第5卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 4
1981年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1981

相对论等时方程(I)

阮图南 朱熙泉 何祚庥 庆承瑞
(中国科学技术大学) (中国科学院理论物理研究所)
赵维勤
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

对给定的 Bethe-Salpeter 方程,指出了它的不可约核的一个唯一确定的重新排列. 这个重排列核同时使得等时波函数和等时散射振幅满足自封闭方程. 方程不含有任何非物理自由度,是 Schrödinger 方程和 Lippmann-Schwinger 方程的相对论推广. 给出了单光子交换所决定的等时位势. 所有结论可以完全直接地推广到正反粒子体系.

一、引 言

多粒子体系的相对论束缚态方程是自 Dirac 方程发现以来不断探讨中的一个问题. 解决这个问题的困难不仅要有一个相对论的协变形式,尤其要考虑到真空背景场的影响. 1950年 Bethe 和 Salpeter 利用 Feynman 场论取得了一个突破[1]. 对两个粒子的体系, B-S 引入下述形式波函数

$$\psi_{p\zeta}(x_1, x_2) = \langle O | T\psi(x_1)\psi(x_2) | p\zeta \rangle, \tag{1.1}$$

并导出这一波函数满足的微分积分方程. 但是, B-S 方程存在一些熟知的困难: 例如存在毫无物理意义的反常解,即鬼态. 在梯形近似下双粒子中一个粒子的质量趋于无限时,并不归结为通常外场中的 Dirac 方程或 Klein-Gordon 方程. 这些反常出现的原因在于(1.1)中包含没有物理意义的自由度——相对时间 $t = t_1 - t_2$[2]. B-S 方程中存在描述这些非物理自由度运动的算子. 这不仅使方程没有正确的物理极限,而且使它的解多出一个描述该自由度激发的量子数 K.

值得较深入探讨的一个问题是: 什么是复合粒子的物理波函数? 形成复合粒子的一个必要条件是在任一时刻必须同时有两个粒子处在邻域. 如果在一个时刻只存在一个粒子,在另一个时刻又只存在另一个粒子,这很难称为复合粒子体系. 当然,"同时"是对特定坐标系而言的,例如与复合粒子质心运动相对静止的坐标系. 而在一般的多时框架下给出复合粒子波函数时,我们说仅当两个粒子的间隔为类空时才有物理意义. Dirac 在用 Hamiltonian 方法建立多体相对论方程时,上述观点得到了充分的反映[3]. 他指出: 为使多时方程组是相容的,多时必须是不完全独立而受到某种约束,这种约束条件反映了任何两个粒子的间隔必须类空,或者说仅当两个粒子间隔是类空时,物理波函数才有定义. 这

本文1980年3月5日收到.

样的多体物理波函数首先是在量子力学中引进的. 应用二次量子化的语言，等时的薛定格波函数可以记作

$$\chi_{p\zeta}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \langle O|\psi(t\boldsymbol{x}_1)\psi(t\boldsymbol{x}_2)|\boldsymbol{p}\zeta\rangle, \tag{1.2}$$

与 (1.1) 比较一下，(1.2) 也是等时条件下的 B–S 波函数. 让我们定义在质心系等时的 B–S 波函数：

$$\hat{\psi}(x_1, x_2) = \delta(t_1 - t_2)\langle O|T\psi(x_1)\psi(x_2)|\boldsymbol{O}\zeta\rangle, \tag{1.3}$$

经过特殊洛仑兹变换，(1.3) 的协变形式是

$$\hat{\psi}(x_1, x_2) = \delta\left(\frac{px}{M}\right)\langle O|T\psi(x_1)\psi(x_2)|\boldsymbol{p}\zeta\rangle. \tag{1.4}$$

这里 $x = x_1 - x_2$，M 是束缚态质量，p 是两体系的四动量. 比较 (1.1) 和 (1.4) 二者相差一个类时部分. 也就是说 B–S 波函数中包含了一个非物理部分，它定义在两个粒子的类时间隔上[4].

为了克服 B–S 方程中存在非物理自由度的缺点，促使许多人探求没有相对时间的或其他三维形式的相对论复合粒子运动方程. 可以大致地把这些工作分成两类. 第一类工作是从散射振幅或四点 Green 函数积分方程出发的[5–9]. Logunov 和 Tavkhelidze[5] 在 1963 年的工作是相对最早的，此后的一个重要发展属于 Blankenbecler 和 Sugar[6]. 所有这些工作的基本思想如下：由于只有在物理质壳上的散射振幅才是有物理意义的，因此总允许定义各种三维传播子，借此对 B–S 不可约序列进行重新排列，使得散射振幅满足一个三维方程，但不改变物理质壳上的值. 这种工作的优点是：只要三维传播子选得合适，方程可以变得十分容易求解(例如 Todorov[7]). 但是这种三维传播子的选取包含很大的人为性. Logunov[5] 选取的是两点自由 Feynman Green 函数，Blankenbecler-Sugar[6] 选取的是两个粒子在壳而它们的质心能量离壳的 Green 函数；Gross[8] 选取单粒子离壳 Green 函数；Todorov 按照最小离壳方式选取 Green 函数等等. 除了所谓弹性么正条件和非相对论极限两条原则外，选取方式实际上有无穷多种. 这使得相应的三维波函数的意义变得非常模糊，同时这些波函数与 Feynman 场论的关系变得极其复杂. 可是 B–S 波函数尽管包含一个非物理部分，但与 Feynman 场论的关系是十分明了的，见 (1.1). 1968 年 Kadyshevsky[9] 从老式微扰论的协变形式出发得到了一个极有意义的三维 Green 函数选取. 但就其不可约图的复杂和重正化手续的困难而言，使其完全丢失了 Feynman 场论的优点.

第二类三维相对论方程的工作是直接从波函数的 B–S 方程出发的. 早在 1955 年 Królikowski 和 Rzewushi[10] 曾经从 B–S 波函数的方程中分离出一个等时波函数的封闭方程. 但是，方程的位势是 B–S 不可约核的极为复杂的双重排列. 并且没能讨论相应的散射振幅所满足的方程. 1975 年 Rizov 和 Todorov[11] 企图从推迟型 B–S 方程出发推导一个等时波函数所满足的方程，但由于他们推导中的错误，结果是不正确的[12]. 尽管由于这些工作存在缺点和错误，但仍是值得发展的方向. 因为正如前面讨论物理波函数时所指出的那样，B–S 波函数的缺点是包含一个非物理的类时部分. 所以，一个直接的途径是从 B–S 方程中分离出等时波函数和散射振幅所满足的封闭方程. 并且与 B–S 情况一样，这些等时波函数和散射振幅与 Feynman 场论有明确的关系. 这样既克服了 B–S 方程

的缺点，又保留了 Feynman 场论的优点。

以下的工作表明：对给定的 B-S 方程，对其不可约核存在一个完全唯一的重排列，使得等时 B-S 波函数以及等时 B-S 散射振幅满足一个封闭方程。方程不再含有任何非物理自由度或鬼态解。等时波函数、散射振幅和新的不可约核与 Feynman 场论均有明确关系，这就十分便于理论重正化和协变化，也便于量子化，建立新的复合粒子量子场论。最后这个方法能直接推广到正反粒子体系、多粒子体系和不同自旋粒子构成的复合粒子体系。

应该指出的是从 B-S 波函数的非物理类时部分出现的原因来看，这个结果是不难理解的。在 Feynman 场论中，协变化是通过引入编时乘积即扩大时间积分区域而实现的。因此在利用 Feynman-Dyson 展开构造积分方程时，也不得不使波函数和散射振幅在被扩大的类时区域有所定义。如果我们使 B-S 不可约核进行一次重排列，使它仅对等时或类空才有意义，那就自然可以得到一个等时或类空波函数所满足的方程。

在第二节我们给出这个重排列和等时波函数所满足的方程，并讨论等时波函数的正交归一条件。在第三节中讨论等时自由 Green 函数必须满足的边界条件及其形式，借此导出等时散射振幅的积分方程。在第四节中给出等时波函数和散射振幅及其方程的傅氏变换，特别指出总能在壳的等时散射振幅与在质壳的 B-S 振幅等价。并给出了等时不可约核的例子——单光子交换位。最后，在第五节中指出对正反粒子体系全套手续可以照搬。正文内所用到的单粒子 Green 函数及其性质汇集在附录中。

二、相对论等时波函数的方程

两个粒子的 B-S 波函数 (1.1) 满足下列方程

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_0(x_1, x_2) + \int G_0(x_1x_2, y_1y_2)I(y_1y_2, z_1z_2)\psi(z_1z_2)d^4(y_1y_2, z_1z_2). \quad (2.1)$$

这里，ψ_0 是两个自由粒子波函数的乘积

$$\psi_0(x_1x_2) = u_1(p_1)u_2(p_2)e^{-ip_1x_1-ip_2x_2}. \quad (2.2)$$

其中符号的意义可见附录。I 是不可约图总和，G_0 可以是各种边条件的单粒子自由 Green 函数的乘积。为今后方便，定义

$$G_0^R(x_1x_2; y_1y_2) = iS_1^R(x_1 - y_1)\beta_1S_2^R(x_2 - y_2)\beta_2, \quad (2.3)$$

$$G_0^F(x_1x_2; y_1y_2) = iS_1^F(x_1 - y_1)\beta_1S_2^F(x_2 - y_2)\beta_2. \quad (2.4)$$

其中 S_i^R, $S_i^F(i = 1, 2)$ 分别是单粒子推迟和因果 Green 函数。初看起来 (2.1) 右边积分遍及整个八维时空，等时或类空波函数很难形成封闭方程。然而，正如文献 [10] 那样，方程 (2.1) 经过无穷次叠代后仅同类空的自由波函数相联系，换言之，波算子本质上是类空的。借此我们可以定义类空或等时的不可约核，剩下的问题就是确立该不可约核与 B-S 不可约核的关系。以下我们将按照这个程序来完成推导。(2.1) 的叠代形式是

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_0(x_1, x_2) + \int G_0(x_1x_2, y_1y_2)T(y_1y_2, z_1z_2)\psi_0(z_1z_2)d^4(y_1y_2, z_1z_2), \quad (2.5)$$

其中 T 是组态空间的 B-S 散射振幅，满足

$$T(x_1x_2,\ y_1y_2) = I(x_1x_2,\ y_1y_2) + \int I(x_1x_2,\ u_1u_2)G_0(u_1u_2,\ v_1v_2)T(v_1v_2,\ y_1y_2)d^4(u_1u_2,\ v_1v_2). \tag{2.6}$$

现在我们定义等时 B–S 波函数

$$\hat{\phi}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \phi(x_1x_2)\Big|_{x_1^0=x_2^0=t},$$
$$\hat{\phi}_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \phi_0(x_1x_2)\Big|_{x_1^0=x_2^0=t}. \tag{2.7}$$

等时的两个粒子平面波满足下列方程

$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)\hat{\phi}_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = 0, \tag{2.8}$$
$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = i\frac{\vec{\partial}}{\partial t} - H_1(-i\vec{\nabla}_1) - H_2(-i\vec{\nabla}_2). \tag{2.9}$$

其中 $H_i(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{p} + \beta_i m_i (i = 1,2)$. 此外两个时间的平面波 (2.2) 总可以通过时间平移使之等时,即

$$\phi_0(x_1x_2) = \theta(t_1 - t_2)\phi_0(x_1x_2) + \theta(t_2 - t_1)\phi_0(x_1x_2)$$
$$= \int U_2(x_1x_2,\ t\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\hat{\phi}_0(t\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)dt\,d^3(y_1y_2), \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}U_2(x_1x_2;\ t\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) &\equiv \delta(t_1 - t)\delta^3(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1)iS_2^R(t_2 - t,\ \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{y}_2)\beta_2 \\ &\quad + iS_1^R(t_1 - t, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1)\beta_1\delta(t_2 - t)\delta^3(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{y}_2) \\ &= G_0^R(x_1x_2,\ t\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\overleftarrow{D}(t\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2).\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $\overleftarrow{D}$ 是 (2.9) 中的微分反号,即

$$\overleftarrow{D}(t\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) = -i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} - H_1(i\overleftarrow{\nabla}_1) - H_2(i\overleftarrow{\nabla}_2). \tag{2.12}$$

把方程 (2.10) 用于 (2.5) 右边,并令两边等时得

$$\hat{\phi}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \hat{\phi}_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) + \int \{G_0TU_2\}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\hat{\phi}_0(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)dt'd^3(y_1y_2). \tag{2.13}$$

这里符号 $\{AB\cdots C\}(\cdots)$ 的定义是

$$\{AB\cdots C\}(x_1x_2,\ y_1y_2) = \int A(x_1x_2,\ u_1u_2)B(u_1u_2,\ \cdots)\cdots C(\cdots,\ y_1y_2)d^4(u_1u_2,\ \cdots),$$

方程 (2.13) 已经给出了等时波算子. 应用 $\vec{D}$ 算符于 (2.13) 两边,即有

$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)\hat{\phi}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \int \hat{T}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\hat{\phi}_0(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)dt'd^3(y_1y_2), \tag{2.14}$$
$$\hat{T}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = \{U_1TU_2\}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'), \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}U_1(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ x_1'x_2') &= \vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)G_0^{F,R}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ x_1'x_2') \\ &= \delta(t - t_1')\delta^3(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1')iS_2^{F,R}(t - t_2',\ \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2')\beta_2 \\ &\quad + iS_1^{F,R}(t - t_1',\ \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1')\beta_1\delta(t - t_2')\delta^3(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2').\end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.15) 式是等时散射振幅的定义. 它是在 Feynman 振幅两端补以适当的传播子而得到的. 通常等时不可约核 I' 是通过某种自由传播子来定义的,这时 I' 将是 B–S 核 I 的一

个双重序列，结构极为复杂，如果我们把问题换一个提法，即根据方程 $\hat{T}\hat{\phi}_0 = \hat{I}'\hat{\phi}$ 给出 I'，I' 将是 I 的一个重排列，那么整个问题就变得十分清晰了．为此引入

$$G_0'(x_1x_2, y_1y_2) = \int U_2(x_1x_2, t\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2)G_0(t\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2, y_1y_2)dt d^3(z_1z_2), \tag{2.17}$$

并令 Feynman 散射振幅按照 G_0' 重新排列

$$T(x_1x_2, y_1y_2) = I'(x_1x_2, y_1y_2) + \int I'(x_1x_2, u_1u_2)G_0'(u_1u_2, v_1v_2)T(v_1v_2, y_1y_2)d^4(u_1u_2, v_1v_2). \tag{2.18}$$

比较 (2.6) 与 (2.18) 得 I' 为 B-S 核 I 的一个重排列级数

$$I' = I + I(G_0 - G_0')I'. \tag{2.19}$$

利用 (2.17) 和 (2.18) 立即可以得到

$$\int \hat{T}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\hat{\phi}_0(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)dt'd^3(y_1y_2) = \int \hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\hat{\phi}(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)dt'd^3(y_1y_2), \tag{2.20}$$

$$\hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) = \{U_1I'U_2\}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2). \tag{2.21}$$

把 (2.20) 应用到 (2.14) 就得到等时 B-S 波函数满足的微分积分方程

$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)\hat{\phi}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \int \hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\hat{\phi}(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)dt'd^3(y_1y_2). \tag{2.22}$$

这里 $\hat{\phi}$，$\hat{I}'$，$\hat{T}$ 与 B-S 方程的 ϕ，I，T 之间的关系是同时被确定的．必须强调的是 G_0' 的定义和重排列 (2.19) 不包含任何人为性质．一旦给定了原始 B-S 方程，推导等时 B-S 波函数的封闭方程就完全确定了这个重排列．当 $G_0 = G_0^F$，即 (2.4)，则由 (2.11)，(2.17) 和 (A20) 我们有

$$\begin{aligned}G_0^{F\prime}(x_1x_2, x_1'x_2') = {} & [\theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_1') \\ & + \theta(t_2 - t_1)\theta(t_1 - t_2')]iS_1^F(x_1 - x_1')\beta_1S_2^F(x_2 - x_2')\beta_2 \\ & - \theta(t_2 - t_1)\theta(t_2' - t_1)iS_1^F(x_1 - x_1')\beta_1S_2^-(x_2 - x_2')\beta_2 \\ & - \theta(t_1 - t_2)\theta(t_1' - t_2)iS_1^-(x_1 - x_1')\beta_1S_2^F(x_2 - x_2')\beta_2,\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}G_0^F - G_0^{F\prime} = {} & \theta(t_1' - t_2)iS_1^R(x_1 - x_1')\beta_1S_2^F(x_2 - x_2')\beta_2 \\ & + \theta(t_2' - t_1)iS_1^F(x_1 - x_1')\beta_1S_2^R(x_2 - x_2')\beta_2.\end{aligned} \tag{2.24}$$

当 $G_0 = G_0^R$，即 (2.3)，利用 (A19) 有

$$\begin{aligned}& G_0^{R\prime}(x_1x_2, x_1'x_2') = [\theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_1') + \theta(t_2 - t_1)\theta(t_1 - t_2')]G_0^R(x_1x_2, x_1'x_2'), \\ & G_0^R - G_0^{R\prime} = [\theta(t_1' - t_2) + \theta(t_2' - t_1)]G_0^R(x_1x_2, x_1'x_2').\end{aligned} \tag{2.25}$$

利用 (2.24) 和 (2.25) 就能分别得到 Feynman 型和推迟型 B-S 方程的重排列序列．在 Rizov，Todorov[11] 的推导过程中曾把 (2.25) 第一项所属的大片积分区域遗漏了，以致得出一个错误结论：从推迟型 B-S 方程推导等时方程无需重排列[12]．原始的 B-S 方程 (2.1) 和 (2.6) 中的单粒子 Green 函数可以换成重整化的单粒子 Green 函数，取物理质量．显然这并不影响上述推导，但此时不可约核包含高级自能修正．

极易导出等时波函数的正交归一条件．由于 (2.22) 是质心时间的一次微分方程，所以它比 B-S 波函数的规格化条件简单．为此从等时波函数和不可约核中分出质心四动

量

$$\hat{\phi}_p(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = e^{-iEt+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{X}}\hat{\phi}_p(\boldsymbol{x}), \tag{2.26}$$

$$\hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} e^{-iQ^0(t-t')+i\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})}\hat{I}'_Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{2.27}$$

则在质心系 ($\boldsymbol{p} = 0$, $E = M$) 方程 (2.22) 改写为

$$[M - H_1(-i\nabla) - H_2(i\nabla)]\hat{\phi}_M(\boldsymbol{x}) = \int \hat{I}'_M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\hat{\phi}_M(\boldsymbol{y})d^3y. \tag{2.28}$$

假定解 $\hat{\phi}_M(\boldsymbol{x})$ 是完备的,

$$\sum_M \hat{\phi}_M(\boldsymbol{x})\bar{\hat{\phi}}_M(\boldsymbol{y}) = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{2.29}$$

定义 Reso Went 算子 $G_\zeta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 满足下列方程

$$\int G_\zeta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\{[\zeta - H_1(-i\nabla_y) - H_2(i\nabla_y)]\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}) - \hat{I}'_\zeta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\}d^3y$$
$$= \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}). \tag{2.30}$$

如果 $G_\zeta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 具有一级极点形式

$$G_\zeta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_M \frac{\hat{\phi}_M(\boldsymbol{x})\bar{\hat{\phi}}_M(\boldsymbol{y})}{\zeta - M}, \tag{2.31}$$

则 $\hat{\phi}_M(\boldsymbol{x})$ 应按下列方式正交归一化

$$\int \bar{\hat{\phi}}_M(\boldsymbol{x}) \left\{\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \left.\frac{\partial \hat{I}'_\zeta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=M'}\right\} \hat{\phi}_{M'}(\boldsymbol{y})d^3(xy) = \delta_{M,M'}. \tag{2.32}$$

三、等时散射振幅的积分方程

在引言中我们指出，从 B-S 方程导出等时方程与从 B-S 散射振幅的积分方程获得三维振幅经常是互不相关的．在上节我们在得到以 $\hat{I}'$ 为核的等时方程时，已经定义了等时散射振幅 $\hat{T}$，一个自然的问题是，$\hat{T}$ 是否满足同样以 $\hat{I}'$ 为核，并以某种等时自由 Green 函数传播的积分方程呢？ 回答是肯定的． 问题的关键在于正确给出等时自由 Green 函数满足的边条件．显然，等时自由 Green 函数满足下列方程

$$\vec{D}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)g_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) = g_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\overleftarrow{D}(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)$$
$$= \delta(t-t')\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\delta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2). \tag{3.1}$$

我们要求 g_0 满足下列边条件

$$\lim_{t'\to\pm\infty} \int g_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)G_0(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2,\ z_1z_2)d^3(y_1y_2) = 0, \tag{3.2}$$

正相当于要求 g_0 与原始 B-S 方程的自由 Green 函数 G_0 有相同的边条件．当 $G_0 = G_0^F$，一个满足 (3.1) 和 (3.2) 的解是：由 (A2)、(A8) 和 (A16) 得

$$g_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) = \frac{i}{2}S_1(t-t', \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\beta_1S_2^F(t-t', \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)\beta_2$$
$$+ \frac{i}{2}S_1^F(t-t', \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\beta_1S_2(t-t', \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)\beta_2, \tag{3.3}$$

其中 $S_i(i = 1, 2)$ 是 Dirac 方程的偶函数解．当 $G_0 = G_0^R$ 时，则有

$$g_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) = \frac{i}{2}S_1(t-t',\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\beta_1 S_2^R(t-t',\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)\beta_2 + \frac{i}{2}S_1^R(t-t',\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\beta_1 S_2(t-t',\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)\beta_2 = iS_1^R(t-t',\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\beta_1 S_2^R(t-t',\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)\beta_2. \tag{3.4}$$

(3.4)实际上就是 G_0^R 双方取等时．但是 (3.3) 却并不是 G_0^F 两端取等时．如果把 G_0^F 双方取等时所得的等时 Green 函数，在旋量空间并不完备无法求逆，因此用这样的 Green 函数对散射振幅进行重排列[5]时，反过来很难得到等时波函数的方程．

按照 (3.1) 和 (3.2) 定义的等时自由 Green 函数，不仅在旋量空间是完备的，而且有下列重要性质：

$$G_0'(x_1x_2,\ y_1y_2) = \int U_2(x_1x_2,\ t\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2)g_0(t\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2,\ t'\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2)U_1(t'\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2,\ y_1y_2) \times d(tt')d^3(u_1u_2v_1v_2) \tag{3.5}$$

实际上把 (3.1) 代入 G_0' 的定义 (2.17)，进行分部积分，并利用 (3.2) 消去表面项，再根据定义(2.16)，(3.5) 式就得以证明．把 (3.5) 代入 (2.18)，并在右边和左边分别乘以 U_1 和 U_2，就得

$$\hat{T}(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) = \hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) + \int \hat{I}'(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ u^0\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2)g_0(u^0\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2,\ v^0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2) \times \hat{T}(v^0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2,\ t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)d(u^0v^0)d^3(u_1u_2v_1v_2), \tag{3.6}$$

这就达到了本节一开始提出的要求，即等时散射振幅与等时波函数所满足的方程中的不可约核 $\hat{I}'$ 是相同的．必须指出的是 $\hat{I}'$ 与等时自由 Green 函数 g_0 的选取无关．g_0 的边条件 (3.2) 也没有任何人为的性质．当然方程 (3.1) 和 (3.2) 的解并不唯一，它们在旋量空间的结构还可以有某些选择性，但导出方程 (3.6) 的必要条件是 (3.2)．

四、动量表象的方程

本节给出动量表象的等时波函数和散射振幅的方程，以及它们与 B–S 波函数和散射振幅的关系．这对于实际求解方程以及研究等时散射振幅在质壳上的物理意义都是很必要的． 在动量表象中引进傅氏系数 $\psi(p_1p_2)$，$G_0(p_1p_2)$，$I(p_1p_2,\ q_1q_2)$，$T(p_1p_2,\ q_1q_2)$ 和 $\hat{\psi}(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)$，$g_0(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)$，$\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)$，$\hat{T}(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2,\ Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)$，其中 P 和 p 分别代表总四动量和相对四动量．等时波函数的定义 (2.7) 在动量表象中是

$$\hat{\psi}(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2) = \int \frac{dp^0}{2\pi}\psi(p_1p_2). \tag{4.1}$$

(2.11) 和 (2.16) 给出的 U_1 和 U_2 在动量表象有极为简单的形式

$$U_1(p_1p_2) = iS_1^{F,R}(p_1)\beta_1 + iS_2^{F,R}(p_2)\beta_2, \tag{4.2}$$

$$U_2(p_1p_2) = iS_1^R(p_1)\beta_1 + iS_2^R(p_2)\beta_2. \tag{4.3}$$

两个时间平面波平移为等时波函数的 (2.10) 式写为

$$\psi_0(p_1p_2) = U_2(p_1p_2)\hat{\psi}_0(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2), \tag{4.4}$$

这个公式是平凡的．因为在质壳上(4.3)是一个能量 δ 函数，见 (A4) 和 (A5)，所以(4.4)

只代表平面波的相对能量 δ 函数被分离，对 p^0 积分就得到 (4.1) 式. 此外重排列 Green 函数 (2.17) 的傅氏变换是

$$G_0'(p_1p_2, q_1q_2) = (2\pi)^7\delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}_1)\delta(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{q}_2)\delta(P^0 - Q^0)U_2(p_1p_2)G_0(q_1q_2). \quad (4.5)$$

值得指出的是 G_0' 在组态空间的时间区域 (2.23) 和 (2.24) 在动量空间表现为相对能量的非对角. 等时散射振幅 $\hat{T}$ 和不可约核 $\hat{I}'$ 与 T 和 I 的关系是

$$\hat{T}(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2, Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2) = \int \frac{d(p^0q^0)}{(2\pi)^2} U_1(p_1p_2)T(p_1p_2, q_1q_2)U_2(q_1q_2), \quad (4.6)$$

$$\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2, Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2) = \int \frac{d(p^0q^0)}{(2\pi)^2} U_1(p_1p_2)I'(p_1p_2, q_1q_2)U_2(q_1q_2). \quad (4.7)$$

等时自由 Green 函数 (3.3) 和 (3.4) 的傅氏变换是

$$g_0^F(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Lambda_1^+(\boldsymbol{p}_1) + \Lambda_2^+(\boldsymbol{p}_2)}{P^0 - H_1(\boldsymbol{p}_1) - H_2(\boldsymbol{p}_2) + i\varepsilon} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Lambda_1^-(\boldsymbol{p}_1) + \Lambda_2^-(\boldsymbol{p}_2)}{P^0 - H_1(\boldsymbol{p}_1) - H_2(\boldsymbol{p}_2) - i\varepsilon}, \quad (4.8)$$

$$g_0^R(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{P^0 - H_1(\boldsymbol{p}_1) - H_2(\boldsymbol{p}_2) + i\varepsilon}. \quad (4.9)$$

利用附录公式 (A4)—(A7) 不难证明这些公式.

等时波函数和散射振幅在动量表象的方程可以写为

$$[P^0 - H_1(\boldsymbol{p}_1) - H_2(\boldsymbol{p}_2)]\hat{\phi}(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2) = \int \frac{dQ^0d^3(q_1q_2)}{(2\pi)^7}\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2, Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)\hat{\phi}(Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2), \quad (4.10)$$

$$\hat{T}(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2, Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2) = \hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2, Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2) + \int \frac{dQ'^0d^3(q_1'q_2')}{(2\pi)^7}\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2, Q'^0\boldsymbol{q}_1'\boldsymbol{q}_2')g_0(Q'^0\boldsymbol{q}_1'\boldsymbol{q}_2')\hat{T}(Q'^0\boldsymbol{q}_1'\boldsymbol{q}_2', Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2). \quad (4.11)$$

利用总能量、动量守恒，可以定义

$$\hat{T}(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2, Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2) = (2\pi)^4\delta^4(P - Q)\hat{T}_P(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \quad (4.12)$$

$$\hat{I}'(P^0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2, Q^0\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2) = (2\pi)^4\delta^4(P - Q)\hat{I}_P'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \quad (4.13)$$

$$\hat{T}_P(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \int \frac{d(p^0q^0)}{(2\pi)^2} U_1(P, p)T_P(p, q)U_2(P, q), \quad (4.14)$$

$$\hat{I}_P'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \int \frac{d(p^0q^0)}{(2\pi)^2} U_1(P, p)I_P'(p, q)U_2(P, q). \quad (4.15)$$

于是方程(4.10)和(4.11)可以写成三维形式. 为了简单令 $m_1 = m_2$，则在质心系 ($\boldsymbol{P} = 0$) 有:

$$[P^0 - H_1(\boldsymbol{p}) - H_2(-\boldsymbol{p})]\hat{\phi}_{P^0}(\boldsymbol{p}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\hat{I}_{P^0}'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\hat{\phi}_{P^0}(\boldsymbol{q}), \quad (4.16)$$

$$\hat{T}_{P^0}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \hat{I}_{P^0}'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) + \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\hat{I}_{P^0}'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}')g_0(P^0, \boldsymbol{q}', -\boldsymbol{q}')\hat{T}_{P^0}(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{q}). \quad (4.17)$$

方程 (4.16) 和 (4.17) 是 Schrödinger 方程和 Lippmann-Schwinger 方程的相对论推广，并与相应的 B-S 方程等价，其位势原则上是由场论严格决定的. 在此可以对比 Schweber 1952 年的工作[13]，他证明了两个时间的 B-S 方程在非相对论极限下等价于 Schrödinger

方程．现在对所有的相对论场论，B-S 方程的等时极限也应等价于"Schrödinger 方程"，即 (4.16) 和 (4.17) 式．在动量表象中还可以给出总能在壳时等时振幅的值，这是有确切物理意义的．由 (A4) 和 (A5)，在正能空间有

$$U_1(P^0p)\Lambda_1^+(\boldsymbol{p})\Lambda_2^+(-\boldsymbol{p}) = U_2(P^0p)\Lambda_1^+(\boldsymbol{p})\Lambda_2^+(-\boldsymbol{p})$$
$$= \left(\frac{i}{\frac{P^0}{2}+p^0-E_p+i\varepsilon}+\frac{i}{\frac{P^0}{2}-p^0-E_p+i\varepsilon}\right)\Lambda_1^+(\boldsymbol{p})\Lambda_2^+(-\boldsymbol{p}), \quad (4.18)$$

把 (4.18) 代入 (4.14)，并令两边的总能在壳，即 $P^0=2E_p=2E_q$，则 (4.18) 的主值部分完全相消，得

$$\hat{T}_{P^0=2E_p=2E_q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = T_{P^0=2E_p=2E_q}(p,q)\Big|_{p^0=q^0=0}, \quad (4.19)$$

亦即总能在壳的等时散射振幅等于两个粒子分别在质壳的 B-S 振幅，并相应于实验散射振幅．

最后讨论零级等时不可约核，即展开 (2.19) 的首项所提供的等时位势．显然，这是从场论出发讨论等时位势的开始．在 QED 中，B-S 方程不可约核的梯形近似是不依赖于总能的．选择库仑规范，则有

$$I_{P^0}(p,q) = I(p-q) = I_c(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) + I_t(p-q), \quad (4.20)$$

$$I_c(\boldsymbol{k}) = -\frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{k}|^2}, \quad (4.21)$$

$$I_t(k) = -\frac{e_1e_2}{k^2+i\varepsilon}\alpha_{1i}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\alpha_{2j}. \quad (4.22)$$

定义

$$\alpha_i(\boldsymbol{k}) = \left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\alpha_j, \quad (4.23)$$

则 (4.22) 可以改写为

$$I_t(k) = -e_1e_2\frac{\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{k})}{k^2+i\varepsilon}. \quad (4.24)$$

把 (4.21)、(4.24) 代入 (4.15) 并利用公式 (A4)、(A5)，则有

$$\hat{I}_c(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = -\frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}[\Lambda_1^+(\boldsymbol{p})\Lambda_2^+(-\boldsymbol{p})-\Lambda_1^-(\boldsymbol{p})\Lambda_2^-(-\boldsymbol{p})], \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_t(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{e_1e_2}{2|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}\Big\{&\Lambda_1^-(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\\ &\times\frac{1}{-E_1(\boldsymbol{p})-H_1(\boldsymbol{q})-|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|+i\varepsilon}\\ &+\Lambda_2^-(-\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\frac{1}{-E_2(-\boldsymbol{p})-H_2(-\boldsymbol{q})-|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|+i\varepsilon}\\ &-\boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\frac{\Lambda_1^+(\boldsymbol{p})}{P^0-H_1(\boldsymbol{p})-H_2(-\boldsymbol{q})-|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|+i\varepsilon}\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\\ &-\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\frac{\Lambda_2^+(-\boldsymbol{p})}{P^0-H_1(\boldsymbol{q})-H_2(-\boldsymbol{p})-|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|+i\varepsilon}\boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\Big\}.\end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.25) 正是我们熟悉的瞬时近似下的 B-S 核，而零级等时位势比它多了横场部分，这将给出全部的自旋效应。应该注意的是横场贡献中包含了能量依赖，在组态空间中这个位势也不是定域的。如果限制在正能空间讨论两个自由粒子的散射问题，即 $P^0 = 2E_p = 2E_q$，(4.25) 和 (4.26) 给出

$$\hat{I}_c(\boldsymbol{k}) + \hat{I}_t(\boldsymbol{k}) = -\frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{k}|^2} + \frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{k}|^2}\left[\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^2}\right], \tag{4.27}$$

在流守恒条件下，$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k} = 0$，这将重新回到相对论库仑定律。在适当的非相对论近似下给出 Breit 位。值得指出的是 (4.25) 和 (4.26) 投影在正能空间的部分等价于 Rizov, Todorov[11] 从推迟型 B-S 方程导出的等时位势。

附　　录

在这个附录中，我们汇集了本文所用的单粒子 Green 函数及其主要性质。选取与 Bjorken-Drell[14] 一致的度规与符号，Green 函数的方程为

$$(i\not{\partial} - m)S^{F.R.A}(x) = S^{F.R.A}(x)(i\overleftarrow{\not{\partial}} - m) = \delta^4(x), \tag{A1}$$

或

$$\begin{aligned}[i\partial_t - H(-i\nabla)]\, S^{F.R.A}(x)\beta &= S^{F.R.A}(x)\beta[i\overleftarrow{\partial}_t - H(-i\overleftarrow{\nabla})]\\ &= [i\partial_t - H(i\nabla)]\beta S^{F.R.A}(x) = \beta S^{F.R.A}(x)[i\overleftarrow{\partial}_t - H(i\overleftarrow{\nabla})] = \delta^4(x),\end{aligned} \tag{A2}$$

其中 $H(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m$. 作傅氏展开

$$S^{F.R.A}(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ipx}S^{F.R.A}(p), \tag{A3}$$

$F.R.A$ 分别代表因果推迟和超前三种格林函数

$$S^F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{\Lambda^+(\boldsymbol{p})}{p^0 - H(\boldsymbol{p}) + i\varepsilon}\beta + \frac{\Lambda^-(\boldsymbol{p})}{p^0 - H(\boldsymbol{p}) - i\varepsilon}\beta, \tag{A4}$$

$$S^R(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon p^0} = \frac{1}{p^0 - H(\boldsymbol{p}) + i\varepsilon}\beta, \tag{A5}$$

$$S^A(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 - i\varepsilon p^0} = \frac{1}{p^0 - H(\boldsymbol{p}) - i\varepsilon}\beta, \tag{A6}$$

其中 $\Lambda^{\pm}$ 分别是正、负能投影算子，

$$\Lambda^{\pm}(\boldsymbol{p}) = \frac{E \pm H(\boldsymbol{p})}{2E},\quad E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\quad \Lambda^+(\boldsymbol{p}) + \Lambda^-(\boldsymbol{p}) = 1,$$

$$\Lambda^r(\boldsymbol{p})\Lambda^s(\boldsymbol{p}) = \delta^{r,s}\Lambda^r(\boldsymbol{p}),\quad (r, s = \pm)$$

定义

$$S^{\pm}(x) = -i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{\pm iEt + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\Lambda^{\mp}(\boldsymbol{p})\beta, \tag{A7}$$

则有

$$(i\not{\partial} - m)S^{\pm}(x) = S^{\pm}(x)(i\overleftarrow{\not{\partial}} - m) = 0 \tag{A8}$$

或

$$\begin{aligned}[i\partial_t - H(-i\nabla)]S^{\pm}(x)\beta &= S^{\pm}(x)\beta[i\overleftarrow{\partial}_t - H(-i\overleftarrow{\nabla})]\\ &= [i\partial_t - H(i\nabla)]\beta S^{\pm}(x) = \beta S^{\pm}(x)[i\overleftarrow{\partial}_t - H(i\overleftarrow{\nabla})] = 0,\end{aligned} \tag{A9}$$

$S^{\pm}$ 具有下列重要性质：对于任意时刻 y^0 均有

$$i\int S^r(x - y)\beta S^s(y - z)d^3y = \delta^{r,s}S^r(x - z). \tag{A10}$$

利用定义 (A7) 格林函数还可写成下列形式

$$S^F(x) = \theta(t)S^+(x) - \theta(-t)S^-(x), \tag{A11}$$

$$S^R(x) = \theta(t)S(x), \tag{A12}$$

$$S^A(x) = -\theta(-t)S(x), \tag{A13}$$

其中

$$\theta(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\varepsilon} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{A14}$$

$$S(x) = S^+(x) + S^-(x). \tag{A15}$$

$S(x)$ 是 Dirac 方程的偶解，是平面波的时间平移算子，具有下列性质

$$iS(0, \boldsymbol{x}) = \delta^3(\boldsymbol{x})\beta, \tag{A16}$$

$$i\int S(x-y)\beta\psi_0(y)d^3y = \psi_0(x), \tag{A17}$$

$$i\int \bar{\psi}_0(y)\beta S(y-x)d^3y = \bar{\psi}_0(x). \tag{A18}$$

其中

$$\psi_0(x) = u^{\pm}(p)e^{\mp iEt\pm i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad (\not{p}\mp m)u^{\pm}(p) = 0,$$

$$\bar{\psi}_0(x) = \overline{u^{\pm}}(p)e^{\pm iEt\mp i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad \overline{u^{\pm}}(p)(\not{p}\mp m) = 0.$$

把 (A10) 应用到 (A11)—(A13) 有

$$i\int S^R(x-y)\beta S^R(y-z)d^3y = \theta(x^0-y^0)\theta(y^0-z^0)S^R(x-z). \tag{A19}$$

参　考　文　献

[1] E. E. Salpeter, H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **84**(1951), 1232.
[2] N. Nakanishi, *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **43**(1969), 1.
[3] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, p. 289.
[4] 阮图南、何祚庥、黄涛，高能物理与核物理，**3**(1979)，272.
[5] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cim.*, **29**(1963), 380.
[6] R. Blankenbecler, R. Sugar, *Phys. Rev.*, **142**(1966), 1051.
[7] I. T. Todorov, *Phys. Rev.*, **D3**(1971), 2351.
[8] F. Gross, *Phys. Rev.*, **186**(1969), 1448.
[9] V. G. Kadyshevsky, *Nucl. Phys.*, B6(1968), 125; *Nuovo. Cim.*, **55**(1968), A233.
[10] W. Królikowshi, J. Rzewuski, *Nuovo. Cim.*, **2**(1955), 203.
[11] A. V. Rizov, I. T. Todorov. *Sovi. Jour. Part Nucl.*, **6**(1975), 269.
[12] 阮图南、朱熙泉、何祚庥，高能物理与核物理，**4**(1980)，186.
[13] S. Schweber, *Anna. Phys.*, **20**(1962), 66.
[14] J. D. Bjorken, S. D. Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, Inc.

RELATIVISTIC EQUAL-TIME EQUATION (I)

RUAN TU-NAN
(*University of Science and Technology of China*)
ZHU XI-QUAN HE ZUO-XIU QING CHENG-RUI
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)
ZHAO WEI-QIN
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

For a given Bethe-Salpeter equation an unique definite rearrangement of its irreducible kernel is obtained. Using this new kernel the equal-time wave function and equal-time scattering amplitude satisfy closed equations respectively. Including no unphysical degree of freedom the equations are the relativistic generalization of Schrödinger equation and Lippmann-Schwinger equation. The equal-time potential of one photon exchange is given. All the conclusions are generalized to particleantiparticle system directly.