第7卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 7, No. 2
1983年3月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Mar., 1983

d-玻色子体系波函数的 $SU_2\otimes SU_2$ 基、物理基与无迹玻色子算符（II）

杨　泽　森

（北京大学物理系）

摘　　要

为了完满地解决求现有几类物理基矢在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的表示问题，文中从第一类 $|PPO_3\rangle$ 基矢的无迹玻色子算符形式出发，直接求出内积 $\langle PP^A_{\varepsilon x}|PP\otimes LL\rangle$ 的明显表达式．同时用这种基矢的迭加表示出第二类基矢 $|PP(y)LL\}$，和用 $\langle PP^A_{\varepsilon x}|PP(x)LL\rangle$ 的相应的迭加表示出 $\langle PP^A_{\varepsilon x}|PP(y)LL\}$．在结语部分还把本文的方法与前文 (I) 的方法作了简单的对比．

一、引　　言

关于 d 玻色子体系的物理基矢，已经有了几类普遍公式，这点已在前文 (I) 中谈及[1]．它们都是用总玻色子数 n、未配对玻色子数 P、角动量量子数 LM 以及一个流动指标标记的，因此它们之间的差别归根到底是在流动指标上．这里说的几类是按照基本基矢 $|PPO_3\rangle$ 的原始定义来区分的。第一类 $|PPO_3\rangle$ 基矢是 Chacón 等人 (1976) 用无迹玻色子[illegible]符 a^+_μ 定义的[2]．这种公式十分简洁，但是难以直接使用．第二类是 Chacón 等人 (1977) [illegible]所谓“粒子-空穴”基矢[3]，他们已用通常的 d^+_μ 算符表达出这类基矢。第三类 $|PPO_3\rangle$ 基[illegible]是 S. Szpikowski 等人 (1980) 用 d^+_μ 以及角动量算符 $L_\pm$ 定义的[4]，他们已给出这种基[illegible]在 (n_μ) 表象的表示．

前文 (I) 曾强调了 $SU_2\otimes SU_2$ 表象在表达物理基方面的优点，提出要寻找比较简便的[illegible]求出这几类 $|PPO_3\rangle$ 基矢在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的表示，并借助于 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 基矢的一[illegible] 表达式建立了根据 $|PPO_3\rangle$ 基矢在 (n_μ) 表象的表示求出它在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的表示[illegible]为满意的方法，由此以及利用[3,4]中的结果可获得第二类和第三类 $|PPO_3\rangle$ 基矢在 [illegible]$\otimes SU_2$ 表象的表示．(I) 中提出的上述问题的其余方面将在本文中研究和解决．

在前文 (I) 中求内积 $\langle PPSU_2\otimes SU_2|PPO_3\rangle$ 的方法，是以下列两点为依据的：(1) 这两[illegible]矢都是无配对玻色子的基矢；(2) 在 (I) 中用 a^+_μ 算符构成的 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 基矢具[illegible]简单的结构．由于第 (1) 点，我们不仅能够用 a^+_μ 算符表达出 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 基矢，[illegible]求内积 $\langle PPSU_2\otimes SU_2|PPO_3\rangle$ 时，可把 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 中的 a^+_μ 算符换成 d^+_μ．又由于

本文1982年3月4日收到．

第 (2) 点，经过这种替换之后，$|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 被换成了比较简单的态矢量．按照同样的精神我们可以问：如果用 a_μ^+ 算符表达出 $|PPO_3\rangle$ 基矢，然后在求内积 $\langle PPSU_2\otimes SU_2|PPO_3\rangle$ 时把 $|PPO_3\rangle$ 中的 a_μ^+ 换成 d_μ^+，能否构成另一种有价值的方法？显然，如果 $|PPO_3\rangle$ 的 a_μ^+ 表达式具有简单的结构，则答案是肯定的．这时可用两种办法求 $\langle PPSU_2\otimes SU_2|PPO_3\rangle$，即：或者象 (I) 一样把 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 中的 a_μ^+ 换成 d_μ^+，或者把 $|PPO_3\rangle$ 中的 a_μ^+ 换成 d_μ^+．对于第一类 $|PPO_3\rangle$ 基矢来说，看来后一种方法更为自然(参看结语)．

本文将从第一类 $|PPO_3\rangle$ 基矢的无迹算符形式出发，用这里所说的后一种方法求出它在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的表示．此外，将把第二类 $|PPO_3\rangle$ 基矢表示为第一类基矢的迭加，从而用同样的方法求出第二类基矢在此表象的表示．

二、第一类 $|PPO_3\rangle$ 基矢在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的表示

和前文 (I) 一样[1]，我们把物理基矢和 $SU_2\otimes SU_2$ 基矢分别记作 $|nP(x)LM\rangle$ 以及 $|nP^\Lambda_{\epsilon\kappa}\rangle$．其中 np 为总玻色子数和未配对玻色子数，x 是流动指标，LM 是由通常的角动量 $\boldsymbol{L}$ 提供的量子数．$\Lambda\in\kappa$ 是由两个 SU_2 的"角动量" $\boldsymbol{\epsilon}$ 及 $\boldsymbol{\kappa}$ 提供的量子数．$(\epsilon_\pm,\ \epsilon_0)$ 及 $(\kappa_\pm,\ \kappa_0)$ 即是 $SU_2\otimes SU_2$ 群的无穷小算子，$\boldsymbol{\epsilon}$ 与 $\boldsymbol{\kappa}$ 是互相对易的，而且 $\boldsymbol{\epsilon}^2=\boldsymbol{\kappa}^2$．用 $(d_\mu^+,\ d_\nu)$ 代表 d 玻色子的产生、湮灭算符，$\tilde{d}_\mu$ 代表 $(-1)^\mu d_{-\mu}$，于是与 nP 相应的算符是

$$\hat{n}=\sum_\mu d_\mu^+ d_\mu\to n \tag{2.1}$$

$$R_5=\hat{n}(\hat{n}+3)-5(d^+d^+)_0(\tilde{d}\tilde{d})_0\to P(P+3) \tag{2.2}$$

$$(P=n,\ n-2,\ n-4,\ \cdots 0\ 或\ 1)$$

物理基矢是 $\hat{n}\ R_5\ \boldsymbol{L}^2\ L_0$ 的本征态，而 $SU_2\otimes SU_2$ 基矢则是 $\hat{n}\ R_5\ \boldsymbol{\epsilon}^2\ \epsilon_0\ \kappa_0$ 的本征态．$\Lambda\in\kappa$ 的意义如下：

$$\boldsymbol{\epsilon}^2(=\boldsymbol{\kappa}^2)\to\Lambda(\Lambda+1) \tag{2.3}$$

$$\left(\Lambda=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \cdots\ \frac{P}{2}\right)$$

$$\epsilon_0\to\epsilon(\epsilon=-\Lambda,\ -\Lambda+1,\ \cdots\Lambda) \tag{2.4}$$

$$\kappa_0\to\kappa(\kappa=-\Lambda,\ -\Lambda+1,\ \cdots\Lambda) \tag{2.5}$$

$L_\pm$ 与 $\epsilon_\pm$ 或 $\kappa_\pm$ 不对易，但 L_0 与 ϵ_0 或 κ_0 是对易的，并有如下的关系：

$$3\epsilon_0+\kappa_0=L_0 \tag{2.6}$$

利用算符 $\epsilon_\pm$ 及 $\kappa_\pm$ 可以定义 $SU_2\otimes SU_2$ 不可约张量．l 秩不可约张量含有 $(2l+1)$ 个分量 $\{T^l_{qq'}\}$，其中 $q,q'=-l,-l+1,\cdots l$．它们满足如下的条件：

$$[\epsilon_\pm,T^{(l)}_{qq'}]=T^{(l)}_{q\pm1,q'}\sqrt{(l\mp q)(l\pm q+1)} \tag{2.7}$$

$$[\kappa_\pm,T^{(l)}_{qq'}]=T^{(l)}_{q,q'\pm1}\sqrt{(l\mp q')(l\pm q'+1)} \tag{2.8}$$

这里提醒一下(参看 [1])，d_0^+ 及 d_0 都与 $\epsilon_\pm$ 及 $\kappa_\pm$ 对易，因而是 $SU_2\otimes SU_2$ 标量，$\mu\neq 0$ 的 4 个 d_μ^+ 或 4 个 $\tilde{d}_\mu$ 则组成 1/2 秩张量．另外，数算符 $\hat{n}$，配对算符 $(d^+d^+)_0$ 和它的共轭 $(\tilde{d}\tilde{d})_0$ 都是标量．

本节要解决的问题是针对第一类基矢 $|PP(x)LL\rangle$ 确定下式中的展开系数：

$$|PP(x)LL\rangle = \sum_{\Lambda \epsilon \kappa} |PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle\langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}|PP(x)LL\rangle \tag{2.9}$$

根据 (2.6) 式 L_0 在 $|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 中的本征值是 $3\epsilon + \kappa$，因此在 (2.9) 式中对 $\epsilon\kappa$ 的求和受到如下的限制:

$$3\epsilon + \kappa = L \tag{2.10}$$

在[2]中定义的 $|PP(x)LL\rangle$ 可以写成:

$$|PP(x)LL\rangle = [(a^+a^+)_2a^+]^x_0(a^+_2)^{\beta_1}(a^+a^+)^{\beta_2}_{22}[(a^+a^+)_2a^+]^{\beta_3}_{33}|0\rangle F(P, x, L) \tag{2.11}$$

而

$$F(P, x, L) = \left(\sqrt{\frac{35}{18}}\right)^x \left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^{\beta_2} \left(-\sqrt{\frac{14}{3}}\right)^{\beta_3} \Big/ \sqrt{\left(\frac{(L+\beta_3)}{2} + x\right)!} \tag{2.12}$$

其中的常系数 $F(P, x, L)$ 是随便写上的，(2.11) 尚未归一，流动指标 x 也不是正交指标．x 及 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 是满足以下条件的非负整数:

$$\beta_3 = \frac{1}{2}\{1-(-1)^L\} = \begin{cases} 0 & \text{当 } L = \text{偶} \\ 1 & \text{当 } L = \text{奇} \end{cases} \tag{2.13}$$

$$3x + \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = P \tag{2.14}$$

$$2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = L \tag{2.15}$$

a^+_μ 是相应于 d^+_μ 的无迹玻色子算符:

$$a^+_\mu = d^+_\mu - \sqrt{5}\,(d^+d^+)_0\,\frac{1}{2\hat{n}+5}\,\tilde{d}_\mu. \tag{2.16}$$

$$a_\mu = (a^+_\mu)^+ \tag{2.17}$$

a^+_μ 作用于无配对玻色子的态矢量时，总是不引起配对，这点可由 $[a^+_\mu, a^+_{\mu'}] = 0$ 以及下式推知:

$$(a^+a^+)_0 = \frac{5}{(2\hat{n}+1)(2\hat{n}-1)}(d^+d^+)_0(d^+d^+)_0(\tilde{d}\tilde{d})_0 \tag{2.18}$$

条件 (2.14) 和 (2.15) 的意义是一目瞭然的．(2.14) 表示 a^+_μ 在 (2.11) 中的次数是 P，因此保证总玻色子数及未配对玻色子数都是 P．另外，在 (2.11) 中各个 O_3 张量所携带的角动量投影均已达到最大值，所以条件 (2.15) 保证总角动量及投影都是 L．再来解释一下 (2.13)：因为 $[(a^+a^+)_2a^+]_{33}$ 的偶次幂可用 $(a^+a^+)_0$, $[(a^+a^+)_2\,a^+]_0$, a^+_2 以及 $(a^+a^+)_{22}$ 表示出来，而 $(a^+a^+)_0$ 作用于无配对玻色子的态矢量时等于零，因此只需要用到 $\beta_3 = 0$ 及 $\beta_3 = 1$，这就导致 (2.13)．由 (2.14) 及 (2.15) 解出 β_1 及 β_2 有

$$\beta_1 = L - (P - 3x) \tag{2.19}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\{2(P-3x) - 3\beta_3 - L\} \tag{2.20}$$

可见，在一定 P 下，x 可取不大于 $P/3$ 的一切非负整数；在一定 (P, x) 下，L 可取从 $(P-3x)$ 到 $2(P-3x)$ 的非负偶数以及从 $(P-3x)$ 到 $2(p-3x)-3$ 的正奇数．对应于不同 x 值的基矢 $|PP(x)LL\rangle$（给定 P, L），虽然不是相互正交的但确是线性无关的（参见[2]）.

我们看到，基矢 (2.11) 就其 a^+_μ 形式来说是十分简洁的．为了充分利用这一特点，这

里采用引言中所说的不同于前文 (I) 的方法求 $\langle PP^{A}_{\epsilon\kappa}|PP(x)LL\rangle$ 的表达式，即把 $|PP(x)LL\rangle$ 中的 a^{+}_{μ} 换成 d^{+}_{μ}:

$$\langle PP^{A}_{\epsilon\kappa}|PP(x)LL\rangle = \langle PP^{A}_{\epsilon\kappa}|\phi^{D}_{PP(x)LL}\rangle \tag{2.21}$$

其中

$$|\phi^{D}_{PP(x)LL}\rangle = [(d^{+}d^{+})_{2}d^{+}]^{x}_{0}(d^{+}_{2})^{\beta_1}(d^{+}d^{+})^{\beta_2}_{22}[(d^{+}d^{+})_{2}d^{+}]^{\beta_3}_{33}|0\rangle F(P,x,L) \tag{2.22}$$

为了化简 (2.21) 的右端，我们把 (2.22) 中各个 O_3 张量写成非耦合形式:

$$\sqrt{\frac{7}{8}}\,(d^{+}d^{+})_{22} = d^{+}_{0}d^{+}_{2} - \sqrt{\frac{3}{8}}\,d^{+2}_{1} \tag{2.23}$$

$$\sqrt{\frac{35}{18}}\,[(d^{+}d^{+})_{2}d^{+}]_{0} = d^{+}_{0}d^{+}_{-1}d^{+}_{1} + 2d^{+}_{0}d^{+}_{-2}d^{+}_{2} - \frac{1}{3}(d^{+}_{0})^{3}$$

$$- \sqrt{\frac{3}{2}}\,d^{+}_{-2}(d^{+}_{1})^{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\,(d^{+}_{-1})^{2}d^{+}_{2} \tag{2.24}$$

$$-\sqrt{\frac{14}{3}}\,[(d^{+}d^{+})_{2}d^{+}]_{33} = (d^{+}_{1})^{3} + 2d^{+}_{-1}(d^{+}_{2})^{2} - \sqrt{6}\,d^{+}_{0}d^{+}_{1}d^{+}_{2} \tag{2.25}$$

由于 β_3 只取 0 或 1，故

$$\left(-\sqrt{\frac{14}{3}}\right)^{\beta_3}[(d^{+}d^{+})_{2}d^{+}]^{\beta_3}_{33}$$

$$= \sum_{s_1s_2s_3}\delta(s_1+s_2+s_3-\beta_3)(2)^{s_2}(-\sqrt{6})^{s_3}(d^{+}_{-1})^{s_2}(d^{+}_{0})^{s_3}(d^{+}_{1})^{3s_1+s_3}(d^{+}_{2})^{2s_2+s_3} \tag{2.26}$$

其中 s_1, s_2 及 s_3 都只取 0 或 1，而且三者之和等于 β_3. 把 (2.23)、(2.24) 及 (2.26) 代入 (2.22) 得到

$$|\phi^{D}_{PP(x)LL}\rangle = \frac{\beta_2!\,x!}{\sqrt{\left(x+\frac{L+\beta_3}{2}\right)!}}\sum_{s_1s_2s_3r_1r_2}\sum_{x_1x_2x_3x_4x_5}|n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2\rangle.$$

$$\delta(s_1+s_2+s_3-\beta_3)\delta(r_1+r_2-\beta_2)\delta\left(\sum_i x_i - x\right)(-1)^{s_3+r_2+x_3+x_4+x_5}$$

$$(2)^{s_2+s_3+x_2-r_2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{s_3+r_2+x_4+x_5}\frac{\sqrt{n_{-2}!\,n_{-1}!\,n_0!\,n_1!\,n_2!}}{r_1!\,r_2!\,x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!\,x_5!} \tag{2.27}$$

其中

$$n_{-2} = x_2 + x_4 \tag{2.28}$$

$$n_{-1} = s_2 + x_1 + 2x_5 \tag{2.29}$$

$$n_0 = s_3 + r_1 + x_1 + x_2 + 3x_3 \tag{2.30}$$

$$n_1 = 3s_1 + s_3 + 2r_2 + x_1 + 2x_4 \tag{2.31}$$

$$n_2 = 2s_2 + s_3 + r_1 + x_2 + x_5 + \beta_1 \tag{2.32}$$

$$|n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2\rangle = \prod_{\mu}\frac{(d^{+}_{\mu})^{n_\mu}|0\rangle}{\sqrt{n_\mu!}} \tag{2.33}$$

在 $r_1 + r_2 = \beta_2$ 及 $\sum_i x_i = x$ 的限制下，(2.28)—(2.32) 符合如下的条件:

$$\sum_{\mu} n_{\mu} = P \tag{2.34}$$

$$\sum_{\mu} \mu n_{\mu} = L \tag{2.35}$$

把 (2.27) 代入 (2.21) 得到：

$$\langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa} | PP(x) L L\rangle = \frac{\beta_2!\, x!}{\sqrt{\left(x + \dfrac{L+\beta_3}{2}\right)!}} \sum_{s_1 s_2 s_3 r_1 r_2} \sum_{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa} | n_{-2} n_{-1} n_0 n_1 n_2\rangle.$$

$$\delta(s_1+s_2+s_3-\beta_3)\,\delta(r_1+r_2-\beta_2)\,\delta\left(\sum_i x_i - x\right)(-1)^{s_3+r_2+x_3+x_4+x_5}$$

$$(2)^{s_2+s_3+x_2-r_2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{s_3+r_2+x_4+x_5}\frac{\sqrt{n_{-2}!\,n_{-1}!\,n_0!\,n_1!\,n_2!}}{r_1!\,r_2!\,x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!\,x_5!} \tag{2.36}$$

这里涉及的 $\langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa} | n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2\rangle$ 可借助 C-G 系数表示出来，结果如下(见第四节)：

$$\langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa} | n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2\rangle = \delta\left(\sum_{\mu} n_{\mu} - P\right)\delta(n_1+n_2-n_{-2}-n_{-1}-2\epsilon)$$

$$\cdot \frac{1}{2}\{1+(-1)^{P-n_0-2\Lambda}\}$$

$$\sqrt{\frac{(2)^{n_0-1}P!\,(P-2\Lambda)!\,(P+2\Lambda+2)!}{n_0!\,(2P+1)!\left(\dfrac{P-n_0+2\Lambda+2}{2}\right)!\left(\dfrac{P-n_0-2\Lambda}{2}\right)!}}$$

$$\times\left\langle \frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1}),\ \frac{1}{2}(n_{-1}-n_{-2}),\ \frac{1}{2}(n_1+n_2),\ \frac{1}{2}(n_2-n_1)\,\middle|\,\Lambda\kappa\right\rangle \tag{2.37}$$

其中 C-G 系数的记法是 $\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle$. 出现在 (2.37) 中的粒子数条件已被 (2.34) 满足，关于 ϵ 及 κ 的条件是

$$n_1+n_2-n_{-2}-n_{-1}=2\epsilon \tag{2.38}$$

$$n_{-1}-n_{-2}+n_2-n_1=2\kappa \tag{2.39}$$

可以借助 (2.28)—(2.32) 改写成：

$$r_1+2r_2+x_4-x_5+\beta_1=2\epsilon \tag{2.40}$$

$$L=3\epsilon+\kappa. \tag{2.41}$$

(2.40) 对 (2.36) 中的求和带来一个新的限制，加上原有的三个限制条件，使独立的求和重数变为 6. 例如我们可以把 $s_1\,s_3\,r_1\,x_1\,x_3\,x_5$ 选为独立的求和指标，而把 s_2, r_2, x_4 及表示为：

$$s_2=\beta_3-s_1-s_3 \tag{2.42}$$

$$r_2=\beta_2-r_1 \tag{2.43}$$

$$x_4=2s_2+s_3+r_1+x_5+2\epsilon+3x-P \tag{2.44}$$

$$x_2=x-(x_1+x_3+x_4+x_5) \tag{2.45}$$

(2.36) 可写成：

$$\langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}|PP(x)LL\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta(3\epsilon + \kappa - L) \frac{\beta_2 ! x!}{\sqrt{\left(x + \frac{L+\beta_3}{2}\right)!}} \sqrt{\frac{P!(P-2\Lambda)!(P+2\Lambda+2)!}{(2P+1)!}} \\
&\quad \times \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{\beta_2+2\epsilon+3x-P} \cdot \sum_{s_1 s_3 r_1 x_1 x_3 x_5} \frac{1}{2}\{1 + (-1)^{P-n_0-2\Lambda}\} \\
&\quad \times \frac{(-1)^{x_3}(2)^{x_2-r_2-x_5}(3)^{s_2+s_3+x_5-x_3}}{r_1! r_2! x_1! x_2! x_3! x_4! x_5!} \\
&\quad \cdot \sqrt{\frac{(2)^{n_0-1} n_{-2}! n_{-1}! n_1! n_2!}{\left(\frac{P-n_0-2\Lambda}{2}\right)! \left(\frac{P-n_0+2\Lambda+2}{2}\right)!}} \\
&\quad \times \left\langle \frac{1}{4}(P-n_0-2\epsilon), \frac{1}{2}(n_{-1}-n_{-2}), \frac{1}{4}(P-n_0+2\epsilon)\kappa \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(n_{-1}-n_{-2}) \middle| \Lambda\kappa \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

这就是我们要求的普遍公式. 我们已经利用 (2.34) 把 $\frac{1}{2}(n_1+n_2)$ 及 $\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})$ 换成了 $\frac{1}{4}(P-n_0+2\epsilon)$ 及 $\frac{1}{4}(P-n_0-2\epsilon)$. 出现在公式中的 $s_i\, r_i\, x_i$ 及 n_μ 都是非负整数. $s_2\, r_2\, x_2$ 及 x_4 是根据 (2.42)—(2.45) 当作独立量 $s_1\, s_3\, r_1\, x_1\, x_3\, x_5$ 的函数看待的 (在给定的 PxL 下), 借此以及 (2.28)—(2.32) 又把 n_μ 看作这 6 个独立量的函数. 这个公式含有 $P-n_0-2\Lambda=$ 偶数以及 $P-n_0 \geqslant 2\Lambda$ 的条件, 这可根据 d_μ^+ 的 $SU_2 \otimes SU_2$ 张量性质来说明(参看第四节末). 值得特别记住的是, (s_1, s_3) 的取值范围是很狭小的, 当 β_3 等于 1 时也只能取 (0, 0)、(0, 1) 及 (1,0), 当 $\beta_3=0$ 时则只能是 (0, 0).

三、第二类 $|PPO_3\rangle$ 基矢在 $SU_2 \otimes SU_2$ 表象的表示

在 [3] 中定义的所谓"粒子-空穴"基矢可写成:

$$
|PP(y)LL\} = (a_2^+)^\sigma (d_{-2})^\tau [(a^+a^+)_2 a^+]_0^{\tau+y} [(a^+a^+)_2 a^+]_{33}^{\beta} |0\rangle F'(P, y, L) \tag{3.1}
$$

$$
F'(P, y, L) = \left(\sqrt{\frac{35}{18}}\right)^{\tau+y} \left(-\sqrt{\frac{14}{3}}\right)^{\beta_3} \Big/ \sqrt{\left(y + \frac{L+\beta_3}{2}\right)!} \tag{3.2}
$$

其中 $y\sigma\tau\beta_3$ 都是非负整数, y 是流动指标, β_3 的定义与前节一样:

$$
\beta_3 = \frac{1}{2}\{1-(-1)^L\} \tag{3.3}
$$

由于 d_{-2} 使粒子数减 1, 但使角动量投影增加 2 个单位, 因此 σ 及 τ 由如下条件决定:

$$
\sigma + 2\tau + 3y + 3\beta_3 = P \tag{3.4}
$$

$$
2(\sigma+\tau) + 3\beta_3 = L \tag{3.5}
$$

解出 σ 及 τ 有:

$$
\sigma = L - (P - 3y) \tag{3.6}
$$

$$
\tau = \frac{1}{2}\{2(P-3y) - 3\beta_3 - L\} \tag{3.7}
$$

可见,与前节情形相似，在一定 P 下，y 可取不大于 $P/3$ 的一切非负整数，在一定 (P, y) 下，L 可取从 $P-3y$ 到 $2(P-3y)$ 的非负偶数以及从 $P-3y$ 到 $2(P-3y)-3$ 的正奇数。对应于不同 y 值 (在给定 PL 下)的 $|PP(y)LL\}$ 虽然不正交，但确是独立的 (参看 [3])。

在本节中,我们要把 $|PP(y)LL\rangle$ 表示成 $|PP(x)LL\rangle$ (第一类基矢)的迭加,从而把内积 $\langle PP^{A}_{\epsilon\kappa}|PP(y)LL\}$ 表示成 $\langle PP^{A}_{\epsilon\kappa}|PP(x)LL\rangle$ 的相应的迭加. 根据 [3] 可求得:

$$[(a^+a^+)_2a^+]^l_0|0\rangle = \sum_r\left(-\frac{2}{35}\right)^r\frac{l!\,l!\,(2l-2r)!}{r!\,(l-2r)!\,(l-r)!\,(2l)!}[\sqrt{5}\;(d^+d^+)_0]^{3r}[(d^+d^+)_2d^+]^{l-2r}_0|0\rangle \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&[(a^+a^+)_2a^+]^l_0[(a^+a^+)_2a^+]_{33}|0\rangle\\ &= [(d^+d^+)_2d^+]_{33}\sum_r\left(-\frac{2}{35}\right)^r\frac{l!\,l!\,(2l-2r+1)!}{r!\,(l-2r)!\,(l-r)!\,(2l+1)!}\\ &\times[\sqrt{5}\;(d^+d^+)_0]^{3r}[(d^+d^+)_2d^+]^{l-2r}_0|0\rangle\end{aligned} \tag{3.9}$$

由于 β_3 只能是 0 或 1，因此把 (3.8) 与 (3.9) 合并起来有:

$$\begin{aligned}&[(a^+a^+)_2a^+]^{\tau+y}_0[(a^+a^+)_2a^+]^{\beta_3}_{33}|0\rangle\\ &= [(d^+d^+)_2d^+]^{\beta_3}_{33}\sum_r\left(-\frac{2}{35}\right)^r\frac{(\tau+y)!\,(\tau+y)!\,(2\tau+2y-2r+\beta_3)!}{r!\,(\tau+y-2r)!\,(\tau+y-r)!\,(2\tau+2y+\beta_3)!}\\ &\cdot[\sqrt{5}\;(d^+d^+)_0]^{3r}[(d^+d^+)_2d^+]^{\tau+y-2r}_0|0\rangle\end{aligned} \tag{3.10}$$

注意下列关系式:

$$[d_{-2},\ (d^+d^+)_0] = \frac{2}{\sqrt{5}}d^+_2 \tag{3.11}$$

$$[d_{-2}, [(d^+d^+)_2d^+]_0] = \frac{3}{\sqrt{5}}(d^+d^+)_{22} \tag{3.12}$$

$$[d_{-2},\ (d^+d^+)_{22}] = [d_{-2}, [(d^+d^+)_2d^+]_{33}] = 0 \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}&(d_{-2})^\tau\ [\sqrt{5}\,(d^+d^+)_0]^{3r}[(d^+d^+)_2d^+]^{\tau+y-2r}_0|0\rangle\\ &= \sum_s(2)^{\tau-s}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^s\binom{\tau}{s}\frac{(3r)!}{(3r-\tau+s)!}\frac{(\tau+y-2r)!}{(\tau+y-2r-s)!}\\ &\cdot(d^+_2)^{\tau-s}(d^+d^+)^s_{22}\ [\sqrt{5}\;(d^+d^+)_0]^{3r-\tau+s}[(d^+d^+)_2d^+]^{\tau+y-2r-s}_0|0\rangle\end{aligned} \tag{3.14}$$

$(d_{-2})^\tau$ 作用于 (3.10) 得到:

$$\begin{aligned}&(d_{-2})^\tau[(a^+a^+)_2a^+]^{\tau+y}_0[(a^+a^+)_2a^+]^{\beta_3}_{33}|0\rangle\\ &= \sum_{rs}\left(\frac{-2}{35}\right)^r(2)^{\tau-s}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^s\binom{\tau}{s}\frac{(3r)!}{(3r+\tau+s)!}\binom{\tau+y}{r}\\ &\times\frac{(\tau+y)!}{(\tau+y-2r-s)!}\frac{(2\tau+2y-2r+\beta_3)!}{(2\tau+2y+\beta_3)!}\\ &\times(d^+_2)^{\tau-s}(d^+d^+)^s_{22}[\sqrt{5}\,(d^+d^+)_0]^{3r-\tau+s}[(d^+d^+)_2d^+]^{\tau+y-2r-s}_0[(d^+d^+)_2d^+]^{\beta_3}_{33}|0\rangle\end{aligned} \tag{3.15}$$

端看出,这是一种没有配对玻色子的态矢量,因此在右端把 d^+_μ 换成 a^+_μ 不会引起什么这时 $(a^+a^+)_0$ 应当消失,故

$$(d_{-2})^{\tau}[(a^{+}a^{+})_{2}a^{+}]_{0}^{\tau+y}[(a^{+}a^{+})_{2}a^{+}]_{33}^{\beta_3}|0\rangle$$

$$= \sum_{r}\left(-\frac{16}{35}\right)^{r}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{\tau-3r}\frac{\tau!}{(\tau-3r)!}\binom{\tau+y}{r}\frac{(\tau+y)!}{(r+y)!}\frac{(2\tau+2y-2r+\beta_3)!}{(2\tau+2y+\beta_3)!}$$

$$\times [(a^{+}a^{+})_{2}a^{+}]_{0}^{r+y}(a_{2}^{+})^{3r}(a^{+}a^{+})_{22}^{\tau-3r}[(a^{+}a^{+})_{2}a^{+}]_{33}^{\beta_3}|0\rangle \tag{3.16}$$

把 (3.16) 代回 (3.1) 中并与上节 $|PP(x)LL\rangle$ 比较，得出

$$|PP(y)LL\} = \sum_{x}|PP(x)LL\rangle V_{(x,y)}^{PL} \tag{3.17}$$

其中

$$V_{(x,y)}^{PL} = \frac{(-9)^{y-x}(2)^{\tau}}{(\tau+2y-x)!}\frac{(\tau+y)!}{x!}\frac{(\tau+y)!}{(x-y)!}\frac{(2\tau+4y-2x+\beta_3)!}{(2\tau+2y+\beta_3)!}$$

$$\times\frac{\tau!}{\left(P-3x-\frac{L+3\beta_3}{2}\right)!}\sqrt{\frac{\left(x+\frac{L+\beta_3}{2}\right)!}{\left(y+\frac{L+\beta_3}{2}\right)!}} \tag{3.18}$$

这样我们就把第二类 $|PPO_3\rangle$ 基矢表示成第一类基矢的迭加. 利用 (3.17) 有

$$\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PP(y)LL\} = \sum_{x}\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PP(x)LL\rangle V_{(x,y)}^{PL} \tag{3.19}$$

而 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PP(x)LL\rangle$ 的表达式已在上节求出。

最后提一下，我们也可以把 (3.1) 中的 $(d_{-2})^{\tau}$ 改为 $(a_{-2})^{\tau}$，然后按照下式求它与 $|PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle$ 的内积:

$$\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PP(y)LL\}$$

$$= \langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|(d_{2}^{+})^{\sigma}(a_{-2})^{\tau}[(d^{+}d^{+})_{2}d^{+}]_{0}^{\tau+y}[(d^{+}d^{+})_{2}d^{+}]_{33}^{\beta_3}|0\rangle F'(P,y,L) \tag{3.20}$$

右端的化简也不麻烦，但由此找不到比 (3.19) 简单的表达式，不必特别讨论.

四、$\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|n_{\mu}\rangle$ 的表达式

本节的目的是要证明第二节用到的 (2.37) 式. 在 [5] 和前文 (I) 中[1]，曾从不同的途径求出了 $|PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle$ 的表达式，这两种公式包含着不同的相角规定. 为了便于保持相角规定的一致性，这里采用 [1] 中的 a_{μ}^{+} 形式:

$$|PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle = C(P,\Lambda)(a_{0}^{+})^{P-2\Lambda}|2\Lambda,2\Lambda,{}_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle \tag{4.1}$$

$$C(P,\Lambda) = \sqrt{\frac{(2P+1)!(2\Lambda+1)!}{(2)^{P-2\Lambda-1}P!(P-2\Lambda)!(P+2\Lambda+2)!}} \tag{4.2}$$

注意 a_{0}^{+} 是 $SU_2\otimes SU_2$ 标量，而且 $d_0|2\Lambda,2\Lambda,{}_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle = 0$，有

$$(a_{0}^{+})^{s}|2\Lambda,2\Lambda,{}_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle$$

$$= \sum_{r}B(s,\Lambda,r)(d_{0}^{+})^{s-2r}(d_{-1}^{+}d_{1}^{+}-d_{-2}^{+}d_{2}^{+})^{r}|2\Lambda,2\Lambda,{}_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle \tag{4.3}$$

在 $(\tilde{d}\tilde{d})_0$ 作用下应变为 0，由此推得:

$$B(s,\Lambda,r) = \frac{s!(2\Lambda+1)!}{(2)^{r}r!(2\Lambda+1+r)!(s-2r)!}B(s,\Lambda,0) \tag{4.4}$$

其次从 a_0^+ 的定义可看出 $B(s,\Lambda,0)$ 关于 s 的递推关系：

$$B(s,\Lambda,0)=\left(\frac{s+4\Lambda+2}{2s+4\Lambda+1}\right)B(s-1,\Lambda,0)$$

因此

$$B(s,\Lambda,0)=\frac{(s+4\Lambda+2)!}{(4\Lambda+2)!}\,\frac{(4\Lambda+1)!!}{(2s+4\Lambda+1)!!} \tag{4.5}$$

$$|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle=\sqrt{\frac{(2)^{P-2\Lambda-1}(2\Lambda+1)!P!(P-2\Lambda)!\,(P+2\Lambda+2)!}{(2P+1)!}}$$

$$\cdot\sum_{r}\frac{(d_0^+)^{P-2\Lambda-2r}(d_{-1}^+d_1^+-d_{-2}^+d_2^+)^r|2\Lambda,2\Lambda,{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle}{(2)^r r!(2\Lambda+1+r)!(P-2\Lambda-2r)!} \tag{4.6}$$

把 $|2\Lambda,2\Lambda,{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 的表达式代进来即可求出 $\langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}|n_\mu\rangle$. 不过，这里要用 Wigner-Eckart 定理说明这个量与 C-G 系数的简单关系. 注意 $(d_{-2}^+)^{n_{-2}}(d_{-1}^+)^{n_{-1}}$ 及 $(d_1^+)^{n_1}(d_2^+)^{n_2}$ 都带有确定的 Λ 值，即 $\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})$ 及 $\frac{1}{2}(n_1+n_2)$，故

$$|n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2\rangle=T^{\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}_{\frac{-1}{2}(n_{-2}+n_{-1}),\frac{1}{2}(n_{-1}-n_{-2})}\left|n_1+n_2,\ n_1+n_2,\ {}^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}_{\frac{1}{2}(n_1+n_2),\frac{1}{2}(n_2-n_1)}\right\rangle \tag{4.7}$$

其中

$$T^{\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}_{\frac{-1}{2}(n_{-2}+n_{-1}),\frac{1}{2}(n_{-1}-n_{-2})}=\frac{(d_{-2}^+)^{n_{-2}}(d_{-1}^+)^{n_{-1}}(d_0^+)^{n_0}}{\sqrt{n_{-2}!n_{-1}!n_0!}} \tag{4.8}$$

这是 $\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})$ 秩 $SU_2\otimes SU_2$ 不可约张量的分量. 约化矩阵元

$$\left(PP\Lambda\|T^{\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}\|n_1+n_2,n_1+n_2,\frac{1}{2}(n_1+n_2)\right)$$

可用下式求出：

$$\left\langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\Lambda}\right|T^{\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}_{\frac{-1}{2}(n_{-2}+n_{-1}),\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}\left|n_1+n_2,n_1+n_2,\ {}^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}_{\frac{1}{2}(n_1+n_2),\Lambda-\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2\Lambda+1}\left(PP\Lambda\|T^{\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}\|n_1+n_2,n_1+n_2,\frac{1}{2}(n_1+n_2)\right)$$

$$\cdot\left\langle\frac{1}{2}(n_1+n_2),\frac{1}{2}(n_1+n_2),\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1}),\right.$$

$$\left.\times\frac{-1}{2}(n_{-2}+n_{-1})\right|\Lambda\epsilon\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{2}(n_1+n_2),\Lambda$$

$$-\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1}),\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})\frac{-1}{2}(n_{-2}+n_{-1})\Big|\Lambda\Lambda\Big\rangle \tag{4.9}$$

C-G 系数的记法是 $\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle$. 把第二个 C-G 系数的表达式代入来，注意 ${}^{\ldots_{2}+n_{-1})}_{\ldots_{2}+n_{-1}),\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}$ 就是 $\frac{(d_0^+)^{n_0}}{\sqrt{n_0!}}$ 与 $(d_{-1}^+)^{n_{-2}+n_{-1}}/\sqrt{(n_{-2}+n_{-1})!}$ 之积，可得：

$$\frac{1}{2\Lambda+1}\left(PP\Lambda\|T^{\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1})}\|n_1+n_2,n_1+n_2,\frac{1}{2}(n_1+n_2)\right)$$

$$\times\left\langle\frac{1}{2}(n_1+n_2),\frac{1}{2}(n_1+n_2),\frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1}),\frac{-1}{2}(n_{-2}+n_{-1})\right|\Lambda\epsilon\Big\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta\left(\sum_{\mu} n_{\mu} - P\right) \delta(n_1 + n_2 - n_{-2} - n_{-1} - 2\varepsilon)\, \frac{1}{2} \\
&\{1 + (-1)^{P-n_0-2\Lambda}\}(-1)^{\frac{P-n_0-2\Lambda}{2}} \\
&\times \sqrt{\frac{(\Lambda-\varepsilon)!\left(\frac{P-n_0+2\Lambda+2}{2}\right)!}{(2\Lambda+1)!(n_{-2}+n_{-1})!}} \\
&\times \left\langle PP^{\Lambda}_{\varepsilon\Lambda} \middle| 0, n_{-2}+n_{-1}, n_0, \frac{P-n_0-2\Lambda}{2}, \Lambda+\varepsilon \right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

由此及 (4.7) 式有

$$
\begin{aligned}
&\langle PP^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa} | n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2 \rangle \\
&= \delta\left(\sum_{\mu} n_{\mu} - P\right) \delta(n_1 + n_2 - n_{-2} - n_1 - 2\varepsilon)\, \frac{1}{2} \\
&\times \{1 + (-1)^{P-n_0-2\Lambda}\}(-1)^{\frac{P-n_0-2\Lambda}{2}} \sqrt{\frac{(\Lambda-\varepsilon)!\left(\frac{P-n_0+2\Lambda+2}{2}\right)!}{(2\Lambda+1)!(n_{-2}+n_{-1})!}} \\
&\times \left\langle PP^{\Lambda}_{\varepsilon\Lambda} \middle| 0, n_{-2}+n_{-1}, n_0, \frac{1}{2}(P-n_0-2\Lambda), \Lambda+\varepsilon \right\rangle \\
&\times \left\langle \frac{1}{2}(n_1+n_2), \frac{1}{2}(n_2-n_1), \frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1}), \frac{1}{2}(n_{-1}-n_{-2}) \middle| \Lambda\kappa \right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

借助 (4.6) 求得:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle PP^{\Lambda}_{\varepsilon\Lambda} \middle| 0, n_{-2}+n_{-1}, n_0, \frac{1}{2}(P-n_0-2\Lambda), \Lambda+\varepsilon \right\rangle \\
&= \delta\left(\sum_{\mu} n_{\mu} - P\right) \delta(n_1 + n_2 - n_{-2} - n_{-1} - 2\varepsilon) \\
&\cdot \frac{1}{2}\{1 + (-1)^{P-n_0-2\Lambda}\} \frac{1}{\left(\frac{P-n_0+2\Lambda+2}{2}\right)!} \\
&\cdot \sqrt{\frac{(2)^{n_0-1}(2\Lambda+1)!P!(P-2\Lambda)!(P+2\Lambda+2)!(n_{-2}+n_{-1})!}{n_0!(2P+1)!(\Lambda-\varepsilon)!\left(\frac{P-n_0-2\Lambda}{2}\right)!}}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle PP^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa} | n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2 \rangle \\
&= \delta\left(\sum_{\mu} n_{\mu} - P\right) \delta(n_1 + n_2 - n_{-2} - n_{-1} - 2\varepsilon)\, \frac{1}{2}\{1 + (-1)^{P-n_0-2\Lambda}\} \\
&\times \sqrt{\frac{(2)^{n_0-1}P!(P-2\Lambda)!(P+2\Lambda+2)!}{n_0!(2P+1)!\left(\frac{P-n_0+2\Lambda+2}{2}\right)!\left(\frac{P-n_0-2\Lambda}{2}\right)!}} \\
&\times \left\langle \frac{1}{2}(n_{-2}+n_{-1}), \frac{1}{2}(n_{-1}-n_{-2}), \frac{1}{2}(n_1+n_2), \frac{1}{2}(n_2-n_1) \middle| \Lambda\kappa \right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

这就是我们要求的公式. 其中包含 ϵ 的 δ 符号和 C-G 系数保证了 $3\epsilon+\kappa=\sum\limits_{\mu}\mu n_{\mu}$ (角动量投影条件)，因子 $\{1+(-1)^{P-n_0-2\Lambda}\}$ 以及 C-G 系数包含的三角条件都是来自 d_{μ}^{+} 算符的 $SU_2\otimes SU_2$ 张量性质. 由于 $\mu=0$ 的玻色子不贡献 Λ 值而每个 $\mu\neq 0$ 的玻色子贡献 $\frac{1}{2}$，因此总 Λ 值是由 $P-n_0$ 个 $\frac{1}{2}$ 耦合而成的，它当然不能超过 $\frac{1}{2}(P-n_0)$，这就导致 C-G 系数中的三角条件，即 $\frac{1}{2}(n_1+n_2+n_{-1}+n_{-2})=\frac{1}{2}(P-n_0)\geqslant\Lambda$. 其次，当 $P-n_0$ 为偶数时，Λ 为整数，当 $P-n_0$ 为奇数时，Λ 为整数，因此 $P-n_0$ 与 2Λ 之差不能是奇数.

五、结语及讨论

本文从第一类 $|PPO_3\rangle$ 基矢的无迹算符形式 (2.11) 出发，直接求出了 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PP(x)LL\rangle$ 的表达式 (2.46). 同时，我们把第二类基矢 $|PP(y)LL\}$ 表示成第一类基矢的迭加，从而用 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PP(x)LL\rangle$ 的相应的迭加表示出 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PP(y)LL\}$. 关于这种内积表达式中包含的另一种量 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|n_{\mu}\rangle$，本文把它归结为一个 C-G 系数与一些简单因子的积.

让我们把本文求内积 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PPO_3\rangle$ 的方法与前文 (I) 中的方法作一简单的对比. $|PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle$ 与 $|PPO_3\rangle$ 都是没有配对玻色子的基矢，而且 $|PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle$ 与第一类、第二类 $|PPO_3\rangle$ 基矢都有了结构简单的 a_{μ}^{+} 表达式，在求内积 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PPO_3\rangle$ 时如果用前文 (I) 的方法，就是把 $|PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle$ 中的 a_{μ}^{+} 换成 d_{μ}^{+}，但本文的方法是把 $|PPO_3\rangle$ 中的 a_{μ}^{+} 换成 d_{μ}^{+}. 在前一种替换下，$|PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}\rangle$ 被一种简单的态矢量 $C(P,\Lambda)(d_0^{+})^{P-2\Lambda}|2\Lambda,2\Lambda,{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 代替，所求得的内积表达式相当于下式的化简：

$$\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PPO_3\rangle=C(P,\Lambda)\sum_{(n_{\mu})}\langle 2\Lambda,2\Lambda,{}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}|(d_0)^{P-2\Lambda}|n_{\mu}\rangle\langle n_{\mu}|PPO_3\rangle \tag{5.1}$$

后一种替换下，$|PPO_3\rangle$ 被一种简单的态矢量 $|\phi^D\rangle$ 所代替 $\Big($对于第一类基矢，$|\phi^D\rangle$ 是 .22)式中的 $|\phi_{PP(x)LL}^{D}\rangle$，对于第二类基矢则是 $\sum\limits_{x}|\phi_{PP(x)LL}^{D}\rangle\, V_{(x,y)}^{PL}\Big)$，本文求出的公式 46) 及 (3.19) 相当于下式的化简：

$$\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PPO_3\rangle=\sum_{(n_{\mu})}\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|n_{\mu}\rangle\langle n_{\mu}|\phi^D\rangle. \tag{5.2}$$

(5.1) 中用到 $\langle n_{\mu}|PPO_3\rangle$，但不需要 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|n_{\mu}\rangle$. 在 (5.2) 中用到 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|n_{\mu}\rangle$，但不需要 $|PPO_3\rangle$. (5.1) 式及 (5.2) 式的结构都比以 (n_{μ}) 为中间表象的表象变换公式简单. 对类 $|PPO_3\rangle$ 基矢来说，先求出 $\langle n_{\mu}|PPO_3\rangle$ 以便采用前文 (I) 的方法，那是不自然的. 采本文的方法则能很好利用 $|PP(x)LL\rangle$ “结构简单”的特点. 对于第二类基矢，可以借 3] 中的结果求出 $\langle n_{\mu}|PPO_3\rangle$ 从而用 (I) 中的方法求 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PPO_3\rangle$，也可以采用本文第的方法处理. 对于第三类基矢，比较自然的办法是直接引用 [4] 中给出的 $\langle n_{\mu}|PPO_3\rangle$ 照 (I) 中的方法求 $\langle PP_{\epsilon\kappa}^{\Lambda}|PPO_3\rangle$. 如果把第三类基矢也表示成第一类基矢的迭加，当可用本文方法处理.

刘庸同志曾帮助核对本文的一部分公式，特此致谢.

参 考 文 献

[1] 杨泽森，高能物理与核物理，6(1982)，No. 5，在本文中记为 (I).
[2] E. Chacon, M. Moshinsky and R. T. Sharp, *J. Math. Phys.*, 17(1976), 668.
[3] E. Chacon and M. Moshinsky, *J. Math. Phys.*, 18(1977), 870.
[4] S. Szpikowski and A. Gozdz, *Nucl. Phys.*, A340(1980), 76.
[5] 孙洪洲，高能物理与核物理，4(1980)，478.

THE $SU_2 \otimes SU_2$ BASIS AND THE PHYSICAL BASES FOR THE STATE VECTORS OF d-BOSON SYSTEMS AND THE TRACELESS BOSON OPERATORS (II)

YANG ZE-SEN (TSE-SEN YANG)
(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

For obtaining a satisfactory solution to the problem of expressing explicitly the $SU_2 \otimes SU_2$ —— representation wave functions of the existing physical bases a new methed is introduced. The two kinds of the physical bases constructed by Chacon et al., are treated in the text. The method is compared with that of paper (I) in the concluding section.