第5卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 6
1981年11月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1981

Martin-Grosse 能级次序定理的推广

苏汝铿 梁 俊
(复旦大学)

摘 要

本文推广 Martin-Grosse 定理到 $2P$, $3D$ 态,给出了四个决定 $2P$, $3D$ 能级次序的充分条件.

近年来,由于量子色动力学未能成功地解决夸克禁闭问题,因而出现了许多唯象模型. 对于 ψ 粒子和 Υ 粒子,由于 c 夸克和 b 夸克质量较大,用非相对论 Schröndinger 方程讨论比较成功. 但是在 Schröndinger 方程中,夸克禁闭势应采取何种形式,目前仍然人各一说. 因而出现了一系列企图从现有实验结果,如原点波函数[1]、质量标度[2]、能级次序[3],或者从原点波函数和能级数值[4] 来决定夸克势的工作,这相当于量子力学中的反散射问题[5]. 本文将推广 Martin 在 $E_{2S}>E_{2P}$ 时, Grosse 在 $E_{3D}>E_{2S}$ 时关于夸克禁闭势的充分条件的定理[3]至 $2P$, $3D$ 态,并分别给出相应的充分条件.

决定 $2P$ 和 $3D$ 态能级的 Schröndinger 方程是 $(2m=\hbar=1)$

$$-u''-\frac{g^2}{r}u+\frac{2}{r^2}u+V_cu=E_{2P}u, \tag{1}$$

$$-v''-\frac{g^2}{r}v+\frac{6}{r^2}v+V_cv=E_{3D}v. \tag{2}$$

其中 $u=r\phi_{2P}$, $v=r\phi_{3D}$, V_c 是夸克禁闭势,可取为 $V_c=\lambda^2V_c(\lambda r)$, λ 是小参量[3]. 熟知,在 $(0,\infty)$ 中, u, v 无节点,且满足 $u(0)=v(0)=0$, 不仿普遍性,可选 u, v 为正.

引理 1 在 $(0,\infty)$ 区间中, u^2-v^2 有且仅有一个零点.

证: 由波函数归一化条件得 $\int_0^\infty u^2dr=\int_0^\infty v^2dr=1$, $\int_0^\infty(u^2-v^2)dr=0$. 因为 $v\not\equiv u$, 故 u^2-v^2 在 $(0,\infty)$ 中必有零点. 注意到 u, v 为正, $u+v\neq 0$, 因而 u^2-v^2 的零点由 $u-v$ 的零点决定.

以 v, u 分别乘 (1)、(2) 式,相减后由 $0\to r$ 积分得

$$uv'-vu'=\int_0^r\left(\frac{4}{r'^2}+E_{2P}-E_{3D}\right)uvdr'\equiv F(r), \tag{3}$$

这时有两种情况:

1. $E_{2P}\geqslant E_{3D}$

这时(3)式的被积函数恒大于零,因而它在 $0\to r$ 中的积分 $F(r)=uv'-vu'>0$,

本文 1980 年 10 月 24 日收到.

当 $u-v=0$ 时，必有 $u'-v'<0$，因此 u^2-v^2 有且只能有一个零点.

2. $E_{2P}<E_{3D}$

由 (3) 式，显然有 $F(0)=0$；另一方面，由波函数 u, v 的自然边界条件又显然有 $F(\infty)=0$；而且，当 r 足够小时，由 (3) 式可知，$F(r)$ 必为正. 利用这些条件，可以证明在 $(0,\infty)$ 区间内 $F(r)$ 不可能有零点.

用反证法. 如若不然，比方在 $(0,\infty)$ 中 $F(r)$ 有一个零点，由于 $F(0)=F(\infty)=0$，$F(r)$ 又是光滑的，因此在 $(0,\infty)$ 中 $F(r)$ 必有两个极值. 也就是说 $F'(r)$ 即 $\left(\frac{4}{r^2}+E_{2P}-E_{3D}\right)uv$ 有两个零点，注意到 $u>0$，$v>0$，$\frac{1}{r^2}+E_{2P}-E_{3D}=0$ 只有一个正根，因而这是不可能的. 故 $F(r)$ 在 $(0,\infty)$ 中不可能有零点，再由 $F(r)$ 在 $r\to 0$ 时为正可知，在 $(0,\infty)$ 中 $F(r)$ 必恒大于零. 因此，同样有 $u-v=0$ 时 $u'-v'<0$，u^2-v^2 有且只有一个零点. 得证.

引理 2　定义函数 $I(r)=\int_r^\infty \frac{u^2-v^2}{r'}dr'$，$J(r)=\int_r^\infty I(r')dr'$，则必有 $J(r)<0$ $(\forall r)$.

证：当 $r\to 0$ 时，束缚势的作用显然应远小于库仑势的作用，因而方程 (1)、(2) 应和库仑势有相同的渐近行为，即 $u|_{r\to 0}\sim r^2$，$v|_{r\to 0}\sim r^3$，$(u^2-v^2)|_{r\to 0}>0$，又据引理 1，u^2-v^2 在 $(0,\infty)$ 中只有一个零点，选为 r_1，因此当 $r<r_1$ 时，$u^2-v^2>0$，$r>r_1$ 时，$u^2-v^2<0$（如图 1 所示).

$$
\begin{aligned}
\therefore I(0)&=\int_0^\infty \frac{u^2-v^2}{r}dr\\
&=\int_0^\infty (u^2-v^2)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)dr\\
&=\int_0^{r_1}(u^2-v^2)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)dr+\int_{r_1}^\infty (u^2-v^2)\\
&\quad\times\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)dr>0. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

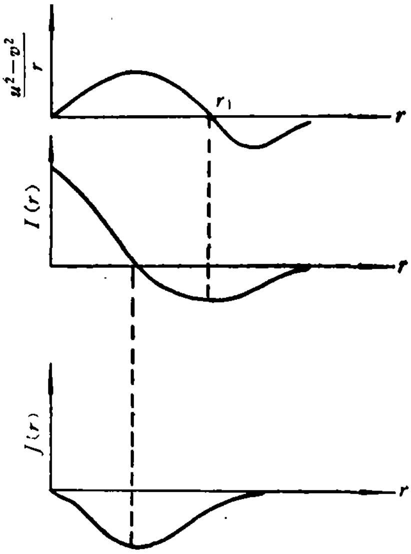

图　1

此外又有 $I(\infty)=0$，注意到 $I(r)$ 的极值对应于 u^2-v^2 的零点 r_1 按引理 1 可知 $I(r)$ 有且只有一个极值，即 $I(r_1)<0$，所以 $I(r)$ 在 $(0,\infty)$ 区间中只改变一次符号.

又有 $J(\infty)=0$

$$
\begin{aligned}
J(0)&=\int_0^\infty I(r')dr'=\int_0^\infty dr'\int_{r'}^\infty \frac{u^2-v^2}{r''}dr''\\
&=\int_0^\infty dr''\int_0^{r''}\frac{u^2(r'')-v^2(r'')}{r''}dr'=\int_0^\infty (u^2-v^2)dr=0. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

而在 r 很大时，由 $I(r)$ 的特性知 $I(r)<0$，所以 $J(r)=\int_r^\infty I(r')dr'<0$，综合上述

可知在 $(0,\infty)$ 中 $J(r)<0$，得证。

引理 3　定义函数 $K(r)=\int_r^\infty(u^2-v^2)r'^2dr'$，则必有 $K(r)<0(\forall r)$.

证：$K(\infty)=0$。

$$K(0)=\int_0^\infty(u^2-v^2)r^2dr=\int_0^\infty(u^2-v^2)(r^2-r_1^2)dr$$
$$=\int_0^{r_1}(u^2-v^2)(r^2-r_1^2)dr+\int_{r_1}^\infty(u^2-v^2)(r^2-r_1^2)dr<0, \tag{6}$$

且 $K(r)$ 只是在 u^2-v^2 的零点 $r=r_1$ 处有一个极值，而 $K(r_1)<0$，所以在 $(0,\infty)$ 中必有 $K(r)<0$. 得证.

引理 4　定义函数 $H(r)=\int_r^\infty(u^2-v^2)dr'$；$G(r)=\int_0^r H(r')r'dr'$，则必有 $G(r)<0(\forall r)$.

证：$H(\infty)=0$，$H(0)=0$，且 $H(r)$ 只在 $r=r_1$ 处有一极值，而 $H(r_1)<0$ 所以 $H(r)<0(\forall r)$. 再由 $G(r)$ 的定义立即可得 $G(r)<0(\forall r)$，得证.

定理 1　定义 $\varepsilon=E_{2P}-E_{3D}$，$W_c(x)=x\left(2V_c+x\frac{dV_c}{dx}\right)$，则若满足 $W_c(0)=0$，且 $\frac{d^2W_c}{dx^2}\gtreqless 0$ 时，相应地必有 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\lesseqgtr 0$.

证：利用 Feynman-Hellman 定理[6]及维里定理可得[3]

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda}=\int_0^\infty\frac{u^2-v^2}{r}W_c(\lambda r)dr.$$

由引理 2 及 $W_c(0)=0$，得

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda}=-\int_0^\infty W_c(\lambda r)dI(r)=-W_cI(r)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty I(r)\frac{dW_c}{dr}=-\int_0^\infty\frac{dW_c}{dr}dJ(r)$$
$$=-\frac{dW_c}{dr}J(r)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty J(r)\frac{d^2W_c}{dr^2}dr=\int_0^\infty J(r)\frac{d^2W_c}{dr^2}dr. \tag{7}$$

由于 $J(r)<0$，当 $\frac{d^2W_c}{d(\lambda r)^2}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2W_c}{dr^2}\gtreqless 0$ 时，由 (7) 式得 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\lesseqgtr 0$，得证.

由于在 $\lambda=0$ 时，$V_c=\lambda^2V_c(\lambda r)=0$，方程 (1)、(2) 化为库仑势作用下的运动方程，这时熟知有 $\varepsilon=E_{2P}-E_{3D}<0$. 于是成立：

推论 1　对 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda}<0$ 的情况，当 λ 从 0 增到 1 时，$d\lambda>0$，$d\varepsilon<0$，因此对任何 λ 恒有 $\varepsilon<0$，即 $E_{2P}<E_{3D}$.

推论 2　对 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda}=0$ 的情况，对任何 λ 恒有 $\varepsilon=0$，即 $E_{2P}=E_{3D}$.

推论 3　对 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda}>0$ 的情况，在 λ 从 0 增加到 1 的过程中，如 Grosse 所指出，可能存在某一值 λ_0 使 $E_{2P}=E_{3D}$，$\varepsilon=0$；而当 $\lambda<\lambda_0$ 时，$E_{2P}<E_{3D}$；$\lambda>\lambda_0$ 时，$E_{2P}>E_{3D}$.

定理 2　令 $U(x)=2V_c(x)+x\frac{dV_c(x)}{dx}(\forall x)$，则若满足 $0\leqslant\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}<\infty$ 及

$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\right) < 0$ 时，必有 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} < 0$；反之，若满足 $-\infty < \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\frac{dU}{dr} \leqslant 0$ 及 $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\right) > 0$ 时，必有 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} > 0$.

证：同定理 1，由 Feynman-Hellman 定理及维里定理有

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \int_0^\infty (u^2 - v^2)U(\lambda r)dr.$$

由引理 4，有

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{d\lambda} &= -U\cdot H(r)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{dU}{dr}H(r)dr = \int_0^\infty H(r)dU = \int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{dU}{dr}dG(r)\\ &= \frac{1}{r}\frac{dU}{dr}G(r)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty G(r)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\right)dr.\end{aligned} \tag{8}$$

$\because G(r) < 0$，$\therefore$ 当满足 $0 \leqslant \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\frac{dU}{dr} < \infty$ 时，(8) 式的第一项为负；当满足 $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\right) < 0$ 时，第二项亦为负，得 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} < 0$. 反之，若满足 $-\infty < \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\frac{dU}{dr} \leqslant 0$ 及 $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\right) > 0$ 时，(8)式的两项均为正，$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} > 0$. 得证.

定理 3　若 $\frac{d}{dr}\left(\frac{U(r)}{r^2}\right) \gtreqless 0(\forall r)$，且 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{U(r)}{r^2} = 0$，则必有 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} \lesseqgtr 0$.

证：由引理 3 得

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{d\lambda} &= \int_0^\infty (u^2 - v^2)U(\lambda r)dr = -\int_0^\infty \left(\frac{U}{r^2}\right)dK(r)\\ &= -\frac{U}{r^2}K(r)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty K(r)\frac{d}{dr}\left(\frac{U}{r^2}\right)dr = \int_0^\infty K(r)\frac{d}{dr}\left(\frac{U}{r^2}\right)dr.\end{aligned} \tag{9}$$

由于 $K(r) < 0$，由(9)式得 $\frac{d}{dr}\left(\frac{U}{r^2}\right) \gtreqless 0(\forall r)$ 时 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} \lesseqgtr 0$，得证.

定理 4　若 $\frac{dU}{dr} \gtreqless 0(\forall r)$，则 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} \lesseqgtr 0$.

证：由引理 4，注意到 $H(0) = 0$，$H(\infty) = 0$，$H(r) < 0$ 得

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \int_0^\infty (u^2 - v^2)U(\lambda r)dr = -\int_0^\infty U(\lambda r)dH(r) = \int_0^\infty H(r)\frac{dU}{dr}dr. \tag{10}$$

当 $\frac{dU}{dr} \gtreqless 0$ 时，显然有 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} \lesseqgtr 0$，得证.

结论：1. 定理 1、2、3、4 分别表示 $2P$ 和 $3D$ 态能级次序的充分条件，满足其中任何一个，都能对 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda}$ 即 E_{2P} 和 E_{3D} 的次序作出决定的论断.

2. 对于 Quigg，Rosner[7] 的对数束缚势 $V_c = \ln r$，显然满足定理 1、2、4 中 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} < 0$ 的要求，按推论 1，对任何 λ 均有 $\varepsilon < 0$，即 $E_{2P} < E_{3D}$，这与文献[7]用计算机作数值计算所得的结果相符.

3. 对于束缚势 $V_e = r^\alpha(\alpha > 0)$，不难证实，它同时满足定理1和定理4中 $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} < 0$ 的要求，因而必有 $E_{2P} < E_{3D}$. 在 $0 < \alpha < 2$ 时，这个结果与 Martin-Grosse $E_{3D} > E_{2S} > E_{2P}$ 的结果一致. 对 $\alpha > 2$ 的情况，由于 Grosse 定理对 λ 的限制，不能得出 $E_{3D} > E_{2S}$ 的结论，亦即不能从 Martin-Grosse 原来的工作中给出 $E_{3D} > E_{2P}$，本文弥补了这个缺憾.

参 考 文 献

[1] A. Martin, *Phys. Lett.*, **70B**(1977), 192; V. Gupta, R. Rajaraman, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 697.

[2] A. K. Common, *Nucl. Phys.*, **B162**(1980), 311; C. N. Leung, J. L. Rosner, *J. Math. Phys.*, **20** (1979), 1435; A. Martin, CERN. Ref, T. H 2843(1980).

[3] A. Martin, *Phys. Lett.*, **67B**(1977), 330; H. Grosse, *Phys. Lett.*, **68B**(1977), 343.

[4] H. B. Thacker, C. Quigg, J. L. Rosner, *Phys. Rev.*, D18(1978), 274; 287.

[5] K. Chadan and P. C. Sabatier, "Inverse Problems in Quantum Scattering Theory", Springer-Verlag (1977).

[6] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **56**(1939), 340; H. Hellman, "Einführung in Die Quantenchemie" Deuticke Leipzig (1937).

[7] C. Quigg, J. L. Rosner, *Phys. Reports*, **56**(1979), 169.

AN EXTENSION OF MARTIN-GROSSE THEOREM ON THE ORDER OF LEVELS

SU RU-KENG　　LIANG JUN

(*Fudan University*)

ABSTRACT

The Matin-Grosse, theorem is extended to the energy levels of $2P$ and $3D$ states. Four sufficient conditions are given for determining the order of $2P$ and $3D$ levels.