核电荷半径的同位旋相关性及其微观诠释*

雷奕安[1)] 曾谨言[2)]

(北京大学物理学院 北京 100871)

摘要 原子核电荷半径R_c所有的实验数据都表明, R_c系统偏离$A^{1/3}$律, 即随A增大$R_c/A^{1/3}$系统地递减, 而$R_c/Z^{1/3}$则比较接近于一个常量. 原子核巨单极共振能量$E_x \propto R^{-1}$的大量实验数据也支持这一结论. 根本原因在于$A^{1/3}$律与同位旋无关, 而$Z^{1/3}$律已部分反映了同位旋的影响. 基于壳模型, 给出了$Z^{1/3}$律的微观诠释. 壳模型中质子和中子谐振子势强度参数ω_p和ω_n的差异, 可以用$Z^{1/3}$律说明. 基于与Wigner的原子核同位旋多重态质量公式(IMME)相似的理论考虑, 提出了核电荷半径改进的$Z^{1/3}$律.

关键词 核电荷半径 同位旋相关性 改进的$Z^{1/3}$律 巨单极共振能量

1 引言

核电荷半径是原子核最基本的粗块性质(bulk property)之一. 基于核力的饱和性和核物质的近似不可压缩性, 通常用下列唯象的$A^{1/3}$律[1, 2]来描述核电荷半径R_c从轻核到重核的变化(A为核子数)

$$R_c = r_0 A^{1/3}. \tag{1}$$

目前已积累了很丰富的核电荷半径的数据[3, 4], 它们分别来自高能电子散射(e^-), μ原子X射线谱, 原子K_α X射线的同位素移动(K_αIS)和原子光谱的同位素移动(OIS). 对于很轻的原子核, 由于核子数A很小以及电荷分布的短周期壳效应(包括形变变化等), R_c随A的变化往往有大幅度涨落, 目前尚未找到一个简单的平滑变化的表述式. 实验数据分析表明, 对于不太轻原子核($A \geqslant 40$)的电荷半径, 式(1)中的半径参数r_0并不为一常量. 随A增大, r_0系统地递减, 即对于轻核, $r_0 \approx 1.30$fm, 而对于重核, $r_0 \approx 1.20$fm.

多年前, 基于对当时β稳定核电荷半径很有限的实验数据, 文献[5—7]提出了如下的$Z^{1/3}$律(Z为核内质子数)

$$R_c = r_p Z^{1/3}. \tag{2}$$

实验数据分析表明, 与$A^{1/3}$律不同, 对于轻核和重核, r_p基本上保持为常量, $r_p \approx 1.635$fm. $Z^{1/3}$律优于$A^{1/3}$律的根本原因在于: $A^{1/3}$律与同位旋无关. 在自然界中, β稳定核的同位旋$T_z = (N-Z)/2 = (A-2Z)/2$随A增大而递增[1], 即

$$\left(\frac{N-Z}{3A}\right)_{\beta最稳定核} \approx 2.0\times10^{-3}A^{2/3},$$

或 $$T_z\Big|_{\beta最稳定核} \approx 3.0\times10^{-3}A^{5/3}. \tag{3}$$

比较式(1)和式(2), 得

$$r_0 = (Z/A)^{1/3} r_p. \tag{4}$$

对于很轻的β稳定核, $T_z \approx 0$, $(Z/A) \approx 1/2$, 按$r_p \approx 1.635$fm, 可得$r_0 \approx 1.30$fm. 而对于很重的β稳定核(例如^{208}Pb), $(Z/A)^{1/3} \approx 0.733$, $r_0 \approx 1.20$fm. 由此, 可以理解为什么$A^{1/3}$律的半径常数r_0随A增大而逐步减小这一实验现象. 与$A^{1/3}$律不同, $Z^{1/3}$律本身是同位旋相关的. 利用$Z = A/2 - T_z$, 容易得出, 在$O(T_z/A)$一级近似下

$$R_c = r_p Z^{1/3} = r_p (A/2 - T_z)^{1/3} \approx \frac{r_p}{2^{1/3}} A^{1/3}\left(1 - \frac{N-Z}{3A}\right), \tag{5}$$

2006 – 11 – 28 收稿
* 国家自然科学基金(10575004, 10675006, 10435010)资助

1) E-mail: yalei@pku.edu.cn
2) E-mail: jyzeng@pku.edu.cn

取 $r_{\rm p}\approx 1.635{\rm fm}$, 并利用式(3), 可得

$$R_{\rm c}\approx 1.30A^{1/3}(1-2.0\times 10^{-3}A^{2/3}){\rm fm}. \tag{6}$$

尽管核电荷半径的 $Z^{1/3}$ 律已提出多年[5] (在中文期刊上), 但并未引起人们广泛注意. 20世纪90年代, 有人注意到 $A^{1/3}$ 律与实验观测有明显的偏离. 例如Nerlo-Pomorska & Pomorski[8] 提出了对 $A^{1/3}$ 律的如下修正, 即在 $A^{1/3}$ 律的基础上, 加上 (T_z/A) 的线性项修正,

$$R_{\rm c}=\begin{cases}1.256A^{1/3}\left(1-0.202\dfrac{N-Z}{A}\right){\rm fm},\\ A\geqslant 38.\\ 1.240A^{1/3}\left(1-0.141\dfrac{N-Z}{A}-\dfrac{1.646}{A}\right){\rm fm},\\ A<38.\end{cases} \tag{7}$$

Warda等[9] 用相对论平均场(RMF)理论计算了同位素链中各原子核的电荷半径, 发现它们近似随 (T_z/A) 线性变化. 他们计算所得的核电荷分布半径, 可以用下式近似拟合

$$R_{\rm c}=1.237A^{1/3}\left(1-0.157\frac{N-Z}{A}-0.646\frac{1}{A}\right){\rm fm}. \tag{8}$$

文献[3,4]中给出了迄今最完整的核电荷方均根(rms)半径 $\langle r^2\rangle^{1/2}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}R_{\rm c}$ 实验数据. 注意, 核电荷半径还依赖于核形变, 通常只考虑最重要的四极形变 β 的影响. 在考虑形变 β 的影响后, 核电荷半径较球形情况略有增加. 式(1)可改记为

$$R_{\rm c}=\mathring{r}_0\left(1+\frac{5}{8\pi}\beta^2\right)A^{1/3}, \tag{9}$$

$\mathring{r}_0$ 相当于球形核($\beta=0$)情况下的核电荷半径常数. 变形核的四极形变 β 可以根据其内禀电四极矩 Q_0 定出. 偶偶变形核的 Q_0 实验值可以利用基态($I^\pi=0^+$)到第一激发态($I^\pi=2^+$)的约化电四极跃迁几率 $B({\rm E2},\uparrow)=5e^2Q_0^2/16\pi$ 来提取. 文献[10]中给出了偶偶核 Q_0 现今已有的的实验数据. 图1给出了 $A\geqslant 40$ β 最稳定核的电荷分布半径常数 $\mathring{r}_0$ 的变化. 可以看出, $\mathring{r}_0$ 随 A 增大而递减, 即对于轻核, $\mathring{r}_0\approx 1.30{\rm fm}$, 而对于很重核, $\mathring{r}_0\approx 1.20{\rm fm}$. $R_{\rm c}=\mathring{r}_0\left(1+\dfrac{5}{8\pi}\beta^2\right)A^{1/3}$, $R_{\rm c}=\sqrt{\dfrac{5}{3}\langle r\rangle^2}$, $\sqrt{\langle r\rangle^2}$ 是方均根半径. 文献[10]给出了偶偶核从基态($I^\pi=0^+$)到第1激发态($I^\pi=2^+$)的约化电四极跃迁几率 $B({\rm E2},\uparrow)$, 并按 $Q_0=\sqrt{\dfrac{16\pi}{5}}\left[\dfrac{B({\rm E2}\uparrow)}{e^2}\right]^{1/2}$ 提取原子核内禀电四极矩 Q_0 的值. 在本文中, 四极形变参数 β 是按下列关系, $Q_0=\dfrac{3ZR_{\rm c}^2}{\sqrt{5\pi}}\beta(1+0.158\beta)$ 以及 Q_0 的实验值计算出来的. 在文献[10]中, 则是按 $Q_0=\dfrac{3ZR_{\rm c}^2}{\sqrt{5\pi}}\beta$ 计算出来的. 当 $\beta\leqslant 0.10$ 时, 这样计算出的 β 是精确的, 但当 $\beta>0.10$ 时, 则不够精确.

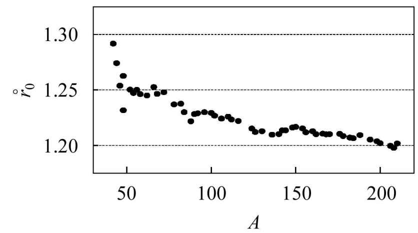

图1 核电荷半径常数 $\mathring{r}_0$ 随 A 的变化

与核半径密切相关的一个重要观测量, 就是原子核的各种巨共振能量. 特别是巨单极共振(GMR)能量 E_x, 它与核半径成反比, $E_x\propto 1/R$. 如核半径的 $A^{1/3}$ 律成立, 则 $E_xA^{1/3}$ 应保持为一个常量(不依赖于 A). 实验数据分析表明, 随 A 增大, $E_xA^{1/3}$ 递增, (尽管 E_x 实验数据的误差比核电荷半径的误差大得多), 对于 $A>50$ 的核, $E_xA^{1/3}\approx(72-83){\rm MeV}$, 并不保持为一个常量, 如图2所示. E_x 数据取自文献[11,12]. 不同实验室给出的同一个原子核的 E_x 实验值往往有一些差别, 本文采用文献[11]表III中列出的, 经过平均的 E_x 值. ^{90}Zr, ^{116}Sn, ^{144}Sm和 ^{208}Pb的 E_x 实验值取自文献[12].

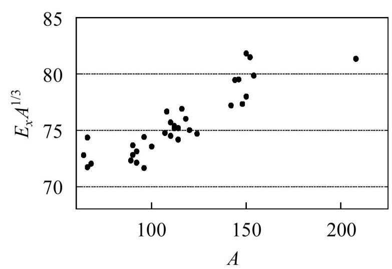

图2 原子核巨单极共振(GMR)能量 $E_x\propto R_{\rm c}^{-1}$ 随 A 的变化

2 核电荷半径 $Z^{1/3}$ 律的微观诠释

众所周知, 在Mayer与Jensen的强自旋轨道耦合壳模型中, 原子核内的质子体系和中子体系分别近似看成为在平均势场(例如, 修正了的谐振子势)中的无相互作用的费米子体系[1,2]. 实验确证, 对于 β 稳定线附近的原子核, 分别存在如下质子壳和中子壳, 即

$$Z=2,8,(14),20,(28),50,82,$$

$$N=2,8,(14),20,(28),50,82,126.$$

为了说明单粒子能级的分布的这种壳结构, 核子的强自旋轨道耦合是必要的. 但对于描述核电荷半径这种粗块性质, 不妨假定满壳附近球形核中的质子 (p) 或中子 (n) 分别在如下谐振子势中运动,

$$V(r)=\frac{1}{2}M\omega^2r^2\,. \tag{10}$$

相应的单粒子能级及其简并度 (已考虑自旋自由度) 分别为

$$\begin{aligned}E_k &= \left(k+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega,\\ f_k &= (k+1)(k+2), \qquad k=0,1,2,\cdots,\end{aligned} \tag{11}$$

质子和中子谐振子势的强度参数 ω 分别记为 $\omega_{\rm p}$ 和 $\omega_{\rm n}$. 一般说来, $\omega_{\rm p}$ 和 $\omega_{\rm n}$ 并不相同, 分别依赖于质子数 Z 和中子数 N. 下面先讨论核质子体系的分布半径, 它涉及质子的能级填布. 对于从 $k=0$ 到 $k=K$ 壳都被质子填满的满壳核, 质子总数 Z 为

$$\begin{aligned}Z &= Z(K)=\sum_{k=0}^{K}(k+1)(k+2)=\\ &\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)\approx\frac{1}{3}(K+2)^3.\end{aligned} \tag{12}$$

按照位力 (virial) 定理, $\langle V\rangle=\frac{1}{2}M\omega_{\rm p}^2\langle r^2\rangle_k=\frac{1}{2}E_k$, 可给出

$$\langle r^2\rangle_k=\left(k+\frac{3}{2}\right)\hbar/M\omega_{\rm p}\,. \tag{13}$$

对于满壳核, 质子分布的方均半径 $\langle r^2\rangle_{\rm p}$ 为

$$\begin{aligned}\langle r^2\rangle_{\rm p} &= \frac{1}{Z(K)}\sum_{k=0}^{K}(k+1)(k+2)(k+3/2)\frac{\hbar}{M\omega_{\rm p}}\approx\\ &\frac{3}{4}(K+2)\frac{\hbar}{M\omega_{\rm p}}\,.\end{aligned} \tag{14}$$

联合式 (12) 和 (14), 可得

$$\hbar\omega_{\rm p}=\frac{3\hbar^2}{4M\langle r^2\rangle_{\rm p}}(3Z)^{1/3}, \tag{15}$$

对于中子体系, 类似可得

$$\hbar\omega_{\rm n}=\frac{3\hbar^2}{4M\langle r^2\rangle_{\rm n}}(3N)^{1/3}, \tag{16}$$

$\omega_{\rm p}$ 和 $\omega_{\rm n}$ 分别依赖于核内的质子数和中子数. 为保证质子和中子分布半径相同, $\langle r^2\rangle_{\rm p}=\langle r^2\rangle_{\rm n}=\langle r^2\rangle$, 要求

$$\frac{\omega_{\rm p}}{\omega_{\rm n}}=\left(\frac{Z}{N}\right)^{1/3}. \tag{17}$$

对于很轻的 β 稳定核, $N\approx Z\approx A/2$

$$\begin{aligned}\hbar\omega_{\rm p}\approx\hbar\omega_{\rm n}\approx\hbar\omega_0 &= \frac{3\hbar^2}{4M\langle r^2\rangle}\left(\frac{3A}{2}\right)^{1/3}=\\ &\frac{5\hbar^2}{4MR_{\rm c}^2}\left(\frac{3A}{2}\right)^{1/3}.\end{aligned} \tag{18}$$

如用 $A^{1/3}$ 律式 (1) 代入, 并取 $r_0=1.20$fm, 则得

$$\hbar\omega_0\approx41A^{-1/3}\text{MeV}. \tag{19}$$

此乃原子核物理文献中常见的公式[1], 它表示壳模型谐振子势强度参数 ω_0 近似与 $A^{1/3}$ 成比例. 注意, 式 (19) 是与同位旋无关的. 对于轻核, $A^{1/3}$ 律中的半径常数 $r_0\approx1.30$fm. 按此参数值, 式 (19) 应为 $\hbar\omega_0\approx35.1A^{-1/3}$MeV, 它只适用于轻核, 而对于重核, 它与实验有较大出入. 对于一般的 β 稳定原子核, $N>Z$, $\omega_{\rm p}<\omega_{\rm n}$. 按 $R_{\rm c}$ 的 $Z^{1/3}$ 律式 (2) (取 $r_{\rm p}=1.635$fm), 以及式 (15) 和 (17), 得

$$\hbar\omega_{\rm p}=\frac{5\hbar^2}{4MR_{\rm c}^2}(3Z)^{1/3}\approx27.1Z^{-1/3}\text{MeV}, \tag{20a}$$

$$\hbar\omega_{\rm n}=\left(\frac{N}{Z}\right)^{1/3}\hbar\omega_{\rm p}\approx27.1N^{-1/3}\text{MeV}. \tag{20b}$$

利用 $Z=(A/2-T_z)$, $N=(A/2+T_z)$, 可得

$$\begin{aligned}Z^{1/3} &= \left(\frac{A}{2}-T_z\right)^{1/3}\approx\frac{A^{1/3}}{2^{1/3}}\left(1-\frac{2T_z}{3A}\right)=\\ &\frac{A^{1/3}}{2^{1/3}}\left(1-\frac{N-Z}{3A}\right),\end{aligned} \tag{21a}$$

$$\begin{aligned}N^{1/3} &= \left(\frac{A}{2}+T_z\right)^{1/3}\approx\frac{A^{1/3}}{2^{1/3}}\left(1+\frac{2T_z}{3A}\right)=\\ &\frac{A^{1/3}}{2^{1/3}}\left(1+\frac{N-Z}{3A}\right),\end{aligned} \tag{21b}$$

分别代入式 (20a) 和 (20b), 可得

$$\hbar\omega_{\rm p,n}\approx41.0A^{-1/3}\left(1\mp\frac{N-Z}{3A}\right)\text{MeV}. \tag{22}$$

这是目前国际文献中常用的公式 (例如, 见 Nilsson[13]), 其适用性已为核能谱学的众多实验结果所肯定. 无论对轻核和重核, 式 (22) 都适用. 以上就是按电荷半径的 $Z^{1/3}$ 律对它的诠释. 式 (22) 是与同位旋相关的, 是对式 (19) 的推广.

3 核电荷半径 $Z^{1/3}$ 律的改进

$Z^{1/3}$ 律[5] 主要是根据 β 稳定线附近的原子核的核电荷半径实验数据的分析而提出的. 根据对当时已有 β 稳定核的电荷半径数据的分析, $Z^{1/3}$ 律的确优于与同位旋无关的 $A^{1/3}$ 律. 近年来, 随着实验技术的改进, 远离 β 稳定线的众多奇特核 (exotic nuclei) 的核电荷半径也已相当精确地测出[3, 4]. 不能奢望, 如此简单的只含一个参量的 $Z^{1/3}$ 律能很好地描述包括奇特核在内的核电荷半径. 特别是对给定 Z 的一个同位素链上的诸原子核, 其电荷半径是略有变化的[7] (除反映形

变的变化之外). 把$Z^{1/3}$律作为一个好的出发点, 文献[14]提出了如下形式的改进$Z^{1/3}$律(含有两个参量)

$$R_{\rm c}=r_{\rm p}Z^{1/3}[1+b(\eta-\eta^*)], \tag{23}$$

式中$\eta=N/Z=(1+2T_z/A)/(1-2T_z/A)\approx1+4T_z/A$, η^*是给定Z的同位素链中β最稳定核的N/Z值, $r_{\rm p}=\mathring{r}_{\rm p}\left(1+\frac{5}{8\pi}\beta^2\right)$. 该文对1995年以前的核电荷半径实验数据[3]的分析表明, 改进了的$Z^{1/3}$律式(23)能较好地拟合包括奇特核在内的核半径的变化. 与原来简单的$Z^{1/3}$律式(2)相比, 方均根(rms)偏离进一步缩小. 文献[14]还给出了用RMF理论计算出的几个同位素链(Ca, Ni, Zr, Sn, Pb)的核电荷分布半径随中子数N的变化, 计算结果支持式(23)中的T_z线性项.

利用$Z=A/2-T_z$, $N=A/2+T_z$, 式(23)还可以改写成(略去很小的$O((T_z/A)^3)$项)

$$R_{\rm c}=c_0+c_1(T_z/A)+c_2(T_z/A)^2. \tag{24}$$

式中

$$\begin{aligned} c_0 &= r_{\rm p}(A/2)^{1/3}[1-b(\eta^*-1)], \\ c_1 &= r_{\rm p}(A/2)^{1/3}\left(-\frac{2}{3}+4b\right), \\ c_2 &= r_{\rm p}(A/2)^{1/3}4\left(\frac{1}{9}+b\right). \end{aligned} \tag{25}$$

注意, 与同位旋无关的参量c_0, c_1和c_2只依赖于两个参量($r_{\rm p}$和b), 所以式(24)实际上是一个二参量公式.

到此, 令人想起多年以前Wigner[15]给出的很有名的原子核同位旋多重态质量公式(IMME)

$$M(A,T_z)=a+bT_z+cT_z^2, \tag{26}$$

它是描述一个给定A的同位旋多重态(isobaric multiplet)的不同T_z核质量的公式, 式中所含3个独立参量a, b, c依赖于A, 但不依赖于T_z. Wigner的IMME是基于如下假定, 即核子之间有电荷有关的二体相互作用(charge-dependent two-body interaction), 并在波函数一级微扰近似下导出的. 对于$T\geqslant3/2$的同位旋多重态的质量的分析表明, Wigner的IMME式(26)很好地成立[16—18]. 与二参量的电荷半径公式(23)或(24)不同, IMME中含有3个独立参量. 按相似的理论考虑, 以核电荷半径的$Z^{1/3}$律作为一个良好的出发点, 两参量公式(23)或(24)可进一步改进为

$$R_{\rm c}(A,Z)=r_{\rm p}Z^{1/3}[1+b(T_z/A)+c(T_z/A)^2]. \tag{27}$$

式中$r_{\rm p}$, b, c为3个独立参量. 可以期望, 这个简单的3参量公式能更好地描述从轻到重的包括奇特核在内的核电荷半径.

参考文献(References)

1 Bohr A, Mottelson B R. Nuclear Structure (Vol. I). Benjamin, New York, 1969

2 Ring P, Schuck P. The Nuclear Many-Body Problem. Springer-Verlag, New York, 1980

3 Fricke G et al. At. Data Nucl. Data Tables, 1995, **60**: 177

4 Angeli I. At. Data Nucl. Data Tables, 2004, **87**: 185

5 ZENG J Y. Acta Phys. Sin., 1957, **13**: 357; 1975, **24**: 151 (in Chinese)
(曾谨言. 物理学报, 1957, **13**: 357; 1975, **24**: 151)

6 Tseng C Y (Zeng J Y), Cheng T S, Yang F C. Nucl. Phys., 1980, **A334**: 470

7 ZENG J Y. Chinese Phys., 1983, **3**: 652

8 Nerlo-Pomorska B, Pomorski K. Zeit. Phys., 1993, **344**: 359; 1994, **348**: 169

9 Warda M, Nerlo-Pomorska, Pomorski K. Nucl. Phys., 1998, **A635**: 484

10 Raman S, Nester C W, Jr, Tikkanen P. At. Data Nucl. Data Tables, 2001, **78**: 1

11 Shlomo S, Youngblood D H. Phys. Rev., 1993, **C47**: 529

12 Youngblood D H, Clark H C, LIU Y W. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**: 691

13 Nilsson S G et al. Nucl. Phys., 1969, **A131**: 1; Nilsson S G. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1955, **29**: No.16

14 ZHANG S Q, MENG J, ZHOU S G et al. Eur. Phys. J, 2002, **A13**: 285; ZHANG S Q, MENG J, ZHOU S G et al. HEP & NP, 2002, **26**: 252 (in Chinese)
(张双全, 孟杰, 周善贵等. 高能物理与核物理, 2002, **26**: 252)

15 Wigner E P. Proc. of the Robert A. Welch Foundation Conference on Chemical Research, (Houston, Texas, 1957, ed. W. D. Milikan), **1**: 67

16 Benenson W, Kashy E. Atomic Masses and Fundamental Constants, 1976, **5**: 154

17 Benenson W, Kashy E. Rev. Mod. Phys., 1979, **51**: 527

18 Britz J, Pepe A, Antony M S. At. Data Nucl. Data Table, 1998, **69**: 125

Isospin Dependence of Nuclear Charge Radii and Its Microscopic Demonstration*

LEI Yi-An[1)] ZENG Jin-Yan[2)]

(School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract The analysis of experimental nuclear charge radii $R_{\rm c}$ indicates that $R_{\rm c}$ deviates systematically from the $A^{1/3}$ law, i.e., $R_{\rm c}/A^{1/3}$ gradually decreases with increasing A, whereas $R_{\rm c}/Z^{1/3}$ remains almost a constant. This statement is also supported by the analysis of a large amount of experimental nulcear giant monopole resonance energy data $E_x \propto R^{-1}$. The deviation of nuclear charge radii from the $A^{1/3}$ law is basically caused by the isospin independence of $A^{1/3}$ law, and the isospin dependence has been partly included in $Z^{1/3}$ law. In the frame of nuclear shell model, a microscopic demonstration of the $Z^{1/3}$ law is given. The difference in the harmonic oscillator potential strength between proton and neutron ($\omega_{\rm p}$ and $\omega_{\rm n}$) can be accounted for by the $Z^{1/3}$ law. Similar to Wigner's nuclear isobaric multiplet mass equation (IMME), a modified $Z^{1/3}$ law for nuclear charge radii is proposed.

Key words nuclear charge radius, isospin dependence, modified $Z^{1/3}$ law, giant monopole resonance energy

---

Received 28 November 2006

∗ Supported by National Nature Science Foundation of China (10575004, 10675006, 10435010)

1) E-mail: yalei@pku.edu.cn

2) E-mail: jyzeng@pku.edu.cn