

独立 α 粒子模型下的电子散射

李清润 陈生忠 赵恩广

(中国科学院高能物理研究所) (中国科学院理论物理研究所)

摘 要

本文提出了一个轻原子核的 α 结构模型。其物理图象清楚,波函数简单,便于使用。特别是应用到多次散射问题,各次散射项均可积分。应用得到的波函数,可以很好地符合电子散射实验。结果表明,目前人们常用的刚体 α 粒子模型,其图象相当于本文模型的经典对应。

一、引 言

轻原子核表现出结团结构,特别是 α 粒子的结团结构现象,已经被很多实验所揭示。对于这一问题的研究,实验上和理论上都进行了大量的工作,并取得了一定的进展。在现有的理论中,最通行的是“共振群模型”^[1]。它的优点,在于其理论出发点的“基本性”,及其应用范围的“广泛性”。但由此而带来的是它的波函数的复杂性,很不便于使用。此外,它与实验的符合程度,在某些情况下,也不如其它较为简单的半唯象性质的模型。因此,在某些核碰撞过程的计算中,当需要原子核的 α 粒子结构波函数时,最常使用的倒是刚体 α 粒子模型^[2]。这个模型的优点是,它的结构简单,波函数较易使用。此外,由于它的一些基本参数是由实验定出来的,因而由这一模型去计算其它数据时,一般都和实验较为接近。但该模型,是一个经典图象的模型。这种模型的波函数虽然较为简单,但在某些核碰撞过程的计算中,例如在多次散射问题中,高次散射项的计算,将遇到困难。

本文提出一种轻原子核的 α 粒子结构模型,即独立 α 粒子运动模型。其物理图象清楚,波函数简单、便于应用。特别是应用到多次散射问题时,各次散射项均可积分,并不发生刚体 α 粒子模型所出现的困难。这一模型能很好符合电子散射实验。本文提出的模型是量子的,对结果的分析表明,刚体 α 粒子模型相当于本模型的经典对应。

二、独立 α 粒子模型

对于中子数 $N = 2m$ 和质子数 $Z = 2m$ 的原子核,可以认为它们是由较为稳定的 α 粒子组成。由结合能可以知道,各个 α 粒子之间的相互作用,比 α 内部的核子间的相互作用为弱。我们假定:(i) 每一 α 粒子受到核内其余 α 粒子的作用,可以用一个平均场来

等效；(ii) 核内的 α 粒子被当做玻色子处理。这等于忽略属于不同 α 粒子的核子间的交换反对称性。

做了上面的假定之后，显然，关键的问题是： α 粒子的平均场是什么？目前，关于 α 粒子间的两体相互作用的了解远不充分，因此，用 Hartree-Fock 一类的程序，去从理论上导出这一平均场的做法，不见得是可取的。我们将采取符合实验的半唯象的途径，来达到目的。

我们假定，平均场是一球形的中心场（这是原子核物理中最普遍使用的；但与核子情况不同，这里显然不存在自旋轨道耦合力），在此场中， α 粒子的波函数 $\Psi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ ，应满足下述方程

$$H^{(\alpha)}\Psi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = E_i\Psi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$H^{(\alpha)} = \frac{p^2}{2m_\alpha} + V(r). \quad (2)$$

量子数 i 代表 $\{n, l, m\}$ ， n 是主量子数， l 是轨道量子数， m 是轨道角动量在 Z 方向的投影， $V(r)$ 为 α 粒子的平均场。

由 (2) 可知，波函数可分解成

$$\Psi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3)$$

由于 $V(r)$ 的具体形式还不知道，所以， $R_{nl}(r)$ 用谐振子径向波函数来展开

$$R_{nl}(r) = \sum_{n'} C_{n'l}^{(n)} O_{n'l}(r). \quad (4)$$

$O_{n'l}(r)$ 为谐振子径向波函数， n' 为主量子数。下面，先研究原子核的基态波函数。在独立 α 粒子模型下，原子核包含 μ 个 α 粒子的基态波函数为

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_\mu) = \Psi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1)\Psi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}_2)\dots\Psi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}_\mu), \quad (5)$$

$$\Psi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = R_{00}(r)Y_{00}(\theta, \varphi), \quad (6)$$

$$R_{00}(r) = \sum_{n'} C_{n'0}^{(0)} O_{n'0}(r). \quad (7)$$

$C_{n'0}^{(0)}$ 将由实验来决定。如所周知，检验波函数的最好实验是电子散射。本文将采用符合电子散射实验的办法，来确定 $C_{n'0}^{(0)}$ 。

三、电子散射和电荷形状因子

由于人们对电磁相互作用的了解已经相当清楚，所以，电子散射实验被认为是研究原子核性质的一个十分重要而精确的手段。在玻恩近似下，一个 Dirac 电子被原子核散射时，其弹性散射截面可表示为^[3]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q})|^2. \quad (8)$$

其中， $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}$ 是著名的 Mott 截面：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{Ze^2}{2E}\right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \theta/2}. \quad (9)$$

$F(\mathbf{q})$ 是原子核的电荷形状因子,

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (10)$$

$\rho(\mathbf{r})$ 是原子核内质子的密度分布, 满足归一化条件

$$\int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (11)$$

如果已知原子核的波函数, 就可以通过 (8)、(9)、(10)、(11) 各式, 计算出散射截面, 然后和实验直接进行比较.

在本文中, 我们仅限于讨论轻原子核 ^{12}C 和 ^{16}O 的情况, 所以, 玻恩近似的适用条件 $Z/137 \ll 1$, 可以认为满足得很好. 如果把原子核看成是由 α 粒子组成的, 则整个原子核的形状因子, 可以分解为 α 粒子本身的形状因子和原子核内 α 粒子分布的形状因子的乘积, 即

$$F(\mathbf{q}) = f(\mathbf{q}) F_a(\mathbf{q}). \quad (12)$$

$f(\mathbf{q})$ 为 α 粒子的形状因子, $F_a(\mathbf{q})$ 是原子核的 α 粒子分布的形状因子.

$$F_a(\mathbf{q}) = \int |\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \cdots \mathbf{r}_\mu)|^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_\mu. \quad (13)$$

利用 (5), 可得

$$F_a(\mathbf{q}) = \int |\Psi_0^{(\alpha)}(\mathbf{r})|^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (14)$$

从 (6) 和 (7), 很容易得到

$$F_a(\mathbf{q}) = \frac{1}{q} \int_0^\infty r \sin qr R_{00}^2(r) dr. \quad (15)$$

$R_{00}(r)$, 如 (7) 所示, 是用谐振子的径向波函数来展开的. 取多少项为合适, 应按如下的原则: (i) 能够很好地符合实验所给出的形状因子; (ii) 在基本上满足 (i) 的条件下, 选取的项数应该越少越好, 尽量让波函数简单, 便于应用.

我们的实际计算表明, 如只取展开式的第一项, 则不可能给出实验的形状因子; 但是, 如果取到第二项, 则已经能够很好地给出符合实验的结果. 因此, 我们假定, $R_{00}(r)$ 取如下的形式

$$R_{00}(r) = \sin \frac{\varphi}{2} O_{10}(r) + \cos \frac{\varphi}{2} O_{20}(r). \quad (16)$$

$$(0 \leq \varphi \leq 360^\circ)$$

$O_{10}(r)$, $O_{20}(r)$ 分别为谐振子的 $1s$ 态和 $2s$ 态的径向波函数,

$$O_{10}(r) = 2(a^6\pi)^{-1/4} e^{-r^2/2a^2}, \quad (17)$$

$$O_{20}(r) = \sqrt{\frac{8}{3}} (a^6\pi)^{-1/4} \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] e^{-r^2/2a^2}.$$

代入 (15), 最后得到

$$F_a(q) = \left\{ 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cos \phi - \frac{\sqrt{6}}{12} \sin \phi \right) (aq)^2 \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{48} \cos \phi \right) (aq)^4 \} e^{-a^2 q^2/4}. \tag{18}$$

为最后求得整个原子核的形状因子，还需要知道 α 粒子本身的形状因子 $f(q)$ ，为了排除不确定性，我们直接选取从实验得到的 $f(q)$ ^[4]。

四、结果和讨论

1. 通常在使用壳模型波函数计算形状因子的时候，应该考虑质心运动的修正。我们这里使用的 α 粒子波函数，其性质和一般壳模型波函数是类似的，因此，我们在计算中，也采取了同样的办法，来处理质心运动问题^[3]。

此外，由于 α 粒子本身的形状因子 $f(q)$ 直接取自实验，所以也就自动地包括了质子内部电荷分布的改正因子。

本文计算了 ¹²C 和 ¹⁶O 的形状因子 $F(q)$ 。结果如图 1 和图 2 所示。数据取自 [5,6]。

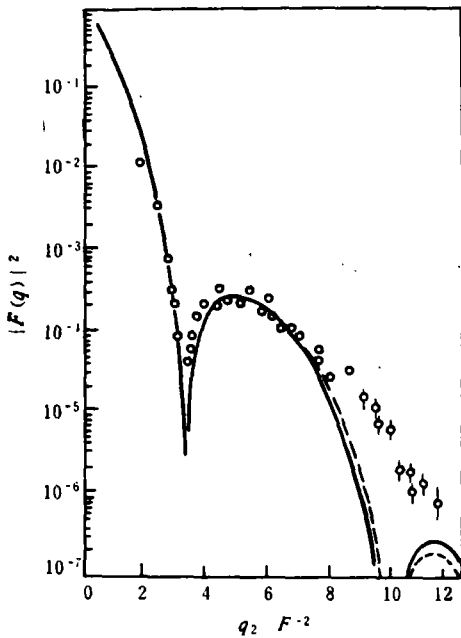


图 1 ¹²C 的形状因子
—— [6] 的计算结果;
—— 本文计算结果

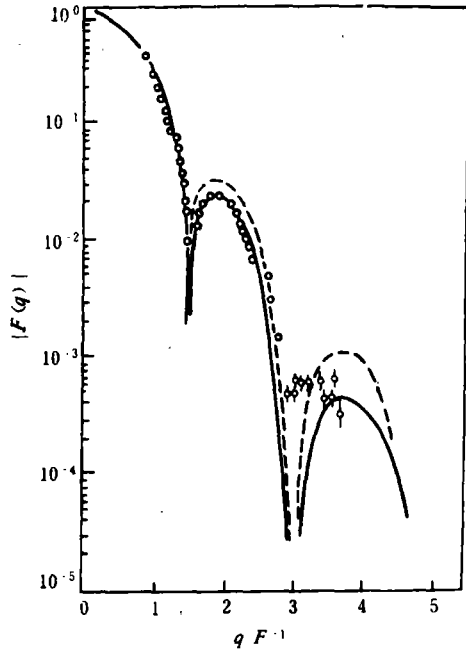


图 2 ¹⁶O 的形状因子
—— [5] 的计算结果;
—— 本文计算结果

(由于我们直接利用引文中的原图，所以两个图中量的标度不尽相同。)为了比较，图中也给出了刚体 α 粒子模型的计算结果。

从图中可以看出，在直到 $q \approx 3F^{-1}$ 以前的区域内，理论和实验符合得很好。在 $q > 3F^{-1}$ 时，符合较差。我们的理论与实验符合的程度，跟用壳模型波函数加进核子关联的多参数(有的多达七个可调参数)计算的结果，基本是同一个水平^[7]。另外，从图 1 和图 2 还可以看出，本模型和刚体 α 粒子模型给出了基本上相同的结果，对 ¹⁶O 核而言，本文结

果更好一些。

2. 刚体 α 粒子模型相当于本文模型的经典对应。

刚体 α 粒子模型的假设是：核内的 α 粒子被配置在具有某些对称性质的位置上，各个 α 粒子之间的相对位置保持固定不变。例如， ^{12}C 核的三个 α 粒子固定在一个正三角形的三个顶点上； ^{16}O 的四个 α 粒子，固定在一个正四面体的四个顶点上。三角形和四面体的边长保持不变，作为参数，由电子散射实验来确定。对应于基态时，这个三角形或四面体，在空间各向同性地在转动。显然，这一模型对应的是经典的物理图象。与此十分不同，本文的模型，则假定， α 粒子在一个平均场作用下，“自由”地运动。这两个看起来十分不同的模型，却给出了如此相同的结果！这就发人进一步深想，它们之间是否存在着更深一层的联系？下面，让我们来探寻这一问题的解答。

从 (16)， $R_{00}(r) = \sin \phi / 2 O_{10}(r) + \cos \phi / 2 O_{20}(r)$ ，当把 ϕ 做为可调参数变动时，发现，当 ϕ 在 270° 附近时，理论曲线和实验曲线符合得很好。由此得到的径向波函数是

$$R_{00}(r) = \frac{\sqrt{2}}{2} (O_{10}(r) - O_{20}(r)). \tag{19}$$

其中两个谐振子波函数 $1s$ 态和 $2s$ 态的位相，正好相反，因此产生中心区域的抵消效应。 $R_{00}^2(r)$ 的曲线如图 3 所示。

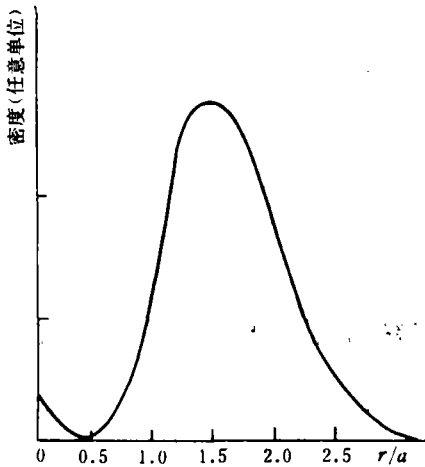


图 3 $R_{00}^2(r)$ 的分布纵坐标的单位任意，横坐标以 r/a 为单位

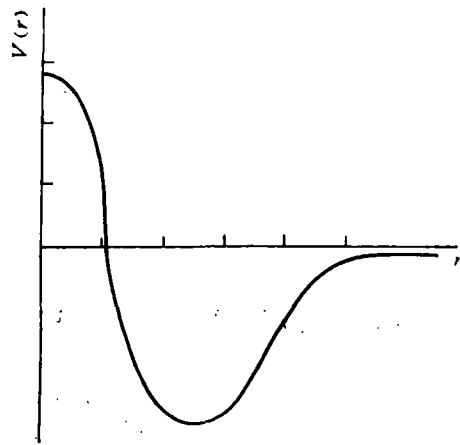


图 4 原子核中 α 粒子平均场的示意。单位任意

由图看出，我们的模型中， α 粒子是分布在一个具有扩散密度的球壳层的空间区域内。而刚体 α 粒子模型所给出的 α 粒子，则分布在一个没有厚度的球面上。可见，刚体 α 模型，其物理图象确实相当于本模型的经典对应。

3. 我们只从简单的几点假设出发，得到了一个模型波函数，并由实验定出了它仅有的两个参数值。用这个波函数，算出的 α 粒子的密度分布所反映的物理本质是： α 粒子间有排斥心效应。这种效应，早已被别的实验现象所证实。因此可见，我们的模型，确实反映了某种物理实质。

从图 3 中波函数的分布形状，可以推测 α 粒子的平均势阱 $V(r)$ 的形状，应该是一个

具有软心的势阱,其大概形状,如图4所示。

对于这种形状的势阱的动力学方程的求解工作,我们正在进行之中。求解的结果,将使波函数中的参量和位阱形状的参量,联系起来。

4. 引言中已经提到过,由于刚体 α 粒子模型波函数较为简单,常被用在某些核反应计算中。例如,用在把核内 α 粒子做为散射中心的多次散射理论中^[8,9]。但是,它通常要遇到多重积分难以积出的困难,往往要做进一步的近似。而在 α 粒子数目增多的情况下,例如四个和四个以上的情况,则积分变得很难处理。

而本模型所给出的波函数,是高斯型的,特别适用于多次散射的计算,各次碰撞项都可以解析地积分。本模型已被应用在强子-核的散射问题中^[10],结果和实验符合得很好。这说明我们的波函数,确是反映了某些物理实质。

参 考 文 献

- [1] Y. C. Tang, M. le Mere and D. R. Thompson, *Phys. Reports*, 47(1978), 169.
- [2] E. V. Inopin and B. I. Tishchenko, *Soviet Phys. JETP*, 11(1960), 840.
- [3] H. Überall, "Electron Scattering from complex Nuclei", (Academic Press, New York and London 1971).
- [4] R. F. Frosch et al., *Phys. Rev.*, 160(1967), 874.
- [5] L. J. Medonal et al., *Phys. Rev.*, C1(1970), 2156.
- [6] 同(3) p. 340 及相应参考文献。
- [7] I. Sick et al., *Nucl. Phys.*, A150(1970), 631.
- [8] I. Ahmad, *Phys. Lett.*, 36B(1971), 301.
- [9] A. N. Antonov, et al., *Soviet T. Nucl. Phys.*, 16(1973), 38.
- [10] 李清润、陈生忠、赵恩广, *高能物理与核物理*, 5(1981), 第6期。

THE INDEPENDENT α PARTICLE MODEL OF LIGHT NUCLEI

LI QING-RUN CHEN SHENG-ZHONG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ZHAO EN-GUANG

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

An α particle model of light nuclei is proposed. The physical picture of the model is clear, its wave functions are simpler and convenient for some applications. When it is used in the problems of multiple scattering, each term in the series of the multiple scattering expansion can be integrated out analytically. The experiments of elastic electron scattering can be well fitted by using the model wave functions. The investigations of the model indicate that the usual rigid α particle model is the classical homologue of our model.