

沟道辐射中一些现象的理论分析

胡国驹 何国柱
(南开大学物理系)

摘 要

本文用 W、K、B 方法求解了相对论沟道负电子、正电子波动方程；采用 Molière 沟道势，得到了与实验结果符合的负电子平面沟道辐射频谱；预言了相对论正电子沟道辐射的多频谱现象；解释了正电子平面沟道辐射的单峰实验结果。并用微扰论求得了沟道粒子更为精确的波函数，得到了沟道辐射的选择定则，计算了负电子沟道辐射谱线的相对强度。还讨论了超相对论正、负电子沟道辐射频谱的退后量子效应。

一、引 言

近几年来，相对论的沟道正电子、负电子穿过晶体时产生的沟道辐射效应已为若干实验证实^[1-4]，并成为在核领域内发展起来的一个新研究方向。由于沟道辐射的量子很硬，波长在 X 射线、伽玛射线范围之内，单位频率、单位立体角辐射强度极高，单色性和方向性都好，并且是极化的，因而潜在着多方面应用的价值^[5]。本文从理论上较系统地讨论了相对论负电子、正电子的平面沟道辐射现象，提出了一些理论处理方法，使得对其物理特性的分析清晰、简洁。由此出发做出的理论计算解释了实验上已知的一些现象，并对若干特性和现象做了理论上的预言。

二、负电子平面沟道辐射频谱的理论研究

关于负电子平面沟道辐射频谱的研究，经典理论解释不了多频谱的实验结果。目前量子理论的唯一势处理方法需要反解宗量不算大的 Bessel 函数求阶数，计算精度不易保证^[6]。采用把波动微分方程化为差分方程的数值解法^[7]，计算较烦，初值和步长的取法对解的精度影响较大。

我们先由描述相对论电子运动的 Dirac 方程出发，

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

$$\hat{H} = \sqrt{m^2 c^4 + \hat{p}^2 c^2} + U = c \cdot \hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m c^2 + U$$

略去自旋效应, 对平面沟道情况, 当入射动能 $E \gg U(x)$, 只考虑横向运动时 (x 方向), 则有:

$$-\frac{\hbar^2}{2m\gamma} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + U(x)\phi(x) = \varepsilon \cdot \phi(x) \quad (1)$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$U(x)$ 为沟道势,

$$\varepsilon = \frac{E^2 - m^2c^4 - \hbar^2c^2 \cdot (K_y^2 + K_z^2)}{2E}$$

为横向能级, $\phi(x)$ 为沟道电子横向波函数.

由(1)可见: 对于平面沟道情况, 略去自旋效应, 电子横向运动方程具有 Schrödinger 方程的形式, 不过参与横向运动的质量要考虑相对论效应由 m 变为 $\gamma \cdot m$. 在相对沟道粒子纵向运动静止的坐标系中 γm 变为 m , 沟道势和相应的能级要由 U 、 ε 变为 $\gamma \cdot U$ 及 $\gamma \cdot \varepsilon$.

根据量子辐射理论, 沟道辐射起因于相对论沟道电子在沟道势场所形成的束缚能级间的跃迁. 由电磁辐射的 Doppler 效应可知, 若相对论的沟道粒子 (取为 O' 系) 以速度 v_{\parallel} 沿纵向 (取为 z 方向) 相对实验室系 O 运动, 发出一列平面单色波:

$$\cos\left(2\pi \frac{z' \cos\theta' + x' \sin\theta'}{\lambda'} - \omega't'\right),$$

则变换到 O 系仍为平面波:

$$\cos\left(2\pi \frac{z \cos\theta + x \sin\theta}{\lambda} - \omega t\right),$$

利用 O' 系、 O 系间 Lorentz 变换式, 可得:

$$\omega = \frac{\omega'}{1 - \beta_{\parallel} \cdot \cos\theta} \cdot \frac{1}{\gamma_{\parallel}}, \quad \beta_{\parallel} = \frac{v_{\parallel}}{c}.$$

在 O' 系中 n 、 m 能级间跃迁引起的辐射为:

$$\hbar\omega' = \varepsilon'_n - \varepsilon'_m = \gamma_{\parallel} \cdot (\varepsilon_n - \varepsilon_m)$$

在实验室系, 在入射粒子的正前方 ($\theta = 0$), 观测的辐射量子最硬, 为:

$$\hbar\omega_{\max} = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{1 - \beta_{\parallel}}$$

在沟道条件下, 当入射能量小于 n 个 GeV 时, 可取 $v_{\parallel} \simeq v$, $\beta_{\parallel} \simeq \beta$, $\gamma_{\parallel} \simeq \gamma$ 故:

$$\hbar\omega_{\max} = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{1 - \beta} = (1 + \beta)\gamma^2(\varepsilon_n - \varepsilon_m) \simeq 2\gamma^2(\varepsilon_n - \varepsilon_m) \quad (2)$$

当采用建立在 Thomas-Fermi 统计和连续介质模型 (Continuum Model) 基础上的 Molière 沟道势, 对在二主晶面间运动的带正电荷 Z_1e 的沟道粒子而言:

$$U^M(x) = U_0[0.35e^{-bl}(\cosh bx - 1) + 0.1375e^{-4bl}(\cosh 4bx - 1) + 0.005e^{-20bl}(\cosh 20bx - 1)]^{[8]}$$

$$U_0 = 8\pi NZ_1 Z_2 e^2 l / b, \quad b = 0.3/a,$$

a 为屏蔽长度, N 为晶靶原子密度.

为了解析计算方便, 可用带参数的非谐振势拟合理论的 Molière 势.

对正电子:

$$U(x) = U_1 \left(x^2 + \frac{\alpha}{2} x^4 \right) \quad \left(x \leq \frac{d}{2} \right)$$

x 为从二晶面中线算起在横方向的距离, d 为二晶面间的距离.

对负电子:

$$U(x) = -U_1 \cdot \left[\left(\frac{d}{2} - |x| \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{d}{2} - |x| \right)^4 \right] \quad \left(|x| \leq \frac{d}{2} \right)$$

x 为从晶面算起在横方向的距离.

值得提及的是这种非谐振势对理论 Molière 势拟合得很好^[8]. 其中参数 α 可由其它实验测定^[8,9].

考虑到相对论电子的 de Broglie 波长远小于沟道问题晶体的各种特征长度, 应可用 W 、 K 、 B 方法求解波动方程, 得到负电子在沟道势场中各能级满足的量子化条件:

$$\int_0^{b_n} \sqrt{2m\gamma[\varepsilon_n - U(x)]} \cdot dx = \frac{\hbar}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

沟道势中相应各量子能级 $\varepsilon_n = U(b_n)$ 时, 转折点位置为:

$$b_n = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{U_1} \cdot \varepsilon_n}}{\alpha}}, \quad n = 0, 1, 2 \cdots n_{\max}$$

从而求得各种可能的横向能级. 将求得的能级代入(2)式, 可方便地求出不同晶体、不同晶面、不同入射能量下负电子的各种平面沟道辐射频谱.

对 56MeV、28MeV 负电子入射 Si(110)、(100) 的沟道辐射频谱做了计算, 得到了与实验符合的结果, 并推算出其它一些辐射谱线, 如 56MeV 负电子入射 Si(110) 的另二个辐射谱线, 有些实验已证实其存在^[10].

表1 56MeV 负电子入射 Si(110) 的沟道辐射谱.

$\varepsilon_n(\text{eV})$	$\Delta n = 1$	$\Delta \varepsilon_{n, n-1}(\text{eV})$	沟道辐射 $\hbar\omega_{\max}(\text{keV})$		
			K-F 计算值 ^[7]	本文计算值	实验值 ^[2]
$\varepsilon_0 = -19.00$					
$\varepsilon_1 = -13.25$	1→0	5.75	139.1	141.6	128
$\varepsilon_2 = -9.31$	2→1	3.94	101.4	97.0	94
$\varepsilon_3 = -6.31$	3→2	3.00	75.4	73.9	68
$\varepsilon_4 = -3.96$	4→3	2.35	58.2	57.8	52
$\varepsilon_5 = -2.12$	5→4	1.84	45.4	45.3	42
$\varepsilon_6 = -0.74$	6→5	1.38		34.0	
$\varepsilon_7 = -0.00$	7→6	0.74		18.0	

表 2 28MeV 负电子入射 Si(110) 的沟道辐射谱.

$\varepsilon_n(\text{eV})$	$\Delta n = 1$	$\Delta\varepsilon_{n,n-1}(\text{eV})$	沟道辐射 $\hbar\omega_{\max}(\text{keV})$		
			K-F 计算值	本文计算值	实验值
$\varepsilon_0 = -17.60$					
$\varepsilon_1 = -10.70$	1→0	6.90	44.8	43.3	40
$\varepsilon_2 = -6.26$	2→1	4.44	28.9	27.8	25
$\varepsilon_3 = -3.12$	3→2	3.14	19.8	19.6	
$\varepsilon_4 = -0.94$	4→3	2.18		13.6	

表 3 56MeV 负电子入射 Si(100) 的沟道辐射谱.

$\varepsilon_n(\text{eV})$	$\Delta n = 1$	$\Delta\varepsilon_{n,n-1}(\text{eV})$	沟道辐射 $\hbar\omega_{\max}(\text{keV})$		
			K-F 计算值	本文计算值	实验值
$\varepsilon_0 = -9.86$					
$\varepsilon_1 = -5.26$	1→0	4.60	109.1	113.3	99
$\varepsilon_2 = -2.44$	2→1	2.82	72.3	69.4	64
$\varepsilon_3 = -0.62$	3→2	1.82	50.3	44.8	39

表 4 28MeV 负电子入射 Si(100) 的沟道辐射谱.

$\varepsilon_n(\text{eV})$	$\Delta n = 1$	$\Delta\varepsilon_{n,n-1}(\text{eV})$	沟道辐射 $\hbar\omega_{\max}(\text{keV})$		
			K-F 计算值	本文计算值	实验值
$\varepsilon_0 = -8.67$					
$\varepsilon_1 = -3.40$	1→0	5.27	34.3	33.0	31.3
$\varepsilon_2 = -0.59$	2→1	2.81	17.3	17.6	

三、正电子平面沟道辐射多频谱现象

对正电子平面沟道辐射频谱,以往的处理都是采用谐振子势,而这只是一种粗糙的近似,不符合沟道势的实际情况.我们从具有统计理论基础的 Molière 势出发,同样采用 W 、 K 、 B 方法做计算,从理论上预言了正电子沟道辐射的多频谱现象.具体计算了 56 MeV 正电子入射 Si(110)、(100) 晶面辐射频谱,结果如表 5 和表 6 所示.

这些频谱之间靠得很近(1—2keV),其分布范围与实验的展宽一致.

实验上观测的辐射强度的单峰可能是包含了能量相差很小的若干不同硬度辐射的贡

表 5 56MeV 正电子入射 Si(110) 沟道辐射谱. 经典理论对此估计值为 38—44keV^[11]. 测量辐射强度峰值在 $42.5 \pm 0.5\text{keV}$, 线展为 24%^[11].

能级序数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varepsilon_n(\text{eV})$	0.76	2.32	3.96	5.65	7.40	9.20	11.05	12.94	14.88	16.85	18.87	20.92	23.00
$\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$		1.56	1.64	1.69	1.75	1.80	1.85	1.89	1.94	1.97	2.02	2.05	2.08
$\hbar\omega_{\max}(\text{keV})$		38.4	40.4	41.6	43.1	44.3	45.5	46.5	47.8	48.5	49.7	50.5	51.2

表6 56MeV 正电子入射 Si(100) 沟道辐射谱. 经典对此估计值为 46—51keV^[11], 测量辐射强度峰值在 46.7±0.5keV, 线展为 18%^[12].

能级序数	0	1	2	3	4	5	6
$\epsilon_n(\text{eV})$	0.86	2.68	4.60	6.60	8.69	10.84	13.07
$\epsilon_n - \epsilon_{n-1}$		1.82	1.92	2.00	2.09	2.15	2.23
$\hbar\omega_{\text{max}}(\text{keV})$		44.8	47.3	49.2	51.1	52.9	54.9

献.

四、负电子平面沟道辐射的跃迁定则及辐射强度比的计算

为了便于分析沟道辐射的特性, 求出平面沟道负电子横向波函数的较精确解析表达式是有意义的. 直接用复杂的负电子理论沟道势, 如 Molière 势, 难于得到解析解. 我们用对 Schrödinger 方程有精确解的 Pöschl-Teller 势:

$$U^{P-T} = \frac{-U_0}{\cosh^2 \beta x} + U_2 \quad (4)$$

先粗糙地拟合 Molière 沟道势, 做为零级近似. 再用 Molière 势和 Pöschl-Teller 势之差做微扰, 就可求得较为精确的沟道波函数的解析表达式:

$$\phi_n^M(x) = \phi_n^{P-T}(x) + \sum_l' \frac{H'_{ln}}{\epsilon_n^{P-T} - \epsilon_l^{P-T}} \cdot \phi_l^{P-T}(x) \quad (5)$$

其中

$$H'_{ln} = \int \phi_l^{P-T}(x) \cdot [U^M(x) - U^{P-T}(x)] \cdot \phi_n^{P-T}(x) \cdot dx$$

由推算知 $\phi_n^{P-T}(x)$ 具有 n 宇称的性质:

$$\phi_n^{P-T(\text{even})} = (1 - z^2)^{p/2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{p-s}{2}, \frac{p+s+1}{2}, p+1, 1 - Z^2\right)$$

$$\phi_n^{P-T(\text{odd})} = Z \cdot (1 - Z^2)^{p/2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{p-s+1}{2}, \frac{p+s+2}{2}, p+1, 1 - Z^2\right)$$

其中:

$$Z = \tanh \beta x, \quad s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8\gamma m U_0}{\hbar^2 \beta^2}} \right), \quad p = \sqrt{\frac{-2(\epsilon^{P-T} - U_2)\gamma m}{\hbar^2 \beta^2}}$$

为使 $x=0$ 处 $\phi^{P-T}(x)$ 有限, 要求其中的超几何函数 ${}_2F_1$ 退化为多项式, 即:

$$\frac{p-s}{2} = -l, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{p-s+1}{2} = -m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

上二式并写为:

$$p-s = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

且有:

$$\epsilon_n^{P-T} = -\frac{(s-n)^2 \beta^2 \hbar^2}{2 \cdot \gamma \cdot m} + U_2 \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\text{max}}$$

ϵ_n^{P-T} 为 U^{P-T} 对应的第 n 个能级.

由于 $[U^M(x) - U^{P-T}(x)]$ 为偶函数, $\phi_n^{P-T}(x)$ 具有 n 宇称的性质, 由(5)可知一级近似波函数 $\phi_n^M(x)$ 也具有 n 宇称的性质. 对单光子电偶极跃迁引起的沟道辐射讲, 自发辐射系数 $\propto |x_{ji}|^2$, $x_{ji} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_j^M(x) x \phi_i^M(x) dx$ 故: $\Delta n = 1, 3$ 等奇数, $x_{ji} \neq 0$, 为允许跃迁. $\Delta n = 2, 4$ 等偶数, $x_{ji} = 0$, 为禁戒跃迁.

一个沟道负电子穿过厚为 L 的晶靶由 i 态跃迁到 j 态, 在正前方小立体角 ΔQ 内辐射的量子数为:

$$I_{ij} = \frac{2\pi^2\alpha}{r^2(\lambda_{ij})^2} \cdot |x_{ji}|^2 \cdot \Delta Q \cdot \int_0^L P_i(Z) dZ \quad (6)$$

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, λ_{ij} 为在实验室系正前方观测到的辐射量子的波长. $P_i(Z)$ 为一个负电子进入晶靶处于第 i 个量子态的占有几率.

$$\therefore \frac{I_{i,i-3}}{I_{i,i-1}} = \frac{|x_{i-3,i}|^2}{|x_{i-1,i}|^2} \cdot \left(\frac{\lambda_{i,i-1}}{\lambda_{i,i-3}}\right)^3 \quad (7)$$

利用以上求得的更为精确的波函数, 计算了 54MeV 负电子入射 Si(110) 相应 $\Delta n = 3$ 与 $\Delta n = 1$ 的跃迁引起辐射的相对强度, 理论计算结果与实验值相近(表 7). $\Delta n = 3$ 跃迁引起的沟道辐射远弱于 $\Delta n = 1$ 的. 这样既解释了负电子 $\Delta n = 1$ 的跃迁引起沟道辐射与实验谱峰的对应关系, 也可较为定量地说明来自 $\Delta n = 3$ 的弱的沟道辐射.

表 7

$I_{i,i-3}/I_{i,i-1}$	测量值	理论值
$3 \rightarrow 0$ $3 \rightarrow 2$	0.040 ± 0.018	0.14
$4 \rightarrow 1$ $4 \rightarrow 3$	0.19 ± 0.051	0.11
$5 \rightarrow 2$ $5 \rightarrow 4$	0.28 ± 0.12	0.21

表 8 56MeV 正电子入射 Si(110) 自发辐射系数 $A_{i,i-1}$ 随能级序数升高而增加.

相比的能级跃迁	$2 \rightarrow 1$ $1 \rightarrow 0$	$3 \rightarrow 2$ $1 \rightarrow 0$	$4 \rightarrow 3$ $1 \rightarrow 0$	$5 \rightarrow 4$ $1 \rightarrow 0$
$\frac{A_{i,i-1}}{A_{1,0}}$	2.19	3.15	4.75	6.07

对正电子横向沟道波函数用相仿的讨论方法可得相同的跃迁选择定则及来自 $\Delta n = 3$ 的弱的辐射.

对正电子相邻能级跃迁自发辐射系数 $A_{i,i-1}$ 的计算结果表明: 随着能级序数的增高, $A_{i,i-1}$ 很快增加, 见表 8. 似乎存在高量子态之间的跃迁引起的沟道辐射对实验测量的辐射强度贡献大. 在目前已知几十个 MeV 正电子入射的实验条件下^[4,12], 晶靶厚度大

于退道长度,并且处在高量子态的正电子退道更厉害,即多重散射几率大,造成辐射本底。因而对观测有贡献的辐射主要来自较低量子态的跃迁,即靠近谐振势部分的跃迁。从而使几十个 MeV 正电子平面沟道辐射的实验谱呈单峰。

五、超相对论正、负电子平面沟道辐射频谱的退后量子效应

在超相对论情况下,即入射能量大于几个 GeV 时,平面沟道正、负电子纵向的微小变速运动对沟道辐射的影响应予考虑。这时由于沟道粒子在沟道势场中形成的束缚态的数目 $\gg 1$, 粒子运动可近似用经典方法处理,沟道辐射仍认为起因于沟道粒子在这些束缚态间的跃迁。可推得,对正电子:

$$\hbar\omega_{\max} = \frac{2\gamma^2(\epsilon_n - \epsilon_{n-1})}{1 + \frac{\gamma\epsilon_n}{mc^2}}$$

表 9

入射能量	横向能级 (eV)		相应沟道辐射	实验的峰值 ^[13]
4GeV	高量子态	$\epsilon_{97} = 18.110$ $\epsilon_{96} = 17.765$	32MeV	25MeV
	低量子态	$\epsilon_1 = 0.421$ $\epsilon_0 = 0.140$	34.2MeV	
6GeV	高量子态	$\epsilon_{76} = 19.830$ $\epsilon_{75} = 19.545$	53MeV	44MeV
	低量子态	$\epsilon_1 = 0.343$ $\epsilon_0 = 0.114$	62MeV	
10GeV	高量子态	$\epsilon_{100} = 20.218$ $\epsilon_{99} = 20.000$	93MeV	88MeV
	低量子态	$\epsilon_2 = 0.444$ $\epsilon_1 = 0.265$	134MeV	
14GeV	高量子态	$\epsilon_{119} = 20.325$ $\epsilon_{118} = 20.140$	132MeV	120MeV
	低量子态	$\epsilon_3 = 0.525$ $\epsilon_2 = 0.375$	218MeV	

对负电子:

$$\hbar\omega_{\max} = \frac{2\gamma^2(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})}{1 + \frac{\gamma(|\varepsilon_0| - |\varepsilon_n|)}{mc^2}} \quad (8)$$

由(8)可知: 在超相对论情况时, 由于平面沟道正、负电子纵向变速运动, 引起了沟道辐射频谱的退后量子效应, 而在非超相对论情况, $\frac{\gamma\varepsilon_n}{mc^2} \ll 1$, 纵向运动影响可略去不计, 即变成了(2)式. 并且对应不同能级间的跃迁引起的退后量各不相同, 能级愈高的跃迁, 退后愈厉害.

考虑了退道效应, 预言了同样能量的超相对论正电子入射, 晶靶厚度不同, 实验观察辐射峰值位置也应不同, 晶靶愈厚, 辐射峰值位置会相对向高频方向移动. 具体计算了 4、6、10、14 GeV 超相对论正电子入射金刚石 (110) 晶面的沟道辐射(见表 9). 这时晶靶厚度小于退道长度^[13], 但正电子平面沟道相邻能级间的自发辐射系数随能级的增高迅速增大, 故对辐射的贡献主要来自正电子在高量子态的跃迁, 而高量子态的跃迁, 辐射频谱退后量大. 理论的计算结果和实验较为符合.

六、结 语

综上所述: 在 高能电子沟道过程中, 用 W 、 K 、 B 方法处理波动方程, 求得负电子、正电子横向运动能级和沟道辐射的各频谱与实验结果符合相当好, 方法简洁, 具有一定的普遍性和理论性, 并能预言正电子平面沟道辐射的多频谱现象.

用微扰方法求得沟道波函数较精确的解析表达式, 可方便地对沟道辐射特性进行分析和计算, 自然地得到了跃迁选择定则, 解释了 $\Delta n = 3$ 跃迁引起弱的沟道辐射. 由自发辐射系数的计算定性解释了正电子平面沟道辐射的单峰实验结果. 还讨论了超相对论正、负电子平面沟道辐射谱的退后量子效应, 预言了超相对论正电子辐射强度的峰区位置随晶靶厚度变化的现象.

本文讨论用的理论沟道势是静态的, 略去了晶面原子热振动的影响, 这对晶面附近能级计算会带来误差, 使 $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_0$ 的跃迁引起的辐射及 $\frac{I_{3,0}}{I_{3,2}}$ 的计算值与实验值偏离较大, 如考虑热振动效应应会改进计算结果.

沟道粒子的退道会引起深度效应, 本文未做退道关系的定量推导, 与退道有关现象只做了定性讨论.

参 考 文 献

- [1] M. J. Alguard, R. L. Swent, P. H. Pantell, B. L. Berman, S. D. Bloom, S. Datz, *Phys. Rev. Lett.*, **42** (1979), 1148.
- [2] R. L. Swent, R. H. Pantell, M. J. Alguard, R. L. Berman, S. D. Bloom, S. Datz, *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979), 1723.
- [3] J. U. Andersen, E. Lae gsgaard, *Phys. Rec. Lett.*, **44** (1980), 1079.

- [4] N. Cue, E. Bonderup, B. B. Marsh, H. Bakhru, R. E. Benenson, R. Haight, K. Inglis, G. O. Williams, *Phys. Lett.*, **A80** (1980), 26.
- [5] R. Wedell, *Phys. Stat. Sol(b)*, **99** (1980), 12.
- [6] R. H. Pantell, R. L. Swent, *Appl. Phys. Lett.*, **35** (1979), 910.
- [7] K. Komaki, F. Fujimoto, *Phys. Lett.*, **A82** (1981), 51.
- [8] E. Kührt, R. Wedell, *Phys. Stat. Sol(b)*, **107** (1981), 665.
- [9] E. Kührt, F. Täubner, *Phys. Stat. Sol(a)*, **61** (1980), 513.
- [10] B. L. Berman, S. D. Bloom, S. Datz, M. J. Alguard, R. L. Swent, R. H. Pantell, *Phys. Lett.*, **A82** (1981), 460.
- [11] R. H. Pantell, M. J. Alguard, *J. Appl. Phys.*, **52** (1979), 798.
- [12] R. H. Pantell, R. L. Swent, S. Datz, M. J. Alguard, D. L. Berman, S. D. Bloom, *IEEE Transactions On Nuclear Science*, **28** (1981), 1152.
- [13] А. О. Аганьяни, Ю. А. Варганов, Г. А. Вартагегян, М. А. Кутахов, Х. Трикалинос, В. Я. Ярлов, *Журнал. Экспер. и Теор. Физ.* **29** (1979), 554.

THEORETICAL ANALYSIS OF SOME PHENOMENA IN CHANNELLING SPONTANEOUS RADIATION

HU GUO-JU HE GUO-ZHU

(Department of Physics, Nankai University, Tianjin)

ABSTRACT

The wave equations for the channelling relativistic electron and positron are solved by W. K. B. method. Taking Moli'ere potential, the planar channelling radiation spectra of electrons are calculated. The calculations agree well with the experimental results. A multiplicity of the radiation spectrum for the relativistic positron is predicted and an explanation is given for the single peak observation. More accurate wave functions for the channelling particles have been derived by perturbation theory. Channelling radiation selection rules are obtained and the relative intensities of electron radiations from different energy level transitions are evaluated. The quantum effects of radiation spectrum shift for ultrarelativistic channelling positron and electron are also discussed.