第4卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 3
1980年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1980

荷电磁荷-电子等体系的束缚态能级

——相对论量子力学中的奇性态问题

戴显熹 黄发泱 倪光炯
(复旦大学现代物理研究所)

摘 要

本文综述了相对论量子力学中的四类奇性态问题及其解法. 在文献[2,3,5,6,11]中,曾指出某些含奇性态的量子力学问题中,常存在相角不定性. [11]中曾获得消除这类不定性的原则——"正交-变分原则". 对于中性磁荷和荷电Dirac粒子的散射及束缚态的结果与杨振宁、风间洋一及 Goldhaber 的结果一致. 在[5, 11]和本文中得到了确定磁荷及含荷电磁荷和电子的奇异原子的束缚态的方程. 本文对这些能级作了数值计算.

由于在这些方程中奇点数目是无穷多的,并且函数振荡极快,通常的计算方法不适用. 经过对方程作分析及确定奇点的位置和能级的区域后,将这些能级用计算机算出.

指出这些能级数目是无穷的,正负能级的位置是不对称的,负能级仅在 ε 非常接近 -1 时才出现. 正能级展布在区域 $0.9998 \lesssim \varepsilon < 1$ 中. 它们接近于类氢原子的能级并与固体中的杂质能级相似. 这是一个通常微扰理论不能适用的奇性态微扰问题.

磁荷偶的能级与类氢原子不相像. 在区域 $0 < |\varepsilon| \leqslant 0.99$ 中,已具有许多正负能级.

本文还指出,对于 $119 < z < 137$ 的类氢原子,某些满足平方可积条件的束缚态负能级的解是可能的. 通常的标准条件不能排除这些态. 但正交判据排除了它们. 这个结论与杨振宁教授所指出的结果一致.

这些结果暗示正交-变分原则是合理的.

一、引 言

在量子力学中存在着若干奇性态. 最早出现的奇性态是类氢原子的 Dirac 方程的基态等 (Darwin[1]). 它具有单极点奇性,但没有相角不定性问题. 相对论量子力学中还存在另外一些奇性态,它们具有相角不定性. 它们可以归结为下列四个问题:

本文1979年3月10日收到.

1. 问题I

类氢原子在 $z > 137$ 时,态具有本性奇点. Case[2] 和 Von Neumann[3] 曾做过很出色的工作. 他们运用正交性来确定能级,并且获得确定能级的一个函数方程. 由于它带有一个未定参数,因此能级不能最后确定下来. 另一类避免奇性的方法是采用切断近似,例如 Pomeranchuk 所做的那样[4]. 切断近似的方法的缺点是势并不唯一,因此具有很多不确定的因素.

2. 问题II: 正负磁荷偶

在研究正负磁荷所组成的体系的定态问题时,也遇到奇性态的问题[5]. 由于当时不知道 Case 等的重要工作[2-3],因此[5]部分重复了他们的工作. [5]的主要结果是:

(i) 讨论了正负磁荷体系,同时导出了包括散射态在内的正交判据:

$$-\lim_{r\to 0}\frac{q(r)}{E_2-E_1}+\lim_{r\to\infty}\frac{q(r)}{E_2-E_1}=\frac{1}{\hbar c}\delta(E_2-E_1) \tag{1.1}$$

在分立谱情况下,与 Case 的正交判据一致.

(ii) 指出这时的 Dirac 方程可能存在有复本征值的解(它们平方可积,而且在无穷远处为零,因此通常的标准条件不能排除它们.)分析后指出这种态的物理特征是存在径向流动的几率流(如所周知,通常情况下,几率流是沿着方位角 φ 的方向流动的)因此物理上是不稳定的,不稳定的原因是奇点成为吮吸源,粒子从这里"漏"出去.

利用正交判据,排除了这些解.

(iii) 讨论了散射态问题,并且证明正交条件可以使束缚态的能级分立,但不能使散射态的能量分立,从而使散射态和束缚态组成正交完备的函数系. [5]虽然对不定相角问题作了某些讨论,指出可以从实验上两条谱线或分波散射相移来定出,但尚未找到独立确定不定相角的原则. [6]将正交性作为基本原理来调整量子力学体系,发现它可以构成自洽的理论系统. [6, 7]讨论了含磁荷奇异原子的能级、光谱强度和选择规则,指出偶极辐射的选择规则为 $\Delta l=0,\pm 1$. (自旋为1/2时, $\Delta j=0,\pm 1$). 其中运用了吴大峻-杨振宁的磁荷球谐函数,导出了它的 Pauling-Wilson 展式.

3. 问题 III: 电子和磁单极体系(Kazama-Yang-Galdhaber 问题)

电子和磁单极体系的相对论定态波函数的角度部分,已由吴大峻-杨振宁[8]和风间洋一、杨振宁、Goldhaber[9] 用磁荷球谐函数得到圆满的解决,并把状态按角动量分为三类. 电子与磁单极体系的散射态和束缚态的径向波函数在[9, 10]中已作了讨论,对I、II类态都可以明确地解决,并没有发现有原则的困难. 但对III类态,即角动量最小的态,遇到一个原则问题: 因为III类态具有奇点——单极点,而且具有相角不定性. Kazama-Yang-Goldhaber 所提出的问题的尖锐性在于无论怎样选择 δ, 不能使它的奇性消失,因此 δ 不能简单地确定下来. 与 $z<137$ 的类氢原子的 $1s_{\frac{1}{2}}$ 态不同,这里的有单极点的态具有相角不定性,因此是新的一类奇性态. [9]为了消除这个原点的奇性,根据 Poincare 的经典工作指出,既然荷电粒子的经典轨道不能穿越磁荷(必须弹回来),那么"量子力学情况下原点的波函数应该为零."他们引入附加磁矩,可贵的是在相对论情况下,它在原点提供了一个强大的斥力势(这与非相对论情况截然不同),从而保证使波函数在原点趋于零. 我们认为,荷电粒子的经典轨道不能穿越磁荷的事实,在量子力学中应该与原点的径向几

率流为零相对应．波函数为零固然可以保证径向流为零，但径向流为零并不强求原点的波函数为零，因此对波函数的要求可以放宽，允许态具有奇性．正如 [5] 所证明的，“没有径向流”的要求和“能量本征值为实数”相当(由于矢势 $\boldsymbol{A}$ 是实数)．并且可以由波函数在原点的渐近行为反映出来．在 [11] 中，我们首先将正交判据推广到磁单极——电子体系的 III 类态:

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r_0\to 0}} -\frac{i\frac{q}{|q|}\hbar c}{E_2-E_1}\{F_1^*(r)G_2(r)+G_1^*(r)F_2(r)\}\Big|_{r_0}^{R}=\delta(E_1-E_2). \tag{1.2}$$

并利用正交关系 (1.2) 将 III 类态组成正交系，它也只依赖于一个不定相角 δ．为了确定这个不定相角，我们提出正交变分原则，即认为基态能量必须是 $E_0\geqslant 0$，而且是各种 δ 下最小的能量，从而唯一地确定了 δ，并且与 [9] 的结果一致，从而使正交-变分原则得到一次检验，并唯一地定出磁荷-电子体系的散射态与束缚态．

4. 问题 IV: 荷电磁荷-电子体系

[11]中还将正交-变分原则用来讨论荷电磁荷与电子的相对论束缚态与散射态问题，同样可以唯一地确定下不定相角:

$$\vartheta_0=\arg\Gamma(i\gamma_0)+\arg\left\{\frac{i\gamma_0}{\kappa+z'\alpha}-1\right\}+\arg\Gamma(1-2i\gamma_0). \tag{1.3}$$

以及散射态 ([11] 中 (4.14)) 和能级方程 ([11] 中的 (4.13))．

将正交-变分原则运用到问题 I、II 中，同样也可以确定相角，定出其散射截面，从而使长期以来未能确定的相角确定下来，并有可能对各个问题的能级方程作数值计算．

二、基 本 方 程

问题 III 的能级已经完全解出[9-11]．问题 I、II、III 的分立能级满足 Case 型函数方程，利用正交变分原则可以消除其不定性．最后定下来的方程是否有解？它在物理上是否合理？显然是人们所关心的．鉴于这三个问题中基态都带有奇性，因此求解这些能级对确定这类原子光谱辐射的特征是很重要的．

在分析能级方程时，要注意正能级与负能级的不对称性，它们满足的方程也不同．经过详细的计算证明对正能级 ($\varepsilon=E/Mc^2>0$) 满足下列方程:

$$\begin{aligned}\gamma_0\ln\sqrt{1-\varepsilon^2}&+\delta(\kappa,\omega,\varepsilon)-\delta(\kappa,\omega,0)\\&+\Theta(\kappa,\omega,\varepsilon)-\Theta(\kappa,\omega,0)=n\pi.\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned}\Theta(\kappa,\omega,\varepsilon)=&\frac{-\theta}{2}+\rho\sin\theta-[\rho\theta\cos\theta+\rho\sin\theta\ln\rho]\\&+\int_0^\infty f(t)e^{-ta}\sin bt\,dt-\pi-\varphi,\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}[\operatorname{ctg}\pi a\operatorname{th}\pi b], \tag{2.3}$$

$$a+b_i=\rho e^{i\theta}=-i\omega+\frac{\omega\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{2.4}$$

$$\gamma_0=\sqrt{\omega^2-\kappa^2}, \tag{2.5}$$

$$\delta(\kappa,\omega,\varepsilon)=\arg\operatorname{tg}\left[\frac{\omega^2-\kappa^2}{\kappa-\omega\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}}\right]. \tag{2.6}$$

对负能级，$\varepsilon<0$，对应的基本方程为：

$$\gamma_0\ln\sqrt{1-\varepsilon^2}+\delta(\kappa,\omega,\varepsilon)-\delta(\kappa,\omega,0)+\tilde{\Theta}(\kappa,\omega,\varepsilon)-\tilde{\Theta}(\kappa,\omega,0)=n\pi. \tag{2.7}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(\kappa,\omega,\varepsilon)=\theta\rho\cos\theta+\rho\sin\theta\ln\rho-\frac{\theta}{2}\\ -\rho\sin\theta-\int_0^\infty f(t)e^{-ta}\sin bt\,dt,\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\rho e^{i\theta}=a+bi=i\omega-\frac{\omega\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{2.9}$$

$$f(t)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right]. \tag{2.10}$$

注意 $t\to0$ 时，$f(t)$ 是有界的，无论 $\varepsilon>0$ 还是 $\varepsilon<0$，Θ 和 $\tilde{\Theta}$ 中的定积分中的被积函数都包含一个指数因子，因为两种情况下，a 都是正定的，因此 e^{-ta} 是随 t 增加而衰减的.

三、正负能级的不对称性

由基本方程 (2.1)、(2.7) 看出，束缚态的正负能级一般是不对称的，就是说，如果 $E>0$ 是能量本征值，一般说来，$-E$ 不一定是本征值. 这种不对称的解是否正确呢？这自然牵涉到 $z<137$ 的类氢原子的能级是否正负对称的问题. 流行的著作中似乎都不谈论这个问题.

最近杨振宁教授在访沪期间曾提出过这个问题，他还从对称分析，指出 $z<137$ 时，类氢原子不存在负的束缚态能级. 乍看起来，这些有负能级的束缚态是满足 Dirac 方程的，从 Darwin 能级公式来看，似乎容易得出能级具有正负对称的结论. 正确的结论应该怎样呢？

实际上 Dirac 方程的径向部分为：

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\chi_1}{dr}-\kappa\frac{\chi_1}{r}=\left[\frac{Mc}{\hbar}(1-\varepsilon)-\frac{\alpha z}{r}\right]\chi_2,\\ \frac{d\chi_2}{dr}+\kappa\frac{\chi_2}{r}=\left[\frac{Mc}{\hbar}(1+\varepsilon)+\frac{\alpha z}{r}\right]\chi_1,\end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

其中

$$\chi_1=rf(r),\quad \chi_2=rg(r). \tag{3.2}$$

重复通常求解 Dirac 方程的全部步骤，立刻发现正负能量的束缚态均可以写成下列形式：

$$\begin{Bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{Bmatrix}=\sqrt{1-\varepsilon}\,e^{-\frac{1}{2}\rho}\left[\frac{-n_r}{\sqrt{-\kappa+\dfrac{\alpha z}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}}\rho^{\gamma}F(-n_r+1,\,2\gamma+1,\,\rho)\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{-\kappa+\frac{\alpha z}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}\,\rho^{\gamma}F(-n_r,\,2\gamma+1,\,\rho)\right],\tag{3.3}$$

其中

$$\rho=\frac{2r}{\alpha}\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

此解在 $\rho\to\infty$ 时的有界性要求自然导致 (3.3) 中的合流超几何级数中断为多项式，即要求

$$n_r=\frac{\alpha z\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\gamma=\text{非负的整数},\tag{3.4}$$

$$\gamma=\pm\sqrt{\kappa^2-\alpha^2z^2},\tag{3.5}$$

得

$$\varepsilon=\pm\left[1+\frac{\alpha^2z^2}{(n_r+\gamma)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.\tag{3.6}$$

现在讨论负能级的可能性:

(i) 首先 n_r 必须是非负的整数，因此 $\varepsilon<0$ 时，必须要求

$$\gamma<0.$$

因此大部分负能量束缚态不满足平方可积条件，因为

$$\langle\phi|\phi\rangle=\int_0^\infty(f^2+g^2)r^2dr=\int_0^\infty(\chi_1^2+\chi_2^2)dr.\tag{3.7}$$

为保证平方可积性，要求:

$$\gamma>-\frac{1}{2},\tag{3.8}$$

因此 $|\kappa|\geqslant 2$ 的态都不能有负能量束缚态.

(ii) 只有 $n_r=0$, $\kappa=-1$ 的情况需要仔细讨论.

考虑下列一个负能级:

$$\gamma=-\gamma_1=-\sqrt{1-\alpha^2z^2},$$

当 $1/\alpha>z>\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\alpha}$ 时，显然这些态是平方可积的:

$$\begin{cases}\tilde{g}'(r)=\left(\dfrac{2z}{a_0}\right)^{3/2}\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon_1'}{2\Gamma(-\gamma_1+1)}}\,e^{-\frac{1}{2}\rho_1}\rho_1^{-\gamma_1-1},\\[2ex] \tilde{f}'(r)=\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon_1'}{1+\varepsilon_1'}}\,\tilde{g}'(r),\end{cases}\tag{3.9}$$

其中

$$\varepsilon_1'=-\gamma_1<0,$$

$$\rho_1 = \left(\frac{2z}{a_0}\right) r. \quad a_0 \text{ 为 Bohr 半径} \tag{3.10}$$

不难证明,解(3.9)是满足 Dirac 方程(3.1)的,而且是平方可积的. 通常的量子力学标准条件不足以排除这些状态.

我们曾在[6]中指出,由于测量几率必须是实数,本征态之间的正交性是必须的,对奇性态必须把本征函数系的正交性作为基本原理来要求,(对非奇性态,正交性是自动满足的.)可以证明(3.9)是不满足正交判据(1.1)的. 实际上,它与 $\kappa = -1$ 的全部连续谱的态及束缚态都不正交. 例如与 $1s_{\frac{1}{2}}$ 态就不正交:

$$\lim_{r\to 0} r^2[\tilde{f}_1^*(r)g_1(r) - \tilde{g}_1^*(r)f_1(r)] \simeq \lim_{r\to 0} r^0 \neq 0. \tag{3.11}$$

所以正交判据摒除了(3.9)形式的负能量的束缚态,从而也摒除了全部其他负能量束缚态.

这里要强调的是 $119 < z < 137$ 的核是比较现实的核,将来的实验可以检验有无这样的能级,从而鉴别正交条件作为一个基本原则的观点是否合理.

上面的论证也说明杨振宁教授的分析是正确的.

我们对正负磁荷、$z > 137$ 的类氢原子等的束缚态能级作了计算机数值计算,计算结果表明它们的束缚态能级确实是正负不对称的,与上面的论证是相协调的.

四、正负磁荷的能级

磁荷偶的能级方程为(2.1)、(2.7)所示. 其中的 ω 为:

$$\omega = \frac{\alpha}{4} = 34.2590100\cdots. \tag{4.1}$$

对 $\kappa = -1$ 的态,n 取 -10 到 -1 等一系列数值,数值结果为:

(|ε|在 0—0.99 范围内计算)

$n = -10$ $\varepsilon > 0$ 无束缚态的解;
$\varepsilon < 0$ 有一个解; $\varepsilon = -0.87943$.

$n = -9$ $\varepsilon = 0.79369$; 0.80201; 0.84563; -0.75694.

$n = -8$ $\varepsilon = 0.64594$; 0.64609; 0.65735; -0.64399.

$n = -7$ $\varepsilon = 0.54034$; 0.54035; 0.55496; 0.55739; 0.56917.
0.57376; 0.58297; -0.53978.

$n = -6$ $\varepsilon = 0.44440$; 0.44450; 0.46133; 0.46512; 0.47790; -0.44356.

$n = -5$ $\varepsilon = 0.37333$; 0.37829; 0.39157; -0.35465.

$n = -4$ $\varepsilon = 0.27834$; 0.28020; 0.29777; -0.27243.

$n = -3$ $\varepsilon = 0.19918$; 0.20019; 0.21913; -0.19634.

$n = -2$ $\varepsilon = 0.13901$, 0.14442, 0.15909; -0.12587.

$n = -1$ $\varepsilon = 0.078912$; -0.060552.

几点讨论:

1. 这里的 n 并非新的量子数. 因为同一个正交判据可以存在若干支解,n 就是各支

的编号．这一点相似于量子力学中方阱问题，能级方程可以有二支，一支是正切方程所对应的，另一支是余切方程所对应的．求出数值解之后，再按能级高低编排次序．这里讨论的情况，存在许多支，这是本性奇点态的一种新的特征．

2. 显然能级是无穷的，密集于 $\varepsilon \to \pm 1$ 的区域中，以上计算只在 $|\varepsilon| = 0 - 0.99$ 范围内进行的，所以能级数是有限的．

3. 正负能级不对称，在 $|\varepsilon| = 0 - 0.99$ 范围内，负能级较少．一个 n 只有一个解，因为方程中没有带奇性的函数 φ，在 $\varepsilon \to -1$ 时，对数项起着重要作用．

五、荷电磁荷与电子间的束缚态能级

1. 此时基本方程中的 ω 为:

$$\omega = 0.0072973\cdots$$

方程 (2.1)、(2.7) 实际上是相当复杂的函数方程．如果不作详细的物理分析，往往找不到根，因为函数变化得很快，例如我们曾在 $|\varepsilon| = 0 - 0.99$ 范围内寻求它的解，计算机计算表明无根．这似乎暗示整个方程无根，其实不然．这个方程的解是存在的，因为 $\varepsilon \to 1$ 时，函数 $\Theta(\kappa, \omega, \varepsilon)$ 出现许多奇点，这些奇点的来源是 φ 的迅速跳动

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{ctg} \pi a \operatorname{th} \pi b] \tag{5.1}$$

的奇点位置是在:

$$\varepsilon_n = \left[1 + \frac{\omega^2}{n^2}\right]^{-1/2}. \tag{5.2}$$

换言之，奇点的位置正好就是类氢原子无磁荷情况下的 $\gamma = 0$ 时的 Darwin 能级．现在因为 $\omega \ll 1$，故

$$\varepsilon_n \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}. \tag{5.3}$$

这就是巴尔末公式所对应的能级．

φ 通过这些奇点的突变值是 $\Delta\varphi = \pm\pi$，而其他量在 $\varepsilon \to 1$ 时的变化相对地说是很不快的，因此根出现在这些奇点的中间．此外，在这个区间中因为 ρ 的变化较大，因此与 ρ 有关的函数虽然在这个区间中是连续的，但它的变化也应该在分划区间时予以注意，因此我们在奇点所间隔的各个半区间 $\left(\Delta_n = \frac{1}{2}[\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n]\right.$ 为它们的长度$\left.\right)$ 内搜索方程的根．根据这条线索，很快地找到了根．

发现在 $1 - \varepsilon < 10^{-4}$ 以后，才开始有能级．计算时间大大地缩短了．根出现的范围与预计的相同．

2. 对中性磁荷来说，磁荷与电子的束缚态只有一个[11]，磁荷带电以后，新增加的能级是无穷多的．位置与氢原子能级相接近．因此磁荷带电以后，犹如增加一组杂质能级．计算与预计的一致．

3. 磁荷所带的电荷对能级的影响虽然是微弱的，但不能用微扰论来计算，因为中性磁荷的原子波函数有奇性，计算机计算结果以及上面的分析表明这些结果原则上不能用微

扰论来求出,因为微扰理论不能由一个孤立能级得到无穷多的微扰能级. 而由方程(2.1)却可以求出这些结果.

4. 数值结果为: $|1-\varepsilon|$ 在 1.0—10^{-8} 范围内计算.

$\kappa=0$, $n\pi=0$ 时才有根,前 20 个根列表于次

$$(1-\varepsilon)\times 10^6.$$

26.624;	16.649;	1.6641;	0.73992;	0.73959;
0.54352;	0.54337;	0.41612;	0.41602;	0.32978;
0.32870;	0.22008;	0.22004;	0.13586;	0.13584;
0.082181;	0.082170;	0.073755;	0.073748;	0.060374.

5. 负能级的方程(2.7)与(2.1)相似,但函数表式却不同,其主要特征是各函数没有奇性. 负能级在 ε 趋近于 -1 时出现,但 ε 必须非常接近于 -1 时才能作这个计算.

最近 [12] 用对称性分析讨论中性磁荷与电子体系的问题. 结果与 [11] 一致. 但 CP 对称性对带电磁荷-电子体系及 $z>137$ 情况的讨论尚需一定的努力(后者见 [12] 的论述). 正交-变分原则可能较为普遍.

综合这些计算结果,我们认为,正交变分原则是可行的,方程的解没有发现不合理的地方.

作者对杨振宁教授与谷超豪、夏道行教授的富有教益的讨论表示衷心感谢.

参考文献

[1] C. G. Darwin, Proc. Roya. Soc. London, Ser. **A118**(1928), 654.
[2] K. M. Case, *Phys. Rev.*, **80**(1950), 797.
[3] Von Neumann, Private Communication from Pauli.
[4] I. Pomeranchuk et al., *J. Phys.*, USSR **9**(1945), 97.
[5] 戴显熹,复旦学报,1977 年 第 1 期,100 页.
[6] 戴显熹,高能物理与核物理,**2** (1977), 305; 戴显熹、倪光炯,复旦学报,1977 年,第 3 期,第 1 页.
[7] 戴显熹、沈纯理,复旦学报,1978 年,第 3 期,第 89 页.
[8] Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang, *Nuclear Physics*, **B107**(1976), 365.
[9] Y. Kazama et al., *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2287.
[10] Y. Kazama et al., *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2300.
[11] 戴显熹、倪光炯,高能物理与核物理,**2** (1978), 225.
[12] A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 1815.

THE BOUND STATE ENERGY LEVELS OF MONOPOLE PAIR AND OF CHARGED MONOPOLE-ELECTRON SYSTEM—— SOME SINGULAR STATE PROBLEMS IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

DAI XIAN-XI HUANG FA-YANG NI GUANG-JIONG

(Fudan University Institute of Modern Physics)

ABSTRACT

In this paper four kinds of singular state problems in relativistic quantum mechanics and its solutions are summarized. In the references [2, 3, 5, 6, 11], it has been pointed out that in some quantum mechanial problems involving singular states there exists phase angle uncertainty. The principle eliminating this kind of uncertainty —— the orthogonality-variation principle has been obtained in [11]. The results of scattering and bound state problems of a neutral monopole and a charged Dirac particle are consistent with those obtained by C. N. Yang, Kazama, and Goldhaber. In [5], [11] and this paper the Case-type equations determining the bound states of monopole pair and exotic atoms consisting of a charged monopole and an electron are obtained. In this paper these energy levels are calculated numerically. Because in these equations the number of singular points is infinite and the functions oscillate rapidly, usual calculation methods are not suitable in these cases. After analysing these equations and determining the positions of singular points and the ranges of energy levels, these energy levels are calculated by computer.

It is pointed out that the number of these energy levels is infinite and the positions of positive and negative energy levels are asymmetric. The negative energy levels do not appear until ε is very near -1. The values of the positive energy levels are spread in the range $0.9998 \lesssim \varepsilon < 1$. They are near those of the hydrogen-like atom and similar to those of impurity in solid. This is a perturbation problem of singular states to which the usual perturbation theory can not be applied.

The energy levels of monopole pair are not similar to those of the hydrogen-like atom. In the range $0 < |\varepsilon| \leqslant 0.99$ there are many energy levels with positive and negative energy.

It is also pointed out that for the hydrogen-like atoms, $119 < z < 137$, some negative energy bound state solutions satisfying square integrability condition are possible. The ordinary standard condition does not exclude these states, but the orthogonality criterion does exclude them. The conclusion is in agreement with that reached by Professor C. N. Yang.

The results shown suggest that the orthogonality-variation principle is reasonable.