2维$SU(N_C)$格点规范理论中夸克真空凝聚*

江俊勤[1)]

(广东教育学院物理系 广州 510303)

摘要 用改进的Wilson夸克格点哈密顿量和变分法研究2维$SU(N_C)$规范场中夸克真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$与夸克质量$m_q$和Wilson参数$r$的依赖关系. 结果表明: 对于给定的$r$, 当$N_C$=2, 3, 4, 5, 6, 7,$\cdots$时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{sub}a/(gN_C^{3/2})$的值随$m_q$的增大而减小. 对于较大的$N_C$(如$N_C>3$), 当$m_q$很小时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{sub}a/(gN_C^{3/2})$对$r$的依赖性很小, 但随着$m_q$的增大, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{sub}a/(gN_C^{3/2})$对$r$的依赖性增大, 且$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{sub}a/(gN_C^{3/2})$的值随$r$的增大而增大; 特别是, 当$m_q\to 0$时, 本文的格点结果与Zhitnitsky的连续理论分析结果(在弱耦合相中)很好地一致, 这意味着本文在$m_q\neq 0$时所得到的结果是可靠的.

关键词 $SU(N_C)$格点规范理论 有质量Wilson夸克 改进哈密顿量 夸克凝聚

1 引言

格点QCD是研究强相互作用非微扰性质的最有效和可靠的方法, 存在着两种等价的理论形式——作用量形式和哈密顿量形式. 作用量形式通过Monte Carlo数值模拟计算物理量(如: 强子质量谱), 是目前格点QCD的主流方法; 而哈密顿量形式则是通过解析计算求解本征方程来实现的, 其优点之一是: 便于计算强子的波函数.

近年来, 我们致力于格点哈密顿量的改进工作: 在格点哈密顿量中加入近邻或次近邻相互作用项. 首先提出了Wilson夸克格点哈密顿量的改进方案, 使其有限格距误差从原来的$O(a)$减小为$O(a^2)$, 并计算了2维QCD中夸克凝聚和矢量介子质量谱[1]; 接着又提出了胶子格点哈密顿量的改进方案, 使其有限格距误差从原来的$O(a^2)$减小到$O(a^4)$, 并用它计算了3维$U(1)$, $SU(2)$和$SU(3)$格点规范场的真空波函数和0^{++}胶球质量[2—4]. 所有结果都显示了改进格点哈密顿量的优越性.

2维$SU(N_C)$规范场具有非阿贝尔的“夸克–胶子”相互作用, 使得它和4维$SU(N_C)$规范场有许多相似之处, 不但可用来检验各种算法的可靠性, 以便推广到4维理论中去, 而且可以模拟4维理论中的某些物理性质. 因此2维$SU(N_C)$规范场被广泛地研究[5—9]. 早在1974年, 't Hooft就用$1/N_C$展开法对2维$SU(N_C)$规范场进行了先驱性的研究[5]; 而Zhitnitsky[8]则在大N_C极限下用分析法得到了弱耦合相中夸克真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$与$N_C$的关系(当夸克质量$m_q$=0时):

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle=-N_C\sqrt{\frac{e^2N_C}{12\pi}}\,, \qquad (1)$$

式中e为带质量量纲的裸耦合常数(在文献[8]中用g表示e).

在文献[1]中, 用改进的Wilson夸克格点哈密顿量和变分法, 研究了2维$SU(N_C)$规范场中夸克真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$的标度行为(当夸克质量$m_q$=0时). 本文在此基础上进一步考虑夸克质量不为零($m_q\neq 0$)的情况, 研究各种不同N_C值所对应的夸克真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$与夸克质量$m_q$和Wilson参数$r$的依赖关系.

2 改进的格点哈密顿量和变分法

改进的Wilson夸克格点哈密顿量为[1]

2006 – 03 – 24 收稿

∗ 广东教育学院教授科研专项基金资助

1) E-mail: jqjiang@gdei.edu.cn

$$
\begin{aligned}
H =& H_g + H_m + H_k + H_r\,,\\
H_g =& \frac{g^2}{2a}\sum_{x,j} E_j^{\alpha}(x)E_j^{\alpha}(x), \quad H_m = m_{\mathrm{q}}\sum_x \bar{\psi}(x)\psi(x)\,,\\
H_k =& \frac{1}{2a}\sum_{x,k}\Big[\frac{4}{3}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k)-\\
&\frac{1}{6}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,2k)\psi(x+2k)\Big],\\
H_r =& \frac{r}{2a}\sum_{x,k}\Big[\bar{\psi}(x)\psi(x)-\frac{4}{3}\bar{\psi}(x)U(x,k)\psi(x+k)+\\
&\frac{1}{3}\bar{\psi}(x)U(x,2k)\psi(x+2k)\Big],
\end{aligned} \tag{2}
$$

式中a, $r(0<r\leqslant 1)$和m_{q}分别为格距、Wilson参数和自由夸克质量, $E_j^{\alpha}(x)$为色电场算符, $g=ea$为无量纲的裸耦合常数, $U(x,2k)=U(x,k)U(x+k,k)$, $U(x,k)$为规范链变量, $k=\pm1$, $j=1$, $\gamma_{-k}=-\gamma_k$, γ_k为Pauli矩阵:

$$
\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \gamma_1=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}. \tag{3}
$$

$\psi(x)$为二分量旋量场:

$$
\psi(x)=\begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta^{+}(x)\end{pmatrix}. \tag{4}
$$

裸真空定义为$\xi(x)|0\rangle=\eta(x)|0\rangle=E_j^{\alpha}(x)|0\rangle=0$.

带夸克的规范场的物理真空态可取为[1]

$$
|\Omega\rangle=\exp(\mathrm{i}S)|0\rangle\,, \quad S=\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{trun}}}\theta_n S_n\,, \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
S_1 =& \ \mathrm{i}\sum_{x,k}\psi^{+}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k),\\
S_2 =& \ \mathrm{i}\sum_{x,k}\psi^{+}(x)\gamma_k U(x,2k)\psi(x+2k),\\
S_3 =& \ \mathrm{i}\sum_{x,k}\psi^{+}(x)\gamma_k U(x,3k)\psi(x+3k),\\
&\cdots
\end{aligned} \tag{6}
$$

式中θ_1, θ_2, θ_3, $\cdots$为独立的变分参数. 在本文中, 取3个变分参数.

真空能量定义为

$$
E_{\Omega}=\frac{\langle\Omega|H|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle}\,. \tag{7}
$$

由E_{Ω}取最小值的条件

$$
\frac{\partial E_{\Omega}}{\partial\theta_1}=0, \quad \frac{\partial E_{\Omega}}{\partial\theta_2}=0, \quad \frac{\partial E_{\Omega}}{\partial\theta_3}=0, \tag{8}
$$

可求得$\theta_n=\theta_n(r,m_{\mathrm{q}},1/g^2)$; $n=1$, 2, 3.

夸克真空凝聚为

$$
\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{lat}}=\frac{\left\langle\Omega\middle|\sum_x\bar{\psi}(x)\psi(x)\middle|\Omega\right\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle}\,. \tag{9}
$$

把(5), (6)式和$\theta_n=\theta_n(r,m_{\mathrm{q}},1/g^2)$代入(9)式, 可得$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{lat}}$与$N_{\mathrm{C}}$, m_{q}, r和$1/g^2$的关系.

(2)式中Wilson项H_r的引入是为了解决“费米子加倍”问题, 但是$r\neq0$破坏了手征对称性, 诱导了非零的自由夸克真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{free}}$, 应当将它减除(subtract)

$$
\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{sub}}=\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{lat}}-\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{free}}\,, \tag{10}
$$

才能与连续理论的夸克真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{cont}}$作比较. 根据量纲分析有

$$
\frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{cont}}}{N_{\mathrm{C}}\,e}=\frac{a\,\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{sub}}}{N_{\mathrm{C}}\,g}, \tag{11}
$$

式中N_{C}为色量子数.

$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{free}}$可按文献[9] (未改进格点哈密顿量)的步骤求得: 先利用富氏变换求出

$$
H_{\mathrm{free}}=H_m+H_k+H_r\,, \tag{12}
$$

在动量空间中的表达式, 再利用幺正变换把H_{free}对角化, 从而求得$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{free}}$.

3 结果和讨论

给定N_{C}和$1/g^2$的值, 从(8)—(10)式, 可求出夸克真空凝聚与m_{q}和r的关系.

在实际计算中, 取N_{C}=2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$, $0\leqslant 1/g^2\leqslant 2$和$r$=0.1, 0.2, $\cdots$, 0.5, $\cdots$, 1, $0\leqslant m_{\mathrm{q}}<1$. 图1和图2分别给出了$r$=0.5和$r$=1时$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{sub}}\,a/(gN_{\mathrm{C}})$与$m_{\mathrm{q}}a$的依赖关系.

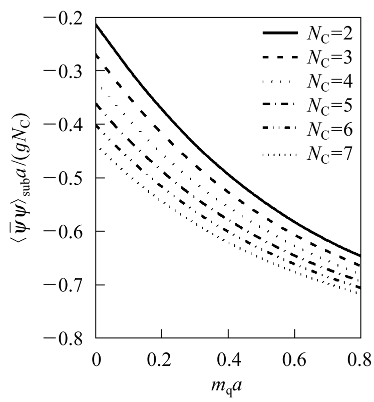

图 1 当$1/g^2=2$, $r=0.5$时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{sub}}\,a/(gN_{\mathrm{C}})$与$m_{\mathrm{q}}a$的关系

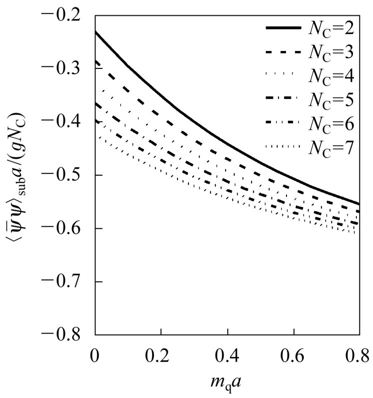

图 2　当$1/g^2=2$, $r=1$时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C})$与$m_{\rm q}a$的关系

从图1和图2(及更多的计算, 限于篇幅未画出)可见: 对于给定的r, 当$N_{\rm C}$=2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$ 时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C})$的值随$m_{\rm q}$的增大而减小; 对于给定的$m_{\rm q}$, 当$N_{\rm C}$=2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C})$的值随$r$的变化关系较为复杂.

据我们所知, 2维$SU(N_{\rm C})$ ($N_{\rm C}$=2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$)规范场中夸克真空凝聚与夸克质量$m_{\rm q}$和Wilson参数r的依赖关系, 在以前的相关文献中从没有报道过, 因此只能与(1)式($m_{\rm q}$ =0的情况)作比较, 图3和图4分别给出了r=0.5和r=1时$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$随$m_{\rm q}a$的变化关系.

从图3和图4(及更多的计算, 限于篇幅未画出)可清楚地看到: 对于较大的$N_{\rm C}$(如$N_{\rm C}>3$), 当$m_{\rm q}$很小时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$对$r$的依赖性很小, 但随着$m_{\rm q}$的增大, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$对$r$的依赖性增大, 且$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$的值随$r$的增大而增大. 特别是, 对于不同的$r$值, 及$N_{\rm C}$=4, 5, 6, 7, $\cdots$, 当$m_{\rm q}\to 0$时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$(即$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm cont}/(eN_{\rm C}^{3/2})$都几乎趋于同一个值($-0.163$), 这个值正是Zhitnitsky在弱耦合相中的分析结果[8]: $\langle\bar{\psi}\psi\rangle/(eN_{\rm C}^{3/2})=-1/\sqrt{12\pi}\approx-0.163$. 也就是说, 当$m_{\rm q}\to 0$时, 本文的格点结果与Zhitnitsky在大$N_{\rm C}$极限下用分析法得到的弱耦合相中的结果(当$m_{\rm q}$ =0时)很好地一致, 因而可以相信本文在$m_{\rm q}\neq 0$时所得到的结果是可靠的.

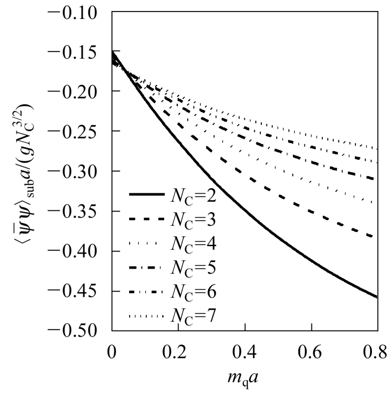

图 3　当$1/g^2=2$, $r=0.5$时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$与$m_{\rm q}a$的关系

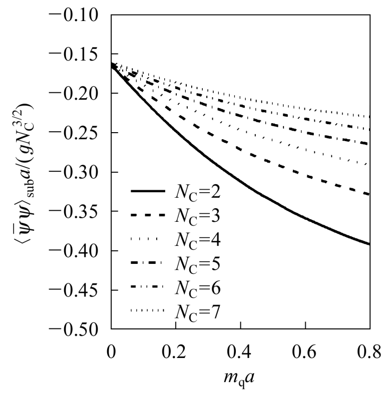

图 4　当$1/g^2=2$, $r=1$时, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$与$m_{\rm q}a$的关系

参考文献(References)

1 JIANG Jun-Qin, LUO Xiang-Qian et al. Phys. Rev., 1999, **D60**: 014501

2 JIANG Jun-Qin, LUO Xiang-Qian, GUO Shuo-Hong et al. HEP & NP, 1999, **23**(12): 1152(in Chinese)
(江俊勤, 罗向前, 郭硕鸿等. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12): 1152)

3 JIANG Jun-Qin, LI Jie-Ming. HEP & NP, 2001, **25**(7): 617(in Chinese)
(江俊勤, 李洁明. 高能物理与核物理, 2001, **25**(7): 617); JIANG Jun-Qin. HEP & NP, 2005, **29**(2): 115(in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理, 2005, **29**(2):115)

4 JIANG Jun-Qin, LI Jie-Ming. Phys. Rev., 2003, **D68**: 094502

5 't Hooft G. Nucl. Phys., 1974, **B72**: 461

6 Steinhardt P J. Nucl. Phys., 1980, **B176**: 100

7 Bhattacharya G. Nucl. Phys., 1982, **B205**: 461

8 Zhitnitsky A R. Phys. Lett., 1985, **B165**: 405

9 LUO Xiang-Qian, CHEN Qi-Zhou. HEP & NP, 1992, **16**(8): 676(in Chinese)
(罗向前, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1992, **16**(8): 676)

Quark Condensate in Two-Dimensional $SU(N_{\rm C})$ Lattice Gauge Theory with Massive Wilson Quarks *

JIANG Jun-Qin[1)]

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

Abstract Using the improved lattice Hamiltonian with massive Wilson quark and the variational method, we study the quark mass $m_{\rm q}$ and the Wilson parameter r dependences of the quark condensate $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ in the two-dimensional $SU(N_{\rm C})$ lattice gauge theory. The numerical results show that when r is given, for $N_{\rm C}$=2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$, the value of $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$ decreases as $m_{\rm q}$ increases. For $N_{\rm C}>3$, when $m_{\rm q}$ is small, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$ is almost independent of r; when $m_{\rm q}$ is large, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\rm sub}\,a/(gN_{\rm C}^{3/2})$ increases with increasing r. Particularly, when $m_{\rm q}\to 0$, our numerical results agree very well with Zhitnitsky's analytical weak coupling result in the continuum, which implys that our numerical results in the case of $m_{\rm q}\neq 0$ are reliable.

Key words $SU(N_{\rm C})$ lattice gauge theory, massive Wilson quark, improved Hamiltonian, quark condensate

Received 24 March 2006

* Supported by Professor Foundation of Guangdong Education Institute

1) E-mail: jqjiang@gdei.edu.cn