^{8}_{675}\rangle = a_3$$

Higgs 场 ϕ_{ijkl} 的非零真空值为：

$$\langle\phi_{6785}\rangle = b.$$

显然上述非零真空值保持 $SU(3)_c\times U(1)_{em}$ 对称性.

现在讨论费米子质量.

应用第二步破缺中引入的 Higgs 场给出费米子质量. 规范不变的 Yukawa 耦合为:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_Y = &\frac{A}{2!3!3!}\tilde{\psi}^{abcd}c^{-1}\phi^{ij}_{dk}\psi^{klmn}\varepsilon_{abcijlmn}\\ &+\frac{B}{2!4!}\bar{\psi}_{ab}\phi^{a}_{ijk}\psi^{ijkb}+\frac{C}{3!3!}\bar{\psi}_{almn}\phi^{a}_{ijk}\psi^{lmnijk}\\ &+\frac{D}{2!4!6!}\tilde{\psi}^{abijkl}c^{-1}\phi_{ijkl}\psi^{cdefgh}\varepsilon_{abcdefgh}\\ &+\frac{E}{2!2!}\tilde{\psi}^{ab}c^{-1}\bar{\phi}^{ijkl}\psi^{cd}\varepsilon_{abijklcd}\\ &+\mathrm{H\cdot C}\end{aligned}$$

在上述 ϕ 场的真空值下，即可得到费米子的质量矩阵. 下面我们给出具左手荷电弱流的通常费米子的质量矩阵.

$$m_{\nu_e}=m_{\nu_\mu}=m_{\nu_\tau}=m_{\nu_{\tau'}}=0$$

轻子：

$$M_L = \begin{array}{c} \\ \bar{e}_L\\ \bar{\mu}_L\\ \bar{\tau}_L\\ \bar{\tau}'_L\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} e_R & \mu_R & \tau_R & \tau'_R\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 3B\beta & Ba_3 & \\ Ba_1 & 3B\alpha & 0 & \\ 3B\alpha & Ba_2 & 3B\beta & \\ & & & c\delta\end{bmatrix}\end{array}$$

上夸克：

$$M_U = \begin{array}{c} \\ \bar{u}_L\\ \bar{c}_L\\ \bar{t}_L\\ \bar{t}'_L\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} u_R & c_R & t_R & t'_R\end{array}\\ \begin{bmatrix} m_u & & & \\ & m_c & & \\ & & m_t & \\ & & & m_{t'}\end{bmatrix}\end{array}$$

$$m_u = 2A(v_{46}-v_{36}),\ m_c = 2A(v_{47}-v_{37})$$

$$m_t = 2A(v_{48}-v_{38}),\ m_{t'} = Db$$

下夸克：

$$M_D = \begin{array}{c} \\ \bar{d}_L\\ \bar{s}_L\\ \bar{b}_L\\ \bar{b}'_L\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} d_R & s_R & b_R & b'_R\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & Ba_1 & B\alpha & \\ B\beta & B\alpha & Ba_2 & \\ Ba_3 & 0 & B\beta & \\ & & & c\delta\end{bmatrix}\end{array}$$

右手流部分的夸克、轻子质量可以分开．适当调节耦合常数，可以使“右手”费米子较“左手”费米子获得更大的质量．

因为

$$Q = \mathrm{diag}\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\right)$$

$$I_3 = \mathrm{diag}\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$$

容易看出，在大统一点

$$\sin^2\theta_W(M) = \frac{\mathrm{Tr}(I_3)^2}{\mathrm{Tr}(Q)^2} = \frac{3}{8}.$$

如同 $SU(5)$ 同样的重正化群方程计算，将得到与 $SU(5)$一致的 $\sin^2\theta_W(M_W)$值，及大统一能标 M．因此质子寿命的理论值也与 $SU(5)$ 相符．

计算本模型的荷电弱流可以看出，模型中包含四代通常费米子，以及四代右手荷电弱流的重费米子．

附录 I $SU(7)\times S$ 费米子填充

$\underline{7}_R = \underline{5}_R + 2\times\underline{1}_R$

$$\underline{5}_R = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\\e^c\\-\nu_e^c\end{pmatrix}_R,\quad \underline{1}_R = (6) = {}^{(1)}N_R^c,\quad \underline{1}_R = (7)_R = {}^{(2)}N_R^c$$

$\underline{21}_L = \underline{10}_L + 2\times\underline{5}_L + \underline{1}_L$

$$\underline{10}_L:\begin{bmatrix}0 & 12 & 13 & 14 & 15\\ & 0 & 23 & 24 & 25\\ & & 0 & 34 & 35\\ & & & 0 & 45\\ & & & & 0\end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix}0 & c_3 & -c_2^c & u_1 & d_1\\ & 0 & c_1^c & u_2 & d_2\\ & & 0 & u_3 & d_3\\ & & & 0 & e^c\\ & & & & 0\end{bmatrix}_L$$

$$\underline{5}_L:\begin{bmatrix}61\\62\\63\\64\\65\end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\{}^{(1)}L^c\\{}^{(1)}N^c\end{bmatrix}_L \qquad \underline{5}_L:\begin{bmatrix}71\\72\\73\\74\\75\end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\{}^{(2)}L^c\\{}^{(2)}N^c\end{bmatrix}_L \qquad \underline{1}_L:(67)_L = {}^{(7)}N_L^c$$

$\underline{35}_R = \underline{10}_R^* + 2\times\underline{10}_R + \underline{5}_R$

$$\underline{10}_R^*\begin{bmatrix}0 & 345 & 245 & 235 & 234\\ & 0 & 145 & 315 & 315\\ & & 0 & 125 & 124\\ & & & 0 & 123\\ & & & & 0\end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix}0 & u_3 & -u_2 & c_1^c & s_1^c\\ & 0 & u_1 & c_2^c & s_2^c\\ & & 0 & c_3^c & s_3^c\\ & & & 0 & \mu\\ & & & & 0\end{bmatrix}_R$$

$$\underline{10}_R:\begin{bmatrix}0 & 612 & 613 & 614 & 615\\ & 0 & 623 & 624 & 625\\ & & 0 & 634 & 635\\ & & & 0 & 645\\ & & & & 0\end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix}0 & c_3^c & -c_2^c & U_1 & D_1\\ & 0 & c_1^c & U_2 & D_2\\ & & 0 & U_3 & D_3\\ & & & 0 & {}^{(1)}L^c\\ & & & & 0\end{bmatrix}_R$$

$$\underline{10}_R:\begin{bmatrix} 0 & 712 & 713 & 714 & 715 \\ & 0 & 723 & 724 & 725 \\ & & 0 & 734 & 735 \\ & & & 0 & 745 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 & U_3^c & -U_2^c & C_1 & S_1 \\ & 0 & U_1^c & C_2 & S_2 \\ & & 0 & C_3 & S_3 \\ & & & 0 & {}^{(2)}L^c \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_R$$

$$\underline{5}_R:\begin{bmatrix} 671 \\ 672 \\ 673 \\ 674 \\ 675 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \mu^c \\ \nu_\mu^c \end{bmatrix}_R$$

$\underline{35}_L^* = \underline{5}_L^* + 2\times\underline{10}_L^* + \underline{10}_L$

$$\underline{10}_L^*:\begin{bmatrix} 0 & 3465 & 2465 & 2365 & 2364 \\ & 0 & 1465 & 3165 & 3164 \\ & & 0 & 1265 & 1264 \\ & & & 0 & 1263 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0 & T'_3 & -T'_2 & T_1^c & B_1^c \\ & 0 & T'_1 & T_2^c & B_2^c \\ & & 0 & T_3^c & B_3^c \\ & & & 0 & {}^{(3)}L \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_L$$

$$\underline{10}_L^*\begin{bmatrix} 0 & 3475 & 2475 & 2375 & 2374 \\ & 0 & 1475 & 3175 & 3174 \\ & & 0 & 1275 & 1274 \\ & & & 0 & 1273 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0 & T_3 & -T_2 & T_1'^c & B_1'^c \\ & 0 & T_1 & T_2'^c & B_2'^c \\ & & 0 & T_3'^c & B_3'^c \\ & & & 0 & {}^{(4)}L \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_L$$

$$\underline{10}_L:\begin{bmatrix} 0 & 6712 & 6713 & 6714 & 6715 \\ & 0 & 6723 & 6724 & 6725 \\ & & 0 & 6734 & 6735 \\ & & & 0 & 6734 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} 0 & t_3'^c & -t_2'^c & t_1 & b_1 \\ & 0 & t_1'^c & t_2 & b_2 \\ & & 0 & t_3 & b_3 \\ & & & 0 & \tau^c \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_L$$

$$\underline{5}_L^*:\begin{bmatrix} 2345 \\ 3145 \\ 1245 \\ 1235 \\ 1234 \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} b_1^c \\ b_2^c \\ b_3^c \\ \tau \\ \nu_\tau \end{bmatrix}_L$$

$\underline{21}_R^* = \underline{1}_R + 2\times\underline{5}_R^* + \underline{10}_R^*$

$$\underline{10}_R^*\begin{bmatrix} 0 & 34675 & 24675 & 23675 & 23674 \\ & 0 & 14675 & 31675 & 31674 \\ & & 0 & 12675 & 12674 \\ & & & 0 & 12673 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 & t_3 & -t_2 & t_1'^c & b_1'^c \\ & 0 & t_1 & t_2'^c & b_2'^c \\ & & 0 & t_3'^c & b_3'^c \\ & & & 0 & \tau' \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_R$$

$$\underline{5}_R^*\begin{bmatrix} 23456 \\ 31456 \\ 12456 \\ 12356 \\ 12346 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} B_1^c \\ B_2^c \\ B_3^c \\ {}^{(3)}L \\ {}^{(3)}N \end{bmatrix}_R \qquad \underline{5}_R^*\begin{bmatrix} 23457 \\ 31457 \\ 12457 \\ 12357 \\ 12347 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} B_1'^c \\ B_2'^c \\ B_3'^c \\ {}^{(4)}L \\ {}^{(4)}N \end{bmatrix}_R$$

$\underline{1}_R:(12345)_R = {}^{(3)}N_R^c$

$\underline{7}_L^* = \underline{5}_L^* + 2\times\underline{1}_L$

$$\underline{5}_L^*:\begin{bmatrix} 234567 \\ 314567 \\ 124567 \\ 123567 \\ 123467 \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} b_1'^c \\ b_2'^c \\ b_3'^c \\ \tau' \\ \nu_{\tau'} \end{bmatrix}_L$$

$\underline{1}_L:(123456)_L = {}^{(5)}N_L^c$

$\underline{1}_L:(123457)_L = {}^{(6)}N_L^c$

附录 II $SU(8)\times S$ 模型的费米子填充

$$\underline{28}_R=\underline{10}_R+3\times\underline{5}_R+3\times\underline{1}_R$$

$$\underline{5}_R=\begin{pmatrix}61\\62\\63\\64\\65\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\\e^c\\-\nu_e^c\end{pmatrix}_R,\qquad \begin{aligned}\underline{1}_R&=(67)_R={}^{(4)}N_R^c\\ \underline{1}_R&=(78)_R={}^{(5)}N_R^c\\ \underline{1}_R&=(86)_R={}^{(6)}N_R^c\end{aligned}$$

$$\underline{5}_R:\begin{bmatrix}71\\72\\73\\74\\75\end{bmatrix}_R=\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\\mu^c\\\nu_\mu^c\end{bmatrix}_R\qquad \underline{5}_R:\begin{bmatrix}81\\82\\83\\84\\85\end{bmatrix}_R=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\tau^c\\\nu_\tau^c\end{bmatrix}_R$$

$$\underline{10}_R:\begin{bmatrix}0&12&13&14&15\\&0&23&24&25\\&&0&34&35\\&&&0&45\\&&&&0\end{bmatrix}_R=\begin{bmatrix}0&T_3'^c&-T_2'^c&T_1'&B_1'\\&0&T_1'^c&T_2'&B_2'\\&&0&T_3'&B_3'\\&&&0&{}^{(4)}L^c\\&&&&0\end{bmatrix}_R$$

$$\underline{70}_L=\underline{5}_L^*+3\times\underline{10}_L^*+3\times\underline{10}_L+\underline{5}_L$$

$$\underline{10}_L:\begin{bmatrix}0&6712&6713&6714&6715\\&0&6723&6724&6725\\&&0&6734&6735\\&&&0&6745\\&&&&0\end{bmatrix}_L=\begin{bmatrix}0&C_3^c&-C_2^c&u_1&d_1\\&0&C_1^c&u_2&d_2\\&&0&u_3&d_3\\&&&0&e^c\\&&&&0\end{bmatrix}_L$$

$$\underline{10}_L:\begin{bmatrix}0&7812&7813&7814&7815\\&0&7823&7824&7825\\&&0&7834&7835\\&&&0&7845\\&&&&0\end{bmatrix}_L=\begin{bmatrix}0&t_3^c&-t_2^c&C_1&S_1\\&0&t_1^c&C_2&S_2\\&&0&C_3&S_3\\&&&0&\mu^c\\&&&&0\end{bmatrix}_L$$

$$\underline{10}_L:\begin{bmatrix}0&8612&8613&8614&8615\\&0&8623&8624&8625\\&&0&8634&8635\\&&&0&8645\\&&&&0\end{bmatrix}_L=\begin{bmatrix}0&u_3^c&-u_2^c&t_1&b_1\\&0&u_1^c&t_2&b_2\\&&0&t_3&b_3\\&&&0&\tau^c\\&&&&0\end{bmatrix}_L$$

$$\underline{10}_L^*:\begin{bmatrix}0&3465&2465&2365&2364\\&0&1465&3165&3164\\&&0&1265&1264\\&&&0&1263\\&&&&0\end{bmatrix}_L=\begin{bmatrix}0&C_3&-C_2&U_1^c&D_1^c\\&0&C_1&U_2^c&D_2^c\\&&0&U_3^c&D_3^c\\&&&0&{}^{(1)}L\\&&&&0\end{bmatrix}_L$$

$$\underline{10}_L^*:\begin{bmatrix}0&3475&2475&2375&2374\\&0&1475&3175&3174\\&&0&1275&1274\\&&&0&1273\\&&&&0\end{bmatrix}_L=\begin{bmatrix}0&T_3&-T_2&C_1^c&S_1^c\\&0&T_1&C_2^c&S_2^c\\&&0&C_3^c&S_3^c\\&&&0&{}^{(2)}L\\&&&&0\end{bmatrix}_L$$

$$\underline{10}_L^*:\begin{bmatrix}0&3485&2485&2385&2384\\&0&1485&3185&3184\\&&0&1285&1284\\&&&0&1283\\&&&&0\end{bmatrix}_L=\begin{bmatrix}0&U_3&-U_2&T_1^c&B_1^c\\&0&U_1&T_2^c&B_2^c\\&&0&T_3^c&B_3^c\\&&&0&{}^{(3)}L\\&&&&0\end{bmatrix}_L$$

$$\underline{5}_L:\begin{bmatrix}6781\\6782\\6783\\6784\\6785\end{bmatrix}_L=\begin{bmatrix}B'_1\\B'_2\\B'_3\\{}^{(4)}L^c\\{}^{(4)}N^c\end{bmatrix}_L\qquad \underline{5}^*_L:\begin{bmatrix}2345\\3145\\1245\\1235\\1234\end{bmatrix}_L=\begin{bmatrix}b'^c_1\\b'^c_2\\b'^c_3\\\tau'\\\nu_{\tau'}\end{bmatrix}_L$$

$$\underline{28}^*_R=3\times\underline{1}_R+3\times\underline{5}^*_R+\underline{10}^*_R$$

$$\underline{10}^*_R:\begin{bmatrix}0&346785&246785&236785&236784\\&0&146785&316785&316784\\&&0&126785&126784\\&&&0&126783\\&&&&0\end{bmatrix}_R=\begin{bmatrix}0&t'_3&-t'_2&t'^c_1&b'^c_1\\&0&t'_1&t'^c_2&b'^c_2\\&&0&t'^c_3&b'^c_3\\&&&0&\tau'\\&&&&0\end{bmatrix}_R$$

$$\underline{5}^*_R:\begin{bmatrix}234567\\314567\\124567\\123567\\123467\end{bmatrix}_R=\begin{bmatrix}B^c_1\\B^c_2\\B^c_3\\{}^{(3)}L\\{}^{(3)}N\end{bmatrix}_R\qquad \underline{5}^*_R:\begin{bmatrix}234578\\314578\\124578\\123578\\123478\end{bmatrix}_R=\begin{bmatrix}D^c_1\\D^c_2\\D^c_3\\{}^{(1)}L\\{}^{(1)}N\end{bmatrix}_R$$

$$\underline{5}^*_R:\begin{bmatrix}234586\\314586\\124586\\123586\\123486\end{bmatrix}_R=\begin{bmatrix}S^c_1\\S^c_2\\S^c_3\\{}^{(2)}L\\{}^{(2)}N\end{bmatrix}_R\qquad \begin{aligned}&\underline{1}_R:(123456)_R={}^{(1)}N^c_R\\&\underline{1}_R:(123457)_R={}^{(2)}N^c_R\\&\underline{1}_R:(123458)_R={}^{(3)}N^c_R\end{aligned}$$

作者感谢与周咸建、薛丕友同志的有益的讨论。

参　考　文　献

[1] H. Georgi, S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 438.

[2] H. Georgi, *Nucl. Phys.*, B156 (1979), 126.

[3] 马中骐、杜东生、岳宗五、薛丕友，中国科学，**4**(1981)，415.

[4] 杜东生、马中骐、薛丕友，scientia sinica，A25(1982)，51.

[5] 章义朋、周咸建、薛丕友，中国科学，1(1983)，48.

[6] 江向东，高能物理与核物理，**8**(1984)，272.

[7] Paul, Langacker, *Phys. Repot.*, **72** (1981), 185.

[8] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1264.

DISCRETE SYMMETRY AND $SU(N)$ GRAND UNIFIED MODELS

WAN LING-DE LU GONG-RU
(Xin Xiang Normal College)

TU TUNG-SHENG
(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Using discrete symmetry S, a systematic analysis of all possible GUT models based on the low rank group $SU(N)\times S$ is presented. It is found that only $SU(7)\times S$ and $SU(8)\times S$ are the satisfactory gauge groups of flavour grand unification. In addition, $SU(7)\times S$ and $SU(8)\times S$ models are discussed in detail. All these models can accommodate four generations of ordinary fermions and preserve the asympotic freedom of $SUc\ (3)$.