第3卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 6
1979年11月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1979

强形式 PCAC 的应用

何祚庥 黄涛
(中国科学院理论物理研究所) (中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文讨论了轴矢流散度的场流关系式. 如果赝标介子存在有一系列的径向激发态, 轴矢流算符的散度将与赝标介子及其激发态场量的和式相等同[1]. 由此可以对一系列过去由 PCAC 和低能定理曾得到的结果给出确定的修正, 计算结果表明这些修正与实验结果相符合.

一、引言

由复合粒子场论所能得到的一个有兴趣的结果是能导出一系列的场流关系式, 而这些场流关系式又有"强形式"[1]和"弱形式"[2]之分, 对于不同类型的问题有不同的应用.

早在文献[1]中, 当假定了 B-S 方程的完备性以后, 曾从复合粒子场论导出轴矢流算符的散度存在下述关系式("强形式" PCAC)[1)]

$$i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\phi}(x)\lambda\gamma_\mu\gamma_5\phi(x) = -4i\sum_{(P)}\frac{f_2^P(0,m_P^2)}{m_p}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\varphi_\lambda^P(x). \tag{1.1}$$

其中 λ 是 Gell-Mann 矩阵, $\sum\limits_{(P)}$ 是对所有赝标介子求和, m_p、$f_2^p(0, m_P^2)$、$\varphi_p(x)$ 是相应的赝标介子质量、零点波函数和场量. 由于目前实验上还只发现一组 $J^{pc}=0^{-+}$ 的九重态, 因而在忽略高激发态的近似下就得到

$$i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\phi}(x)\lambda\gamma_\mu\gamma_5\phi(x) \simeq -4i\frac{f_2^P(0,m_P^2)}{m_p}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\varphi_p(x). \tag{1.2}$$

后来又在文献[2]中引进了"弱形式"的 PCAC, 即在物理态上, 存在着轴矢流的散度与赝标介子的等同关系, 例如对于 π 介子(在 π 介子质壳上)

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\phi}(x)T^\pm\gamma_\mu\gamma_5\phi(x) = 2\sqrt{2}\,m_\pi f_2^\pi(0,m_\pi^2)\varphi_{\pi^\pm}(x) \tag{1.3}$$

如果存在 π 介子的激发态 π'、π''、$\cdots$, 那么, 在各自的质壳上, 也有

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\phi}(x)T^\pm\gamma_\mu\gamma_5\phi(x) = 2\sqrt{2}\,m_{\pi'}f_2^{\pi'}(0,m_{\pi'}^2)\varphi_{\pi'^\pm}(x); \tag{1.4}$$

本文 1978 年 5 月 12 日收到.

1) 尽管高激发态的引入已不再保持 PCAC 的原意, 本文仍沿用 PCAC 这一名词.

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}(x)T^{\pm}\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)=2\sqrt{2}\ m_{\pi''}f_2^{\pi''}(0,\ m_{\pi''}^2)\varphi_{\pi''}{}^{\pm}(x),\tag{1.5}$$

....

式(1.3)—(1.5)等都是在物理态矩阵元上成立，而且 π、π'、π''、⋯分别在各自的质壳上．“强形式”和“弱形式”虽然在形式上有所区别，但实质上是相通的．“强形式”探讨的是流算子和场算子间的关系，“弱形式”却仅在物理矩阵元上成立．“强形式”的场流关系式如果“投影”到物理矩阵元或质壳上，就自动得到“弱形式”．在以前的文章中，我们曾探讨过“弱形式”场流关系式的应用，本文将探讨“强形式” PCAC 的应用．

“强形式”的场流关系式探讨的是层子流算子和复合场场量之间的关系．若要将此关系应用到具体问题上，就要设法和各个跃迁矩阵元联系起来，例如，将式(1.1)作用在任意的态矢量 $\langle\beta,\cdots|$ 和 $|\alpha,\cdots\rangle$ 上，就有

$$\begin{aligned}&\left\langle\beta,\cdots\left|i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}(x)\lambda\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)\right|\alpha,\cdots\right\rangle\\&=-4i\sum_{(P)}\frac{f_2^P(0,\ m_P^2)}{m_p}\left\langle\beta,\cdots\left|\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\varphi_\lambda^P(x)\right|\alpha,\cdots\right\rangle\\&=-4i\sum_{(P)}\frac{f_2^P(0,\ m_P^2)}{m_p}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\langle\beta,\cdots|J_\lambda^P(x)|\alpha,\cdots\rangle\Big/q^2+m_P^2.\end{aligned}\tag{1.6}$$

其中 $q^2=(P_\beta+\cdots-P_\alpha-\cdots)^2$，如果进一步假定极点上的留数可用相应的物理矩阵元来代替(即认为这一留数在物理矩阵元邻近是慢变函数)，即有

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\langle\beta,\cdots|J_\lambda^P(x)|\alpha,\cdots\rangle\simeq\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\langle\beta,\cdots|J_\lambda^P(x)|\alpha,\cdots\rangle|_{q^2=-m_P^2},\tag{1.7}$$

式(1.6)就变成为

$$\begin{aligned}&\left\langle\beta,\cdots|i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}(x)\lambda\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)|\alpha,\cdots\right\rangle\\&\simeq4i\sum_{(P)}\frac{f_2^P(0,\ m_P^2)m_p\langle\beta,\cdots|J_\lambda^P(x)|\alpha,\cdots\rangle|_{q^2=-m_P^2}}{q^2+m_P^2}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

其中 $\langle\beta,\cdots|J_\lambda^P(x)|\alpha,\cdots\rangle|_{q^2=-m_P^2}$ 是和各具体物理过程相联系的物理矩阵元，而式(1.8)中与四动量传递 q^2 的依赖关系仅表现在极点上．这样，式(1.8)就可能和各具体物理过程联系起来并用来计算具体物理问题．例如对于 $\Delta s=0$，$\Delta s=1$ 的流分别有

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}(x)T^{\pm}\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)=\sum_{(\pi)}2\sqrt{2}\ m_\pi f_2^\pi(0,\ m_\pi^2)\varphi_\pi(x),\tag{1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}(x)V^{\pm}\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)=\sum_{(K)}2\sqrt{2}\ m_K f_2^K(0,\ m_\pi^2)\varphi_K(x),\tag{1.10}$$

其中 $T^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1\pm iT_2)$，$V^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1\pm iV_2)$．对于形式(1.9)和(1.10)实际上它是“强形式” PCAC，(1.1)加上假定(1.7)得到的．近来 C. A. Dominguez 所提议的广义赝矢流部分近似守恒律(EPCAC)[3] 与形式(1.9)和(1.10)是一致的，只不过这里是由复合粒子场论加上式(1.7)的假定推导出的结果．其所用常数间的关系是

$$f_\pi = 2\sqrt{2}\,\frac{f_2^\pi(0, m_\pi^2)}{m_\pi}, \quad f_K = 2\sqrt{2}\,\frac{f_2^K(0, m_K^2)}{m_K}. \tag{1.11}$$

Dominguez 在文献[3]中曾利用所假定的 EPCAC 以及点模型场论的极点近似式导出一个对哥德柏格-屈门（Goldberg-Treiman）关系的普适修正式．本文将在第二节中从复合粒子场论的观点推导出 G-T 关系的普适修正项．在第三节中给出这一普适修正项在许多具体问题中的应用，这些应用大多是文献[3]中所没有讨论过的问题，在最后一节对一些问题进行讨论．

二、G-T 关系的普适修正项

在引言中，为了讨论早先推出的场流关系式(1.1)（即强形式的 PCAC）与 Dominguez 的 EPCAC 的关系，曾做了假定(1.7)从而得到式(1.9)和(1.10)，表明如何从强形式的 PCAC 得到 EPCAC．从这一节开始，直接从强形式 PCAC(1.9)和(1.10)式出发讨论具体问题．

由相对论不变振幅的分析可知

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{B}'|A_\mu^\pm(0)|\mathrm{B}\rangle\\&=\sqrt{\frac{m_{\mathrm{B}}m_{\mathrm{B}'}}{E_{\mathrm{B}}E_{\mathrm{B}'}}}\,\bar{u}(\boldsymbol{p}')T^+[\gamma_\mu\gamma_5 g_A(q^2)+q_\mu\gamma_5 g_p(q^2)]u(\boldsymbol{p}).\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 B、B′ 是重子，$q=p'-p$．对(2.1)式取四散度，就有

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{B}'|i\partial_\mu A_\mu^\pm(0)|\mathrm{B}\rangle\\&=\sqrt{\frac{m_{\mathrm{B}}m_{\mathrm{B}'}}{E_{\mathrm{B}}E_{\mathrm{B}'}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma_5\tau^+D_{\mathrm{B}}(q^2)u(\boldsymbol{p}),\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中

$$D_{\mathrm{B}}(q^2)=(m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{B}'})g_A(q^2)+q^2 g_p(q^2). \tag{2.3}$$

将式(1.9)代入到(2.2)式的左边就得到

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{B}'|i\partial_\mu A_\mu^\pm(0)|\mathrm{B}\rangle\\&=-2\sqrt{2}\,i\sum_{(P)}^{\pi_n}\frac{f_2^P(0, m_P^2)m_P\langle \mathrm{B}'|J^P(0)|\mathrm{B}\rangle}{q^2+m_P^2}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

式(2.4)是多个单极点的求和式，通分母即将所有的极点抽出来，定义 $G_{\mathrm{BB}'\pi}(q^2)$

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{B}'|i\partial_\mu A_\mu^\pm(0)|\mathrm{B}\rangle\\&=\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{B}}m_{\mathrm{B}'}}{E_{\mathrm{B}}E_{\mathrm{B}'}}}\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma_5 u(\boldsymbol{p})\frac{4m_\pi f_2^\pi(0, m_\pi^2)G_{\mathrm{BB}'\pi}(q^2)}{(q^2+m_\pi^2)(q^2+m_{\pi'}^2)\cdots(q^2+m_{\pi_n}^2)}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

比较式(2.4)和(2.5)可得

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{m_{\mathrm{B}}m_{\mathrm{B}'}}{E_{\mathrm{B}}E_{\mathrm{B}'}}}\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma_5 T^+u(\boldsymbol{p})G_{\mathrm{BB}'\pi}(q^2)=\sum_{(P)}\frac{m_P f_2^P(0, m_P^2)}{m_\pi f_2^\pi(0, m_\pi^2)}\\&\quad\cdot\frac{(q^2+m_\pi^2)\cdots(q^2+m_{\pi_n}^2)}{(q^2+m_P^2)}\langle \mathrm{B}'|J^P(0)|\mathrm{B}\rangle.\end{aligned} \tag{2.6}$$

由式(2.2)、(2.3)和(2.5)延拓 q^2 到零给出一个关系式

$$(m_B + m_{B'})g_A(0) = \frac{4f_2^\pi(0, m_\pi^2)G_{BB'\pi}(0)}{m_\pi m_\pi^{2\prime} m_\pi^{2\prime\prime}\cdots m_{\pi_n}^2}. \tag{2.7}$$

如果假定在式(2.5)中抽出极点以后，$G_{BB'\pi}(q^2)$ 是缓变函数，即假定

$$G_{BB'\pi}(0) \simeq G_{BB'\pi}(-m_\pi^2), \tag{2.8}$$

这样就将常数 $G_{BB'\pi}(0)$ 与物理值联系起来. 从式(2.6)可知

$$G_{BB'\pi}(-m_\pi^2) = (m_\pi^{2\prime} - m_\pi^2)(m_\pi^{2\prime\prime} - m_\pi^2)\cdots(m_{\pi_n}^2 - m_\pi^2)g_{BB'\pi}, \tag{2.9}$$

其中 $g_{BB'\pi}$ 是物理耦合常数

$$\langle B'|J^{\pi+}(0)|B\rangle = \sqrt{\frac{m_B m_{B'}}{E_B E_{B'}}}\,\bar{u}(\boldsymbol{p}')\gamma_5 T^+ u(\boldsymbol{p}) g_{B'B\pi}. \tag{2.10}$$

将(2.8)和(2.9)代入到式(2.7)可得

$$(m_B + m_{B'})g_A = \frac{4f_2^\pi(0, m_\pi^2)}{m_\pi}(1 - \Delta_{B'B\pi})g_{BB'\pi}. \tag{2.11}$$

其中 $\Delta_{B'B\pi}$ 定义为

$$(1 - \Delta_{B'B\pi}) = \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\pi^{2\prime}}\right)\left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\pi^{2\prime\prime}}\right)\cdots\left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_{\pi_n}^2}\right). \tag{2.12}$$

可以见到 $\Delta_{B'B\pi}$ 与 B 和 B′ 无关，仅依赖于 π 介子谱，因此

$$\Delta_{B'B\pi} = \Delta_\pi, \tag{2.13}$$

即

$$(1 - \Delta_\pi) = \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\pi^{2\prime}}\right)\left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\pi^{2\prime\prime}}\right)\cdots\left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_{\pi_n}^2}\right). \tag{2.12′}$$

如果忽略 π 介子高激发态的贡献，只考虑 π 介子的贡献，即在式(2.12′)中取 $m_\pi'\cdots m_{\pi_n}$ 趋于无穷大，就得到 $\Delta_\pi = 0$，此时式(2.11)就给出通常的 G-T 关系式，那么 Δ_π 就可以看作对 G-T 关系的修正项. 由于目前 π 介子的高激发态还没有被发现，Δ_π 从理论上还不能计算出来，暂且作为一个参量来考虑. 如果将实验值

$$g_A = -1.250 \pm 0.009,$$

$$\sqrt{2}\, f_\pi = f_\pi^c = (0.9442 \pm 0.0008)m_{\pi^+}\,^{1)};$$

$$g_{np\pi^+} = -\sqrt{2}\, g_{NN\pi};$$

$$\frac{g_{NN\pi}^2}{4\pi} = 14.64 \begin{matrix} +0.54 \\ -0.72 \end{matrix},$$

代入到(2.11)式可得

$$\Delta_\pi = 0.07. \tag{2.14}$$

类似地对奇异粒子也有相应的表达式，只不过 $\Delta_\pi \to \Delta_K$，如果取实验值

$$g_A^A = -(0.66 \pm 0.05);$$

$$\frac{g_{APK}^2}{4\pi} = 13.5 \pm 2.5;$$

1) f_π 值的大小是与 Cabbibo 角相关，这里所取的 f_π 值相应于取 $\sin\theta = (0.230 \pm 0.003)$，$\tau_\pi = (2.6030 \pm 0.0023) \times 10^{-8}$ 秒. 见文献[4]，此 $\sin\theta$ 值是由重子衰变值确定的.

代人可得

$$\Delta_K = 0.323. \tag{2.15}$$

由于奇异粒子耦合常数的实验误差范围较大，Δ_K 的误差范围也较大．式(2.14)和 (2.15) 标志着 G-T 关系的精确程度，可以见到奇异粒子的 G-T 关系精确程度较差．

由式 (2.13) 告诉我们对 G-T 关系的修正值 Δ_π 与重子无关，因此由式 (2.12) 可以得到

$$\frac{m_p + m_n}{m_\Lambda + m_{\Sigma^-}} = \frac{g^A_{\Sigma\Lambda}}{g_A}\cdot\frac{g_{np\pi^+}}{g_{\Sigma\Lambda\pi^+}}. \tag{2.16}$$

类似地对 K 介子也有

$$\frac{m_\Lambda + m_p}{m_{\Sigma^-} + m_n} = \frac{g^A_{\Sigma n}}{g^A_{\Lambda p}}\cdot\frac{g_{\Lambda pK^+}}{g_{\Sigma^- nK^+}} \tag{2.17}$$

等等关系式．文献 [3] 也获得了这些关系式并给出具体数字表明这些关系式有很好的准确性．这也表明 G-T 关系的修正项在理论上的自洽性．

实际上，$\Delta_{\pi BB'}$ 不仅与重子 B 和 B′ 无关，而且还和具体过程无关，从上面推导的过程可以见到对于任意矩阵元夹上去都成立．

此外，对于一个含 π 介子的物理矩阵元，还可以估计解析延拓的修正，例如任何一个含 π 介子的矩阵元与矩阵元 $\langle\alpha,\cdots|J^\pi(0)|\beta,\cdots\rangle$ 相关，利用式(1.3)得到在质壳上的关系式

$$\begin{aligned}&\langle\alpha,\cdots|J^\pi(0)|\beta,\cdots\rangle|_{q^2=-m_\pi^2}\\&=\frac{(q^2+m_\pi^2)}{2\sqrt{2}\,m_\pi f_2^\pi(0,m_\pi^2)}\cdot\langle\alpha,\cdots|\partial_\mu A_\mu^\pm(0)|\beta,\cdots\rangle|_{q^2=-m_\pi^2}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

然而，通常在应用这种弱形式 PCAC 时还加上解析延拓 $q^2\to 0$，现在来考察对这种解析延拓的修正，即

$$\begin{aligned}&\langle\alpha,\cdots|J^\pi(0)|\beta,\cdots\rangle|_{q^2=0}\\&=\frac{m_\pi}{2\sqrt{2}\,f_2^\pi(0,m_\pi^2)}\langle\alpha,\cdots|\partial_\mu A_\mu^\pm(0)|\beta,\cdots\rangle|_{q^2=0}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

将式(2.5)代入到(2.18)和(2.19)，并利用假定(2.8)式就可以得到

$$\frac{[(q^2+m_\pi^2)\langle\alpha,\cdots|\partial_\mu A_\mu(0)|\beta,\cdots\rangle]_{q^2=-m_\pi^2}}{[(q^2+m_\pi^2)\langle\alpha,\cdots|\partial_\mu A_\mu(0)|\beta,\cdots\rangle]_{q^2=0}} \simeq \frac{1}{1-\Delta_\pi}. \tag{2.20}$$

式(2.20)表明这种解析延拓与真正的物理矩阵元相差一个因子 $(1-\Delta_\pi)$．不难看出，式(2.20)将有许多应用，因为 PCAC 离不开低能定理，而实验观察量却总是在 π 介子的质壳上，因此，将能应用式 (2.20) 获得一个近似的普适的对质壳延拓的修正因子，下一节将讨论这一修正因子对一系列过程的具体影响．

三、关于普适修正因子在一系列具体过程中的应用

由式(2.20)易得出以下一个结果，即有

$$[(q^2+m_\pi^2)\langle\alpha,\cdots|\varphi_\pi(0)|\beta,\cdots\rangle]_{q^2=-m_\pi^2}$$
$$=\frac{1}{f_\pi(1-\Delta_\pi)}\langle\alpha,\cdots|\partial_\mu A_\mu(0)|\beta,\cdots\rangle|_{q^2=0}. \tag{3.1}$$

这意味着在流代数计算中，凡涉及常数 f_π 的都应用 $f_\pi(1-\Delta_\pi)$ 的数值来代替，现在来看一下这一修正所引起的后果.

1.关于 K_{l2} 和 K_{l3}.

在软 π 介子的假设下，易得到 $K_{\mu2}$ 和 $K_{\mu3}$ 的形状因子间一个关系（即 Callen-Treiman 关系）[5]

$$\frac{f_K}{f_\pi^c}=\sqrt{2}\,(f_+(-m_K^2)+f_-(-m_K^2)). \tag{3.2}$$

同样，在软K介子的假设下，可得

$$\frac{f_\pi^c}{f_K}=\sqrt{2}\,(f_+(-m_\pi^2)-f_-(-m_\pi^2)). \tag{3.3}$$

实验上曾对 $f_+(q^2)$ 进行比较精密的测量，如果

$$f_\pm(q^2)=f_\pm(0)\left(1-\lambda_\pm\frac{q^2}{m_\pi^2}\right), \tag{3.4}$$

那么[6]

$$\lambda_+=0.029\pm0.004,$$
$$\lambda_-=0.$$ [7]

令式(3.2)和(3.3)相加可得

$$\left(\frac{f_K}{f_\pi^c}+\frac{f_\pi^c}{f_K}\right)=\sqrt{2}\,(f_+(-m_K^2)+f_+(-m_\pi^2))$$
$$=\sqrt{2}\,f_+(0)\left(2+0.029\times\frac{m_K^2+m_{\pi^0}^2}{m_{\pi^0}^2}\right). \tag{3.5}$$

由 K_{l3} 实验可知 $f_+(0)=0.682$，前面给出的 f_K 和 f_π 值代入到(3.5)式，那么式(3.5)的左边将是 2.027，右边将是 2.418，相差约 16%. 实际上，按照式(3.1)，在考虑了质壳延拓的修正后，应为

$$\frac{f_K}{f_\pi^c(1-\Delta_\pi)}+\frac{f_\pi^c}{f_K(1-\Delta_K)}$$
$$=\sqrt{2}\,f_+(0)\left(2+0.029\times\frac{m_K^2+m_\pi^2}{m_\pi^2}\right). \tag{3.6}$$

这时，式(3.6)的左边便成为 2.526，和右边数值近似地符合1).

2. 关于 K_{l4}

流代数的一个积极结果是能直接算出 K_{l4} 的衰变几率，对于 K_{l4} 衰变

$$K(P)\to\pi_1(q_1)+\pi_2(q_2)+l(k')+\nu_l(k)$$

其矢量部分和赝矢量部分的一般表达式是[8]

---

1) 如果取 Cabbibo 角由 K_{l3} 过程来定，那么理论值将更接近于实验值.

$$\begin{aligned}&\langle\pi_1(q_1)\pi_2(q_2)|A_\lambda^{(1)}(0)|K(P)\rangle\\&=\frac{i}{\sqrt{8q_{10}q_{20}P_0}}\left[\frac{F_1(s,\eta,q^2)}{m_K'}(q_1+q_2)_\lambda+\frac{F_2(s,\eta,q^2)}{m_K}(q_1-q_2)_\lambda\right.\\&\left.\quad+\frac{F_3(s,\eta,q^2)}{m_K}(P-q_1-q_2)_\lambda\right]\end{aligned}\tag{3.7}$$

和

$$\begin{aligned}&\langle\pi_1(q_1)\pi_2(q_2)|V_{\lambda(0)}^{(1)}|\mathrm{K}(P)\rangle\\&=\frac{i}{\sqrt{8q_{10}q_{20}P_0}}\cdot\frac{1}{m_K^3}D(s,\eta,q^2)\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}P_\mu(q_1+q_2)_\nu(q_1-q_2)_\rho.\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 F_1、F_2、F_3、D 是无量纲的形状因子，依存在如下的不变量

$$\begin{aligned}s&=-(q_1+q_2)^2,\\q^2&=(q_1+q_2-P)^2=(k'+k)^2;\\\eta&=-q(q_1-q_2)=P(q_1-q_2).\end{aligned}\tag{3.9}$$

由流代数的计算可知，对 $K^+\to\pi^0\pi^0l^+\nu_e$ 的过程，

$$\begin{aligned}&F_1^{(0,0)}(0,0,-m_K^2)=-\frac{m_K}{f_{\pi^+}}\sqrt{2}\,f_+(-m_K^2)=A,\\&F_2^{(0,0)}(0,0,-m_K^2)=0,\\&F_3^{(0,0)}(0,0,-m_K^2)=-\frac{f_Km_K}{2f_{\pi^+}^2}=B.\end{aligned}\tag{3.10}$$

对于 $K^+\to\pi^+\pi^-l^+\nu_e$ 过程

$$\begin{aligned}&F_1^{(+,-)}(0,0,-m_K^2)=-F_2^{(+,-)}(0,0,-m_K^2)=A;\\&F_3^{(+,-)}=B\left[1-\frac{P(q_1-q_2)}{P(q_1+q_2)}\right];\end{aligned}\tag{3.11}$$

对于 $\bar{K}_0\to\pi^+\pi^0e^-\nu_e$ 过程

$$\begin{aligned}&F_1^{(+0)}(0,0,-m_K^2)=0;\\&F_2^{(+0)}(0,0,-m_K^2)=\sqrt{2}\,A;\\&F_3^{(+0)}(0,0,-m_K^2)=\sqrt{2}\,B\frac{P(q_1-q_2)}{P(q_1+q_2)}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

对于函数 $D(0,0,-m_K^2)$ 可和 $\pi^0\to2\gamma$ 的矩阵元或 $K\to e\nu\gamma$ 矩阵元联系起来[1)]，但实际上它们的贡献很小，可略去不计。因此，在略去形状因子随动量传递的变化后，对 K_{l4}^+ 过程可得

$$\Gamma(K^+\to\pi^+\pi^-e^+\nu_e)=[1.59(\sin\theta F_1^{(+-)})^2+0.31(\sin\theta F_2^{+-})^2]\times10^3\ \text{秒}^{-1}.\tag{3.13}$$

将(3.10)—(3.12)中各有关数值代入，就有

$$\begin{aligned}&\Gamma(K^+\to\pi^+\pi^-e^+\nu_e)=2.49\times10^3\ \text{秒}^{-1},\\&\Gamma(K^+\to2\pi^0e^+\nu_e)=2.08\times10^3\ \text{秒}^{-1},\\&\Gamma(K_L^0\to\pi^-\pi^0e^+\nu_e)=0.81\times10^3\ \text{秒}^{-1}.\end{aligned}$$

1) 较准确一些的说法，还应将 VAAA 的反常项考虑进去，或者和 $\eta^0\to\pi^+\pi^-\gamma$ 联系起来，但也不致改变它的数量级。

如果认为应有(3.1)式的延拓修正，就有

$$F_{1,2}(s, \eta, q^2) \simeq F_{12}(0, 0, -m_K^2) \frac{1}{1-\Delta_\pi},$$
$$F_3(s, \eta, q^2) \simeq F_3(0, 0, -m_K^2) \frac{1}{(1-\Delta_\pi)^2}, \tag{3.14}$$

因而有

$$\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^- e^+\nu_e) = 2.88 \times 10^3 \text{秒}^{-1},$$
$$\Gamma(K^+ \to \pi^0\pi^0 e^+\nu_e) = 2.41 \times 10^3 \text{秒}^{-1}, \tag{3.15}$$
$$\Gamma(K_L^0 \to \pi^-\pi^0 e^+\nu_e) = 0.94 \times 10^3 \text{秒}^{-1}.$$

实验值是

$$\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^- e^+\nu_e) = (2.99 \pm 0.16) \times 10^3 \text{秒}^{-1},$$
$$\Gamma(K^+ \to \pi^0\pi^0 e^+\nu_e) = \left(1.50 \begin{matrix} +1.9 \\ -0.5 \end{matrix}\right) \times 10^3 \text{秒}^{-1}. \tag{3.16}$$

对于过程 $\Gamma(K_L^0 \to \pi^-\pi^0 e^+\nu_e)$，目前实验上只有一个上限值，此结果是在实验的上限之内.

3. 关于 $K_{\pi 2}$ 和 $K_{\pi 3}$

对于 $K_{\pi 2}$ 跃迁矩阵元有如下的普遍表示式[9]，

$$\langle \pi_1\pi_2 | H_W^{PV}(0) | K \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{1}{\sqrt{8P_0k_{10}k_{20}}} \frac{b}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\pi}_1 \cdot \boldsymbol{\pi}_2)(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{K}) \tag{3.17}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}$ 是某一“虚拟子”，它的同位旋表示是 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\pi}_1$、$\boldsymbol{\pi}_2$、$\boldsymbol{K}$ 均是 π 介子的同位旋波函数，b 是相应耦合常数. 对 $K_{\pi 3}$ 可写为

$$-i \langle \pi_1\pi_2\pi_3 | H_W^{PC}(0) | K \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{16P_0k_{10}k_{20}k_{30}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [\boldsymbol{\beta}(\tilde{A} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{K}]. \tag{3.18}$$

其中

$$\tilde{A} = f(s_1, s_2, s_3)(\boldsymbol{\pi}_1 \cdot \boldsymbol{\pi}_2)\boldsymbol{\pi}_3 + f(s_3, s_1, s_2)(\boldsymbol{\pi}_3 \cdot \boldsymbol{\pi}_1)\boldsymbol{\pi}_2 + f(s_2, s_3, s_1)(\boldsymbol{\pi}_2 \cdot \boldsymbol{\pi}_3)\boldsymbol{\pi}_1, \tag{3.19}$$

而

$$f(s_1, s_2, s_3) = A(0) \left[1 - \frac{\sigma}{m_\pi^2}(s_3 - s_0)\right], \tag{3.20}$$

其中 $s_i = -(P - k_i)^2$，$s_0 = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{1}{3}m_K^2 + m_\pi^2$. 在流-流耦合的假定下，可将弱作用哈氏函数写为

$$H_W^h(x) = H_W^{PV}(x) + H_W^{PC}(x) = G_s P_7(x) + G_p S_6(x). \tag{3.21}$$

其中 $P_7(x)$ 是赝标量，并且其变换矩阵和 λ_7 相当，而 $S_6(x)$ 是一标量，其变换矩阵和 λ_6 相当. 由流代数标准的方法，可得出

$$A(0) \left[1 - \frac{2\sigma(m_K^2 - m_\pi^2)}{3m_\pi^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2} f_\pi} b, \tag{3.22}$$

$$A(0)\left[1+\frac{\sigma(m_{K}^{2}-m_{\pi}^{2})}{3m_{\pi}^{2}}\right]=0,$$

因而可导出

$$A(0)=\frac{1}{3\sqrt{2}\,f_{\pi}^{c}}\,b,\quad \sigma=-\frac{3m_{\pi}^{2}}{m_{K}^{2}-m_{\pi}^{2}}=0.26, \tag{3.23}$$

如果考虑到软 π 介子的延拓修正,就应有

$$A(0)=\frac{1}{3\sqrt{2}\,f_{\pi}^{c}(1-\Delta_{\pi})}\,b. \tag{3.24}$$

由 $K_S^0\to\pi^+\pi^-$ 的实验，可定出 $|b|=2.9\times10^{-6}m_{\pi}$，按(3.23)式，可算出 $A(0)=0.72\times10^{-6}$，而按照式(3.24)，可得 $A(0)=0.78\times10^{-6}$，但由 $K_L^0\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 的实验可定出

$$\begin{aligned}|A_L^{+-0}(0)|&=A(0)=(0.82\pm0.03)\times10^{-6},\\ \sigma_L(+-0)&=-0.24\pm0.02,\end{aligned} \tag{3.25}$$

两者很相近.

4. 关于 K_L^0 和 K_S^0 的质量差

在流-流耦合的假设下，用软K介子近似并用到 Weinberg 的求和规则和单个真空态为中间态的情况下,可求出[10]

$$\Delta m=m_{K_L^0}-m_{K_S^0}=0.3\tau_S^{-1} \tag{3.26}$$

如果将软K介子修正算进去,可得

$$\Delta m=0.3\tau_S^{-1}\frac{1}{(1-\Delta_K)^2}=0.65\tau_S^{-1} \tag{3.27}$$

由于 Δ_K 的误差较大,此数值并不很可靠,而实验值是 $\Delta m=(0.48\pm0.02)\tau_S^{-1}$.

5. 关于 KSFR 关系

对于过程 $\rho\to2\pi$，由协变性可知

$$\langle\pi^{\alpha}(\boldsymbol{q})\pi^{\beta}(\boldsymbol{q}')|\rho^{\gamma}(\boldsymbol{P})\rangle=\frac{i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}e_{\nu}(q'-q)_{\nu}}{\sqrt{8q_0'q_0P_0}}g_{\rho\pi\pi}. \tag{3.28}$$

从流代数曾得到 $g_{\rho\pi\pi}$ 和 f_{π} 之间的联系,应用软 π 介子近似,再应用 ρ 介子耦合的普适性,最后可得[11]

$$g_{\rho\pi\pi}^{2}=\frac{m_{\rho}^{2}}{2f_{\pi}^{2}}. \tag{3.29}$$

如果将质壳延拓修正加上去,就可得

$$g_{\rho\pi\pi}^{2}=\frac{m_{\rho}^{2}}{2f_{\pi}^{2}(1-\Delta_{\pi})^{2}}. \tag{3.30}$$

这一修正将使 $\rho\to2\pi$ 的宽度从 120MeV 增大到 139MeV，而实验值是 (152±3)MeV.

6. 关于光生 π 介子效应.

应用软 π 介子技巧,可求出光生 π 介子的微分截面是

$$\left\{\frac{|\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{q}|}\frac{d\sigma(\pi^{+})}{d\Omega}\right\}=\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{m_N}{m_N+m_{\pi}}\right)^{2}\left(1-\frac{m_{\pi}}{2m_N}\right)^{2}\frac{g_A}{f_{\pi}^{2}}, \tag{3.31}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 是光子动量，$\boldsymbol{q}$ 是 π 介子动量，将 f_π 的实验值代入(3.31)式，可得

$$\left\{\frac{|\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{q}|}\frac{d\sigma(\pi^+)}{d\Omega}\right\} = 13.5\mu b/st. \tag{3.32}$$

将 $(1-\Delta_\pi)$ 的修正因子计算进去，可得到 $15.7\mu b/st$，而实验值是 $(15.6\pm0.5)\mu b/st$[12].

7. 关于 π–N 散射长度

对于 π 介子 S 波的散射长度，由流代数和软 π 介子近似，可导出一个普遍表示式[13]

$$a_I = -\frac{m_\pi}{4\pi f_\pi^2}\left(1+\frac{m_\pi}{M}\right)^{-1}[I(I+1)-I_T(I_T+1)-2], \tag{3.33}$$

其中 I_T 是指靶核的同位旋，I 是 π 介子和靶核的总同位旋．对于 π–N 散射，就有

$$a_{\frac{1}{2}} = 2\left(1+\frac{m_\pi}{M}\right)^{-1}\frac{m_\pi}{4\pi f_\pi^2}, \tag{3.34}$$

$$a_{\frac{3}{2}} = -\left(1+\frac{m_\pi}{M}\right)^{-1}\frac{m_\pi}{4\pi f_\pi^2}. \tag{3.35}$$

将 f_π 的实验值代进去，就有 $a_{\frac{1}{2}} = 0.173m_\pi^{-1}$, $a_{\frac{3}{2}} = 0.086m_\pi^{-1}$, 考虑了 $(1-\Delta_\pi)$ 的修正，可得 $a_{\frac{1}{2}} = 0.20m_\pi^{-1}$ $a_{\frac{3}{2}} = 0.10m_\pi^{-1}$, 而实验值是 $a_{\frac{1}{2}} = 0.165m_\pi^{-1}$, $a_{\frac{3}{2}} = 0.096m_\pi^{-1}$[14].

8. 关于 $\eta^0\to2\gamma$ 和 $\eta^0\to\pi^+\pi^-\gamma$

这两个过程在文献[3]中曾有详尽的讨论，应用三角形反常和四方形反常可算出

$$\frac{\Gamma(\eta\to\pi^+\pi^-\gamma)}{\Gamma(\eta\to\gamma\gamma)} = \left(\frac{1}{1-\Delta_\pi}\right)^4\frac{1}{f_\pi^4}\cdot\frac{1}{4\pi\alpha}\frac{m_\pi^4}{96\pi^2}(7.48\times10^{-3}). \tag{3.36}$$

将 f_π 的数值和 $(1-\Delta_\pi)$ 的因子代进去，可算出二者之比是 (0.14 ± 0.01), 当 $\Delta_\pi=0$, 其数值是 0.105, 而实验值是 (0.132 ± 0.004).

有兴趣的是，式(3.36)所依据的是 Chanowitz 的计算[15] 其特点是在 $\eta\to\pi^+\pi^-\gamma$ 过程中既有三角形反常的贡献，又有四方形反常的贡献，在早年计算仅考虑三角形反常贡献时[16]，当 $\Delta_\pi=0$ 时，二者之比是 0.17, 考虑了 Δ_π 的修正，将是 0.23, 这和实验值完全不合，并且其修正的趋势也完全相反.

四、结论和存在问题

从以上一些计算可以看出，由强形式 PCAC 所得到的普适的修正项，在一系列具体问题中，理论和实验的符合是很好的．涉及奇异流的 PCAC 的普适修正项一般要比实验数值改得"过头"了一些．如考虑到 Δ_K 的实验值误差较大，其理论和实验结果符合的程度也可以认为符合得较好．

在 Dominguez 一文中曾将这一普适修正项应用来讨论 $\pi^0\to2\gamma$ 的宽度．其结果使理论值略为偏离实验的结果，但仍在实验误差以内．因此，这一数值的偏离也是不重要的．在其余的情况下，理论和实验符合的程度均有显著的改善．可能这里所采用的近似在相当大的范围内具有一定的普适性．进一步可以将这里所用的方法搬用到矢量为主理论应用到具体问题考察强形式矢量为主对一系列过程的影响．

参 考 文 献

[1] 何祚庥、黄涛，物理学报，**23** (1974)，264.
[2] 何祚庥、黄涛，科学通报，**21** (1976)，35.
[3] C. A. Dominguez, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 1350.
[4] M. M. Nagels et al., *Nucl. Phys.*, **B109** (1976), 1.
[5] C. G. Callan and S. B. Treiman, *Phys. Rev. Letters.*, 16(1966), 153.
[6] Particle Properlies, 1976.
[7] J. Lemarne, P. Renton, "A Review of the Experimental Results on Kl_3 form Factors", Nuclear Physics Laboratory, Keble, Rood Oxford England (预印本).
[8] R. E. Marshak, Riazuddin, C. P. Ryan, "Theory of weak Interactious in Particle Physics", p. 485.
[9] 同上书，605—609 页.
[10] S. N. Biswas, *Phys. Rev. Letters.*, **19**(1967), 727.
S. R. Cosslett, *Phys. Rev. Letters.*, **20**(1968), 634.
[11] K. Kawarabayashi and M. Suzuki, *Phys. Rev. Letters.*, **16**(1966), 255.
[12] V. De Alfaro et al., "Currents in Hadron Physics" 240.
[13] S. Weinberg. *Phys. Rev. Letters.*, **17**(1966), 616.
[14] 同[4].
[15] M. S. Chanowitz., *Phys. Rev. Letters.*, **35**(1975), 977.
[16] J. Pasupathy and R. E. Marshak, *Phys. Rev. Letters.*. 17(1966), 888.

ON THE APPLICATIONS OF STRONG PCAC

HE ZUO-XIU

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

HUANG TAO

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this article, we study the field-current relations of the 4-divergence of the axial vector currents. If there exist a series of radial excited state, then 4-divergence of the axialvector current will be identical with the fields of all exciting pseudo-scalar mesons[1]. From this relation, we can derive a definite correction to the matrix elements which obtained by PCAC and low energy theorem in the current algebra calculations. Concrete calculations show all results obtained by those corrections agree with the experiments.