第4卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 2
1980年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1980

θ 真空的能带结构

王明中 郑希特 汪克林
(成都科学技术大学) (中国科学技术大学)
冼鼎昌 章正刚
(中国科学院高能物理研究所) (成都地质学院)

摘　　要

在绕数变量的空间里我们证明了 Yang-Mills 场系统的拉氏量表为动能和位能部分时，其位能部分是一个周期势. 因而可以类比固体理论的结果将该系统的能态表为类似于固体理论中的能带结构. 并和 Callan 等人写出的 θ 真空相比较. 最后我们证明由此得到的真空态也满足原有的 θ 真空所满足的一些普遍要求.

一、引　　言

自从 Belavin 等[1]得出纯 Yang-Mills 场的瞬子解以来真空隧道效应以及由此导出的 θ 真空的讨论引起人们极大的兴趣，因为它可以导出许多由微扰论得不出的结果. 不过，过去用瞬子解讨论不同拓扑性质的真空间的隧道效应都是在欧氏空间里进行的[2-4]. 虽然 Callan 等人[5]最近作了详尽的讨论，但其隧道效应的图象在直观上不是很清楚的.

最近，Bitar 等[6]关于真空隧道效应的工作提供了一个清楚的图象. 它是在物理的闵可夫斯基空间中进行的. 他们把绕数变量 q 的定义加以推广，把它看作一个广义坐标. 把纯 Yang-Mills 场的真空过渡看作是 q 空间中的位垒穿透.

我们在本文中进一步讨论这个图象. 首先我们把 q 的定义再一次推广，使得它可以描述从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的 q 变量. 它包含了 Bitar 等将 q 推广到 $0\to 1$ 的定义. 其次我们引用 Creutz 等[10]证明过的一个结果来证明 q 空间的位垒一定是一个周期的位垒，因而把 Yang-Mills 场的真空结构问题在数学形式上完全化为一个固体理论中的电子在周期场中运动的问题. 关于这种想法曾有过一些猜测[7,8]，但未能加以证明.

直接类比固体理论的结果[9]，把 Yang-Mills 场的真空看作是对应于第一能带的某一能级，其态矢和 Callan 等人给出的 θ 真空有一个显著的不同点是，现在的 θ 真空是所有的 q 变量的本征态的连续积分，而不是原来的只含 q 为整数值的本征态的求和. 我们将对两者作一个比较.

Callan 等人[5]最近详细论证了他们原来写出的 $\theta = \Sigma e^{in\theta}|n\rangle$ 的 θ 真空的由来. 证明

本文1978年12月20日收到.

了 $|\theta\rangle$ 既满足约束方程的要求，而且证明了它在 T 作用下只改变一个相因子，即 $T|\theta\rangle = e^{i\theta}|\theta\rangle$，其中 T 即对应于使绕数改变 1 的规范变换的么正算符． 用周期场的方法导出的真空是否也满足上述两个原则的要求呢？我们论证它也是如此．

因此 Yang-Mills 场的真空在理论上可有 Callan 等提出的以及本文所讨论的两种不同形式．不过后者具有如下一些特点，其一是它给出了能带的结构，即至少定性给出 Yang-Mills 场的最低能态及激发态间的能带结构形式． 其次它的态矢 $|\theta\rangle$ 是从动力学机制得到的，然后可证明其满足上述的原则要求． 也许这种构成比前者要来得自然一些．

二、绕数空间及真空隧道效应

我们在本节中简单回顾文献[6]的内容，为以下讨论作准备．

纯 Yang-Mills 场的拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^{(a)} f^{(a)\mu\nu}. \tag{1}$$

定义

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} \equiv g f_{\mu\nu}^{(a)} \dfrac{1}{2} \tau^a, \\ A_\mu \equiv g A_\mu^{(a)} \dfrac{1}{2} \tau^a, \\ E_i \equiv F_{0i}, \\ B_i \equiv \dfrac{1}{2} e_{ijk} F_{jk}, \end{cases} \tag{2}$$

得到 $\mathscr{L}$ 及哈氏量密度 $\mathscr{H}$ 用 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 表达的式子如下：

$$\begin{cases} \mathscr{L} = \dfrac{1}{g^2} Tr(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2), \\ \mathscr{H} = \dfrac{1}{g^2} Tr(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2). \end{cases} \tag{3}$$

引入一组依赖于连续变量 λ 的场组态 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda(t))$

$$\begin{aligned} &A_0 = 0, \\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda(t)), \end{aligned} \tag{4}$$

使得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^{(1)}, \quad 当 \quad \lambda = \lambda_1 \\ &\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^{(2)}. \quad 当 \quad \lambda = \lambda_2 \end{aligned} \tag{5}$$

$\boldsymbol{A}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 为相应于某两个时刻 t_1 及 t_2 的物理真空的矢量势，这时相应的场强 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 为零．但是，对于其他的 λ 的取值，$\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 可以不为零．由这样的 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$，可以写出依赖于单参量 λ 的拉氏量及哈氏量：

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} m(\lambda)\dot{\lambda}^2 - V(\lambda), \\ H = \frac{p_\lambda^2}{2m(\lambda)} + V(\lambda). \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$m(\lambda) = \frac{2}{g^2}\int d^3x Tr\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \lambda}\right)^2,$$
$$V(\lambda) = \frac{2}{g^2}\int d^3x Tr \boldsymbol{B}^2, \tag{7}$$
$$p_\lambda \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = m(\lambda)\dot{\lambda}.$$

可以看到,式(6)和量子力学中一维的点粒子运动的情形完全一样. $V(\lambda_1) = V(\lambda_2) = 0$,在 $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ 之间是一个位垒 $V(\lambda)$. 因此可以用 WKB 方法来计算从 λ_1 到 λ_2 的位垒穿透振幅 P 为

$$\begin{cases} P = e^{-R}, \\ R = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda[2m(\lambda)V(\lambda)]^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{8}$$

Bitar 等人证明了当 $\boldsymbol{E}\parallel\boldsymbol{B}$ 时,有最大的穿透.

对于 λ_1 及 λ_2 之间的数值,可以定义一个绕数变量 $q(\lambda)$:

$$q(\lambda) \equiv \frac{1}{4\pi^2} Tr\int_{-\infty}^{t} dt \int d^3x \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{9}$$

在文献[6]中证明了,给出最大的穿透的组态正是由在欧氏空间中的自对偶解将 t 代以 $\lambda(t)$,且将 $A_0(\boldsymbol{x}, \lambda(t))$ 乘以 $\dot{\lambda}(t)$ 而得到:

$$A_0 = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\tau}{\boldsymbol{x}^2 + \lambda^2 + a^2}\dot{\lambda},$$
$$\boldsymbol{A} = \frac{\lambda\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{x}^2 + \lambda^2 + a^2}. \tag{10}$$

而这穿透,正好是绕数差为1的穿透:

$$q(-\infty) = 0,$$
$$q(+\infty) = 1. \tag{11}$$

相应的"质量" $m(\lambda)$ 及"位垒" $V(\lambda)$ 为

$$m(\lambda) = \frac{6\pi^2 a^4}{g^2}(\lambda^2 + a^2)^{-5/2},$$
$$V(\lambda) = \frac{3\pi^2 a^4}{g^2}(\lambda^2 + a^2)^{-5/2}. \tag{12}$$

三、绕数变量的推广及周期势

式(9)给出绕数从0到1的延拓定义式. 其实,如果把式中的场量看作量子场,那么,利用在 temporal 规范中场量在正则量子化办法中的对易关系可以将绕数延拓至遍及

整个实数域，因为，定义绕数变量

$$Q(t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{t} dt \int d^3x Tr(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}), \tag{13}$$

不难证明

$$Q(t) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{(t)} \epsilon^{ijk} Tr\left(A_i\partial_j A_k + \frac{2}{3} A_iA_jA_k\right) d^3x. \tag{14}$$

记 $|q\rangle$ 为 $Q(t)$ 的本征态

$$Q|q\rangle = q|q\rangle. \tag{15}$$

另外，对于绕数改变的规范变换对应的么正变换 T[10]：

$$T = \exp\left\{-\frac{2\pi i}{g}\int d^3x E_i^a \partial_i \left[\frac{x_\alpha}{(\boldsymbol{x}^2+\rho^2)^{1/2}} - g\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_i^\beta \frac{x_\gamma}{(\boldsymbol{x}^2+\rho^2)^{1/2}}\right]\right\}, \tag{16}$$

有

$$[T_1H] = 0,\ TQT^{-1} = Q+1,\ T^{-1}QT = Q-1, \tag{17}$$

故 Q 的本征值应遍及整个实数域.

由于对绕数变量延拓的非唯一性，我们可以进一步要求[6]

$$L = \frac{1}{2} m\dot{Q}^2 - V(Q), \tag{18}$$

式中 m 是与绕数无关的常量．由于 L 应当是规范不变的，即

$$TLT^{-1} = L. \tag{19}$$

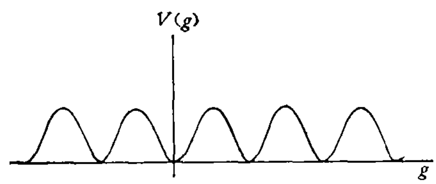

图　1

而由于

$$T\left(\frac{m}{2}\dot{Q}^2\right)T^{-1} = \frac{m}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(TQT^{-1})\right]^2 = \frac{m}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(Q+1)\right]^2 = \frac{m}{2}\dot{Q}^2, \tag{20}$$

式中对时间微商的运算与对 T 的运算的对易，是应用了 T 变换中不含时间的性质．由式 (19) 及 (20)，可见

$$TV(Q)T^{-1} = V(Q) = V(TQT^{-1}) = V(Q+1). \tag{21}$$

所以我们得到周期为 1 的周期势．见图 1.

四、θ 真空的能带结构及讨论

式 (18) 的 m 及 V 为

$$m = \frac{6\pi^2 a^4}{g^2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \tag{22}$$

$$V(q) = \begin{cases} \dfrac{3\pi^2}{g^2 a}\left\{1 - F_0\left[2B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)\left(q - \dfrac{1}{2}\right)\right]\right\}^{5/4} & 1 \geqslant q > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3\pi^2}{g^2 a}\left\{1 - F_0\left[2B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2} - q\right)\right]\right\}^{5/4}, & 0 \leqslant q \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{23}$$

其中 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 是通常的倍塔函数

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{5/4}}. \tag{24}$$

$F_0(x)$ 是不完全倍塔函数 $B_\xi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$:

$$B_\xi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)=\int_0^\xi \frac{dt}{(1+t^2)^{5/4}}, \quad \xi=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+a^2} \tag{25}$$

的反函数

$$x=B_\xi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \quad \xi=F_0(x). \tag{26}$$

这样,式(18)给出的拉氏量,和固体物理学中电子在周期场中的拉氏量完全一样,且由于

$$V_n=\int_0^1 V(q)e^{2\pi inq}dq, \quad V_0=\frac{315\pi^3}{512g^2a}, \quad V_1=-\frac{0.684\pi^2}{g^2a}\cdots. \tag{27}$$

以上 V_0 由积分直接给出,其他的 V_n 由数值积分得到. 从上面的结果看出拉氏量中的位势符合位势变化缓慢的要求,因此可以引用固体物理的结果[9]以推论能级的结构形成能带. 真空应在第一能带内,而其上的能带中的能级为激发态.

由物理的直观,真空能级应取相应于波矢 K 为很小时的能级,即:

$$E(K)=\frac{K^2}{2m}+V_0+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|V_n|^2}{\frac{K^2}{2m}-\frac{(K-n)^2}{2m}}, \tag{28}$$

$$\psi_K(q)=Ne^{i2\pi qK}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n}{\frac{K^2}{2m}-\frac{(K-n)^2}{2m}} e^{-i2\pi nq}\right]. \tag{29}$$

为了与 Callan 等人提出的 θ 真空相比较,我们引入

$$\theta \equiv 2\pi K. \tag{30}$$

(29), (30) 成为

$$E(\theta)=\frac{\theta^2}{8\pi^2 m}+V_0+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|V_n|^2}{\frac{\theta^2}{8\pi^2 m}-\frac{\left(\frac{\theta}{2\pi}-n\right)^2}{2m}}, \tag{31}$$

$$|\theta\rangle=N\int e^{i\theta q}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n}{\frac{\theta^2}{8\pi^2 m}-\frac{\left(\frac{\theta}{2\pi}-n\right)^2}{2m}} e^{-2\pi inq}\right]|q\rangle dq. \tag{32}$$

现在把得到的 $E(\theta)$ 和 $|\theta\rangle$ 与 Callan 等的结果相比较.

1. 能级随 θ 的变化: Callan 等[5]由稀薄气体近似得到能级 E_1 为

$$E_1(\theta)=E_0-2\cos\theta VD\exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2}\right). \tag{33}$$

其中 V 是四度体积, D 是与瞬子参数有关的量从上式看出 $E_1(\theta)$ 随 θ 的增加而增加,即

$$\frac{dE_1}{d\theta}>0. \quad 当 \quad \theta \sim 0 \tag{34}$$

另一方面，由能带结构求得的 (31) 式可得

$$\frac{dE(\theta)}{d\theta}=\frac{\theta}{4\pi^2 m}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2m|V_n|^2}{n^3\pi\left(1-\frac{\theta}{n\pi}\right)^2}. \tag{35}$$

注意到 $m\sim\frac{1}{g^2}$, $V_n\sim\frac{1}{g^2}$ 因此对足够小的 θ 及 g_1 总有

$$\frac{dE}{d\theta}<0, \tag{36}$$

只有当 g 足够大(保留到 $n=1$ 的项)，$\frac{\theta}{4\pi^2 m}>\frac{2m|V_1|^2}{\pi}$ 时，才有 $\frac{dE}{d\theta}>0$. 故由式 (22) 定义的 θ 真空能级随 θ 的变化行为与 [5] 中定义的 θ 真空不一样.

2. 态矢的比较： 就态矢而言，式 (32) 所定义的 θ 真空与 Callan 等人定义的 θ 真空看来很不相象，为说明这点在 (32) 中取 $n=1$ 的项作近似并将 $\left(1+\frac{\theta}{\pi}\right)$ 近似取作 1，则有

$$|\theta\rangle\approx N\int e^{i\theta q}\left[1+\frac{D}{g^2}e^{-2\pi iq}\right]|q\rangle dq, \tag{37}$$

也即

$$\psi_\theta(q)\approx N\left(1+\frac{D}{g^2}e^{-2\pi iq}\right)e^{i\theta q}. \tag{38}$$

我们分别看三种情形；g 很大时，g 很小时以及 g 使 $D/g^2\approx 1$ 时的情形；

$$\begin{aligned} &D/g^2\ll 1; \quad |\psi|^2\sim N^2\\ &D/g^2\approx 1; \quad |\psi|^2\sim N^2|(1+e^{-2\pi iq})|^2\\ &D/g^2\gg 1; \quad |\psi|^2\sim N^2\left(\frac{D^2}{g^4}+\frac{2D}{g^2}\cos 2\pi q\right)\end{aligned} \tag{39}$$

在第一，第三种情形里不同 q 的权重几乎一样，第二种情形里 q 为半整数的权重为 0，但 q 为其它值时都不为零，所以不论哪种情形都与 Callan 等提出的 θ 真空对应的

$$|\psi_1|^2\sim N^2\delta(q-n) \tag{40}$$

不同.

五、对态矢的要求

Yang-Mills 场具有约束方程

$$C^a(A)=\nabla_i\dot{A}_i^a+f_{abc}A_i^b\dot{A}_i^c=0, \tag{41}$$

量子化后要求物理态满足

$$C^a(A)|\psi\rangle=0. \tag{42}$$

另一方面，在 temporal 规范下理论对于与时间无关的变换不变

$$\begin{aligned} &A_i\to U_\lambda A_i U_\lambda^{-1}+iU_\lambda\nabla_i U_\lambda^{-1},\\ &U_\lambda=e^{i\lambda^a(x)T_a}.\end{aligned} \tag{43}$$

上述变换可由一么正算符 e^{iQ_λ} 完成

$$Q_\lambda = \int d^3x \dot{A}_i^a(\nabla_i\lambda^a + f_{abc}A_i^b\lambda^c). \tag{44}$$

对于这一类变换,其参量函数有下列性质

$$|\boldsymbol{x}| \to \infty, \quad \lambda^a(\boldsymbol{x}) \to 0 \tag{45}$$

则可用分部积分将 (44) 化为

$$Q_\lambda = -\int d^3x \lambda^a(\boldsymbol{x})(\nabla_i\dot{A}_i^a + f_{abc}A_i^b\dot{A}_i^c), \tag{46}$$

所以物理态必须满足

$$e^{iQ_\lambda}|\psi\rangle = |\psi\rangle. \tag{47}$$

因此物理态可构成如下:

$$|A_i(\boldsymbol{x})\rangle_{\text{phys}} = \int [D\lambda^a(\boldsymbol{x})]e^{iQ_\lambda}|A_i(\boldsymbol{x})\rangle, \tag{48}$$

积分是对所有满足条件 (31) 的 $\lambda^a(\boldsymbol{x})$ 的泛函积分. Callan 等选择的 $|A_i(\boldsymbol{x})\rangle$ 是绕数为 0 的态 $|0\rangle$, e^{iQ_λ} 中含有 (5) 式的 T, T^2, T^3, $\cdots$, T^{-1}, $(T^{-1})^2$, $\cdots$因此自然 (48) 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n|n\rangle \tag{49}$$

的形式.

积分形式的态矢 (32) 事实上也符合 (48), 只不过其 $|A_i(\boldsymbol{x})\rangle$ 是一个积分

$$|A_i(\boldsymbol{x})\rangle = \int_0^1 a(q)|q\rangle dq, \tag{50}$$

在 T, T^2, $\cdots$, T^{-1}, $(T^{-1})^2$, $\cdots$ 作用下就遍及整个 q 空间.

Callan 等构造的

$$|\theta\rangle = \Sigma e^{in\theta}|n\rangle$$

很易证明其满足

$$T|\theta\rangle = e^{i\theta}|\theta\rangle. \tag{51}$$

现在证明 (32) 式的 $|\theta\rangle$ 也满足 (51):

我们将 (32) 改写成

$$|\theta\rangle = N\int e^{i\theta q}[1 + \Sigma A n e^{-2\pi i n q}]|q\rangle dq. \tag{52}$$

由于 $|q\rangle$ 是 Q 的本征态,所以上式可写成

$$|\theta\rangle = N\int e^{i\theta Q}[1 + \Sigma A n e^{-2\pi i n Q}]|q\rangle dq. \tag{53}$$

将 T 作用到上式两端,得

$$\begin{aligned}
T|\theta\rangle &= T\left\{N\int e^{i\theta Q}[1 + \Sigma A n e^{-2\pi i n Q}]|q\rangle dq\right. \\
&= \int N\{T e^{i\theta Q}T^{-1}T[1 + \Sigma A n e^{-2\pi i n Q}]T^{-1}T|q\rangle dq \\
&= \int N\{e^{i\theta(Q+1)}[1 + \Sigma A n e^{-2\pi i n(Q+1)}]|q+1\rangle dq \\
&= N\int e^{i\theta(q+2)}[1 + \Sigma A n e^{-2\pi i n(q+2)}]|q+1\rangle dq
\end{aligned}$$

$$= N\int e^{i\theta}e^{i\theta q'}[1+\Sigma A_n e^{-2\pi i n q'}]|q'\rangle dq'$$

$$= e^{i\theta}|\theta\rangle. \tag{54}$$

在上面的推导中，我们用了变量变换 $q' = q + 1$ 及 $e^{-2\pi i} = 1$ 的结果.

由此看出，由动力学的机制导出的 θ 真空的态矢 $|\theta\rangle$ 也满足约束方程的要求以及在 T 作用下只改变一个相因子.

作者感谢朱洪元先生对本工作的支持及讨论.

参　考　文　献

[1] A. Belavin et al., *Phys. Lett.*, **59B**(1975), 85.
[2] G. t'Hooft, *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976), 8.
[3] C. Callan et al., *Phys. Lett.*, **63B**(1976), 334.
[4] R. Jackiw and Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976), 172.
[5] C. Callan et al., *Phys. Rev.*, **D17**(1978), 2717.
[6] Khalil et al., *Phys. Rev.*, **D17**(1978), 486.
[7] R. Jackiw, *Rev. of Mod. Phys.*, **49**(1977), 681.
[8] 王滋、刘耀阳、汪克林、鲍锡明，自然杂志，2(1979)，471.
[9] 谢希德、方俊鑫，"固体物理学"第八章.
[10] M. Creutz and T. N. Tudron, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 2978.

THE ENERGY BAND STRUCTURE OF THE θ-VACUUM

Wang Ming-zhong　Zheng Xi-te　　Wang Ke-lin

(Chengtu University of Science and Technology)　*(University of Science and Technology of China)*

Xian Ding-chang　　Zhang Zheng-gang

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)　*(Chengtu Institute of Geology)*

Abstract

We show that in dividing the Lagrangian of a pure Yang-Mills field system written in the winding number space into the "kinetic" and "potential" energy parts, the "potential" energy part corresponds to a periodic potential. Therefore, by analogy to the results of the solid state physics, the lowest energy state of the system are shown to have the energy band structure. Comparison of such structure with the θ-vacuum is made. The vacuum state established in this way is shown to satisfy the general requirements satisfied by the θ-vacuum.