

# 低能 ${}^2\text{H}(d, \gamma){}^4\text{He}$ 辐射俘获反应的理论研究\*

马引群<sup>1,2;1)</sup> 田源<sup>2</sup> 马中玉<sup>2</sup>

1 (太原师范学院物理系 太原 030001)

2 (中国原子能科学研究院 北京 102413)

**摘要** 在唯象模型的基础上, 考虑到碰撞氦核的  $D$  态分量对跃迁矩阵元的贡献和  ${}^4\text{He}$  基态  $D$  态成分, 从理论上计算了低能  ${}^2\text{H}(d, \gamma){}^4\text{He}$  反应的天体物理学  $S$  因子. 理论计算的  $S$  因子在  $E < 3\text{MeV}$  范围内与实验数据符合的很好, 并预言了  ${}^4\text{He}$  基态  $D$  态混合的几率为 7.4%.

**关键词** Woods-Saxon 势 电四极跃迁  $S$  因子 束缚态 散射态

## 1 引言

${}^2\text{H}(d, \gamma){}^4\text{He}$  反应是天体物理学中的重要核反应, 是产生这些轻核的重要途径之一. 对它们在宇宙中存在的丰度测量是天体物理学和宇宙学的重大课题之一, 也是检验热大爆炸模型一致性的重要手段之一. 而要完成上述任务, 核物理学必须为天体物理学和宇宙学(在天体物理学重要能区大约几十 keV~几百 keV) 输入准确, 可靠的轻核聚变反应的截面数据. 而用目前现有技术, 从实验室里获取使这些带电粒子在恒星核合成反应过程所能发生的恒星能区(约 1—20keV) 所需数据是很困难的<sup>[1]</sup>. 这就需要从各种理论模型出发获取这些数据, 因而从理论上研究俘获辐射反应就显得尤为重要.

我们知道在简单的壳模型图象中,  ${}^4\text{He}$  是最简单的双幻核, 4 个核子占据最底轨道, 质子和中子两两配对形成自旋单态. 现实的微观理论计算<sup>[2-4]</sup> 提出  ${}^4\text{He}$  基态中存在  $D$  态, 4 个核子的自旋耦合形成  $S=2$  的自旋五重态, 即  ${}^4\text{He}$  基态中存在轨道角动量  $L=2$  的非球形组态  ${}^5D_0$  态, 而各种理论模型对于  $D$  态成分的估算仍然存在很大的不确定性, 范围在 2%—14% 之间<sup>[5, 6]</sup>. 各种实验<sup>[7-9]</sup> 已证明  $D$  态的存在, 理论计算也证明如果在低能区(入射氦的能量小于 500keV 时) 不考虑  $D$  态的存在, 理论计算的反应截面几乎比实验数据低了 3 个数量级.

在 LS (即自旋轨道耦合) 耦合情况下,  $d-d$  系统可能的状态有  ${}^1S_0, {}^5S_2, {}^3P_{0,1,2}, {}^1D_2, {}^5D_{0,1,2}, {}^3F_{2,3,4}, {}^5G_2$  等,  ${}^4\text{He}$  的基态记为  $\alpha$ , 这里考虑四极以下的电磁辐射(更高阶的电磁辐射非常弱可忽略). 根据电磁辐射跃迁的角动量和宇称选择定则

$$J_i + J_f \geq \lambda \geq |J_i - J_f|;$$
$$\pi_i \pi_f = \begin{cases} (-1)^\lambda, & E\lambda\text{-transition} \\ (-1)^{\lambda+1}, & M\lambda\text{-transition} \end{cases}, \quad (1)$$

$J_i, J_f, \pi_i, \pi_f$  分别为  $d-d$  系统初、末态的角动量和宇称,  $\lambda$  为多极跃迁过程中光子带走的角动量量子数. 低能  $d+d \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$  反应主要的电磁跃迁为<sup>[10]</sup>

$$\langle \alpha | E2 | {}^5S_2 \rangle, \quad \langle \alpha | E2 | {}^1D_2 \rangle. \quad (2)$$

在氦入射的能量小于 500keV 的低能区, 由于离心势的作用  $\langle \alpha | E2 | {}^1D_2 \rangle$  跃迁较弱,  $\langle \alpha | E2 | {}^5S_2 \rangle$  跃迁较强; 在氦入射的能量大于 500keV 的区域,  $\langle \alpha | E2 | {}^1D_2 \rangle$  跃迁占主导地位.

## 2 理论公式

目前研究  $d+d \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$  辐射俘获反应的主要理论工具有: 直接俘获方法 (Direct capture method); 共振群方法 (Resonating group method); 生成坐标方法 (Generator coordinate method). 基于以上讨论, 采用

2006 - 04 - 30 收稿

\* 国家自然科学基金(10275094, 10475116, 10235020)和国家重点基础研究发展规划项目(G2000077400)资助

1) E-mail: myqfal@iris.ciae.ac.cn

直接俘获方法来研究 $d+d \rightarrow ^4\text{He} + \gamma$ 反应, 将我们的研究限于质心系氘的入射能量在 3MeV 以下, 从散射态 $^5S_2, ^1D_2$ 到 $^4\text{He}$ 的基态二分量子 $^1S_0, ^5D_0$ 的 E2 跃迁, d-d 系统散射态和束缚态波函数可以用氘的内部波函数和 d-d 相对运动波函数来构造

$$\Psi_{\text{LS}}^J = \frac{f_{\text{LS}}^J(R)}{R} [Y_L(\hat{R}); (\Phi_d^{s=1} \Phi_d^{s=1})_S]_J, \quad (3)$$

这里  $L$  是轨道角动量,  $S$  为道自旋,  $J$  为总角动量,  $R$  为 d-d 相对坐标,  $f_{\text{LS}}^J(R)$  为 d-d 系统的相对运动径向波函数,  $Y_L(\hat{R})$  为球谐函数,  $\Phi_d^{s=1}$  为氘的内部波函数. 我们将不讨论它的具体形式, 用实验的氘核电四极矩的值来讨论氘核的内部波函数对四极跃迁的贡献. 实验上发现氘具有非零的电四极矩, 证明了氘核中  $D$ -态的存在. 前面提到 $^4\text{He}$ 的基态波函数存在  $D$  态成分, 可用它的  $S$  态和  $D$  态波函数的线性叠加来表示, 即

$$\Psi_\alpha = \cos\omega\Psi(^1S_0) + \sin\omega\Psi(^5D_0), \quad (4)$$

散射态波函数可写为

$$\Psi^{(2S+1)L_J} = i^L \left( \frac{4\pi(2L+1)}{\nu} \right)^{1/2} \frac{1}{\kappa} \Psi_{\text{LS}}^J, \quad (5)$$

其中  $\nu, \kappa$  是碰撞氘核的相对运动速率和波数, 且  $\kappa = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$ ,  $\mu, E$  分别为 d-d 系统的折合质量和体系的相对运动能量,  $\Psi_{\text{LS}}^J$  即为(3)式的波函数. 散射态波函数被归一化到单位流强. (3)式中的径向波函数  $f_{\text{LS}}^J(R)$  通过解径向薛定谔方程

$$\frac{d^2 f(R)}{dR^2} + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + V(R)) - \frac{L(L+1)}{R^2} \right] f(R) = 0 \quad (6)$$

得到,  $V(R)$  为 d-d 系统的势能, 其中包括库仑相互作用势和 d-d 相互作用的唯象 Woods-Saxon 势, 即

$$V(R) = V_{\text{ws}}(R) + V_{\text{C}}(R, R_{\text{C}}). \quad (7)$$

“库仑半径”取为  $R_{\text{C}} = 1.83\text{fm}^{[11]}$ , 在相互作用势(7)式中, 因为对我们所讨论的问题, 自旋轨道耦合项  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = 0$ , 张量力的贡献很小可忽略<sup>[12]</sup>. 所以没有考虑它们的贡献. Woods-Saxon 势参数  $V_0, R_0, a$  由束缚态能量和散射态相移来确定.

d-d 系统的 E2 跃迁算符在质心坐标系中可写为

$$Q_{2\mu}^E = e \sum_{i=1}^4 r_i^2 Y_{2\mu}(\hat{r}_i) \frac{1 - \tau_{zi}}{2}, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{r}_i$  是第  $i$  个粒子在质心坐标系中的坐标.  $\tau_{zi}$  为第  $i$  个粒子同位旋第三分量. 第  $i$  个粒子在质心坐标系中的坐标  $\mathbf{r}_i$  与氘的内部坐标  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{34} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4$ ,

以及 d-d 相对运动坐标  $\mathbf{R}$  之间的关系为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{R} + \mathbf{r}_{12}) \\ \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{R} - \mathbf{r}_{12}) \\ \mathbf{r}_3 = \frac{1}{2}(-\mathbf{R} + \mathbf{r}_{34}) \\ \mathbf{r}_4 = \frac{1}{2}(-\mathbf{R} - \mathbf{r}_{34}) \end{cases}, \quad (9)$$

由于 d-d 系统的同位旋  $T = 0$ , 所以(8)式中只考虑电四极矩算符的同位旋标量(isoscalar)部分, 故(8)式可写为

$$Q_{2\mu}^E = \frac{e}{2} \sum_{i=1}^4 r_i^2 Y_{2\mu}(\hat{r}_i). \quad (10)$$

将(9)式代入(10)式, 得到

$$Q_{2\mu}^E = \frac{e}{2} \left[ R^2 Y_{2\mu}(\hat{R}) + \frac{1}{2} r_{12}^2 Y_{2\mu}(\hat{r}_{12}) + \frac{1}{2} r_{34}^2 Y_{2\mu}(\hat{r}_{34}) \right]. \quad (11)$$

考虑到氘的内部结构, 容易看出氘的  $D$ -态在俘获过程中是有意义的. 其中第一项就是所谓“外部”E2 算符, 这部分就是将氘视为点粒子情况下 d-d 系统的近似 E2 算符, 第二、三项就是所谓“内部”E2 算符. 显然, 电四极算符是依赖于 d-d 系统的相对运动和氘的内部运动. 在唯象理论计算中将考虑氘的内部运动对辐射俘获反应截面的贡献<sup>[13]</sup>.

由于在原子核的  $\gamma$  辐射中能量为 MeV 量级时, 相应的波长  $\lambda$  约为 200fm, 而原子核的线度  $R$  约为 3—7fm,  $\lambda \gg R$ , 显然, 可以用电磁辐射跃迁的长波近似, 所以原子核的电磁辐射跃迁几率可写为<sup>[14]</sup>:

$$W_{\text{fi}} = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda[(2\lambda+1)!]^2} \left( \frac{E_\gamma}{\hbar C} \right)^{2\lambda+1} B(E\lambda), \quad (12)$$

其中  $E_\gamma$  为发射光子的能量,  $\lambda$  为多极辐射的级数,

$B(E\lambda) = \frac{1}{2J_i+1} |\langle \Psi_f || Q_\lambda || \Psi_i \rangle|^2$  为约化跃迁矩阵元,  $J_i,$

$\Psi_i, \Psi_f, Q_\lambda$  分别为原子核体系初态的总角动量、初末态的波函数和电多极算符. 原子核的电磁俘获截面与跃迁几率之间的关系为<sup>[15]</sup>

$$\sigma(E_{\text{c.m.}}) = \sum_{S=0,2} \frac{2S+1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} W_{\text{fi}}(E\lambda), \quad (13)$$

$S$  为道自旋,  $S_1, S_2$  分别为入射道 d-d 的自旋.  $E_{\text{c.m.}}$  为氘在质心系中的入射能量.

对于  $d+d \rightarrow ^4\text{He} + \gamma$  反应, 入射道 d-d 的自旋分别为  $S_1 = S_2 = 1$ , 只考虑电四极矩跃迁  $\lambda = 2$ , 将这些值代入(13)式可得辐射跃迁的理论截面公式为

$$\sigma(E_{\text{c.m.}}) = \sum_{s=0,2} \frac{4\pi 2S+1}{75} \frac{1}{45} \left( \frac{E_r}{\hbar C} \right)^5 \frac{1}{\kappa^2} \frac{e^2}{\hbar\nu} |A^{(2S+1)L_J}|^2, \quad (14)$$

其中  $E_\gamma = E_{c.m.} + 23.84\text{MeV}$  为发射光子的能量

$$A(^1D_2) = -\frac{5}{2} \cos \omega \int_0^\infty R^2 f_S^\alpha(R) f_{1D_2}(R) dR, \quad (15)$$

$$A(^5S_2) = \sqrt{50} q_d \cos \omega \int_0^\infty f_S^\alpha(R) f_{5S_2}(R) dR + \frac{1}{2} \sin \omega \int_0^\infty f_D^\alpha(R) f_{5S_2}(R) R^2 dR, \quad (16)$$

(15), (16) 式分别为散射态  $^1D_2$ ,  $^5S_2$  跃迁到  $^4\text{He}$  的基态的振幅, (16) 式的第一部分是氦核  $D$  态成分对电四极矩跃迁的贡献.

### 3 数值处理

计算辐射跃迁截面 (14) 式现在可归结为求解 d-d 系统的径向波函数.  $f_S^\alpha, f_D^\alpha$  是  $^4\text{He}$  基态中  $S$  态和  $D$  态的束缚态径向波函数,  $f_{5S_2}, f_{1D_2}$  为散射态波函数. 用数值方法求解方程 (6), 无论束缚态还是散射态均采用 Noumerov 方法寻找径向波函数的数值解.

对于束缚态, 方程 (6) 中  $E < 0$ , 根据束缚态径向波函数的边界条件可以确定  $^4\text{He}$  束缚态的径向波函数  $f_S^\alpha \cdot f_D^\alpha$ . 对于散射态, 方程 (6) 中  $E > 0$ , 根据散射态边界条件用由 Meier and Glockle<sup>[16]</sup> 共振群方法计算拟合的 d-d 弹性散射相移来确定 Woods-Saxon 势强度, 同时计算散射态径向波函数  $f_{5S_2}, f_{1D_2}$ .

在数值计算方法的基础上, 来确定理论模型中的各个势参数. 对于束缚态和散射态, 固定 Woods-Saxon 势参数中的  $R_0 = 2.96\text{fm}$ ,  $a = 0.90\text{fm}$ . 对于束缚态  $^1S_0, ^5D_0$ , 通过调试  $V_0$ , 使理论计算的 d-d 系统的结合能达到  $23.847\text{MeV}$ , 获得束缚态  $V_0(^1S_0) = -48.284\text{MeV}$ ,  $V_0(^5D_0) = -100.413\text{MeV}$ . 对于散射态  $^1D_2, ^5S_2$ , 通过调试  $V_0$ , 使我们唯象理论计算的核势相移很好再现由共振群方法(RGM)计算的 d-d 弹性散射相移, 得到散射态  $V_0(^5S_2) = 15.6\text{MeV}$ ,  $V_0(^1D_2) = -16.5\text{MeV}$ .

### 4 结果与讨论

在低能区, 通常用天体物理学的  $S$ -因子来表示数据比较方便, 其定义为

$$S(E_{c.m.}) = \sigma(E_{c.m.}) E_{c.m.} \exp(2\pi\eta). \quad (17)$$

在势参数的基础上, 通过调试理论模型 (4) 式中的混合参数  $\omega$  去拟合天体物理学  $S$ -因子与氦在质心系中的入射能量  $E_{c.m.}$  的依赖关系的实验数据得到  $\omega = -0.275$ , 相应于  $^4\text{He}$  中  $D$  态几率为  $P(^5D_0) = |\sin \omega|^2 = 7.4\%$ .

天体物理学  $S$  因子  $S(E_{c.m.})$  及  $^2\text{H}(d, \gamma)^4\text{He}$  反应截面的理论计算结果与实验结果的比较. 在图 1, 图 2 给出 (图中实验数据取自文献 [5, 17—21]). 从图中可以看出在  $E_{c.m.} < 3\text{MeV}$  能区理论计算结果与实验符合的相当好. 由理论计算再现 d-d 系统的结合能和拟合由共振群方法计算的 d-d 弹性散射相移, 得到 Woods-Saxon 势参数, 并由此计算的  $S$ -因子与实验数据在  $E < 3\text{MeV}$  范围符合得很好, 我们认为理论计算结果是可靠的. 由此将理论计算结果外推到目前还没有实验数据天体物理学感兴趣的  $20\text{keV}$  以下能区是合理的. 从调试出的一套 Woods-Saxon 势参数所得出的  $S$  因子的理论值与实验值符合程度是令人满意的, 且理论预言的  $^4\text{He}$  基态  $D$ -态混合的概率与其他大多文献给出的值是一致的. 但由于唯象模型本身的缺陷, 模型理论计算的  $S$  因子理论曲线在能量  $600\text{—}1200\text{keV}$  之间较实验数据偏低.

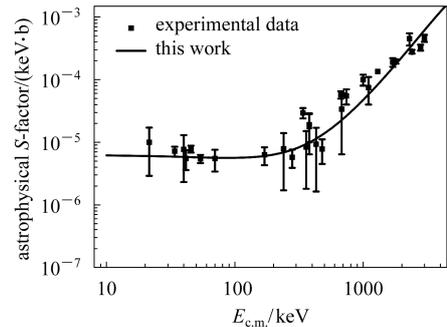


图 1 天体物理学  $S$  因子与氦在质心系中入射能量的关系

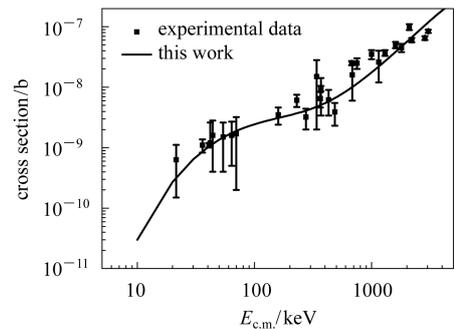


图 2 反应截面与氦在质心系中入射能量的关系

## 参考文献(References)

- 1 Langanke K. Nucl. Phys., 1986, **A457**: 351
- 2 Ballot J L. Phys. Lett., 1983, **B127**: 339
- 3 Goldhammer P. Phys. Rev., 1984, **C29**: 1444
- 4 Schiavilla R. Nucl. Phys., 1986, **A449**: 219
- 5 Wilkinson F J. Phys. Rev., 1985, **C31**: 2036
- 6 Weller H R. Phys. Rev. Lett., 1984, **B53**: 1325
- 7 Bluge G, Assenbaum. H JPhys. Rev., 1987, **C36**: 21
- 8 Weller H R. Phys. Rev., 1986, **C34**: 32
- 9 Assenbaum H A. Phys. Rev., 1987, **C36**: 17
- 10 Warburtou E K. Isospin in Nuclear Physics. Amsterdam: North-Holland, 1969. 185
- 11 McIntyre. L C. Nucl. Phys., 1967, **A91**: 382
- 12 Santos F D. Phys. Rev., 1985, **C31**: 707
- 13 Piekarewicz J, Koonin S E. Phys. Rev., 1987, **C36**: 875
- 14 ZENG Jin-Yan. Quantum Mechanics. Third Edition. Beijing: Science Press, 2000, 734 (in Chinese)  
(曾谨言. 量子力学. 第三版. 北京: 科学出版社, 2000, 734)
- 15 Baye D. Nucl. Phys., 1983, **A407**: 77
- 16 Meier W. Nucl. Phys., 1975, **A255**: 21
- 17 Barnes C A, Chang K. Phys. Rev. Lett., 1983, **B34**: 23
- 18 Poutissou J M. Nucl. Phys., 1973, **A199**: 517
- 19 Meyerhof W E, Tombrelle T A. Nucl. Phys., 1968, **A109**: 1
- 20 Zurmuehle W, Stephens W E. Phys. Rev., 1963, **132**: 751
- 21 Meyerhof W, E, Feldman W. Nucl. Phys., 1969, **A131**: 489

## Theoretical Study of ${}^2\text{H}(\text{d},\gamma){}^4\text{He}$ at Low Energies<sup>\*</sup>

MA Yin-Qun<sup>1,2;1)</sup> TIAN Yuan<sup>2</sup> MA Zhong-Yu<sup>2</sup>

1 (Department of Physics, Taiyuan Teachers College, Taiyuan 030001, China)

2 (China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China)

**Abstract** We study the astrophysical important  ${}^2\text{H}(\text{d},\gamma){}^4\text{He}$  reaction that allows for the  $D$ -state component of the colliding deuterons and  $D$ -components in  ${}^4\text{He}$  ground state in the framework of a phenomenological model. Our study reproduces the experimental reaction cross section at  $E < 3\text{MeV}$ . Our results indicate a  $D$ -state admixture in the  ${}^4\text{He}$  ground state of 7.4%

**Key words** Woods-Saxon potentials, electric quadrupole transition,  $S$ -factor, bound state, scattering state

---

Received 30 April 2006

<sup>\*</sup> Supported by National Natural Science Foundation of China (10275094, 10475116, 10235020) and Major State Basic Research Development Programme of China (G2000077400)

1) E-mail: myqfal@iris.ciae.ac.cn