第 28 卷 第 3 期
2004 年 3 月

高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.28, No.3
Mar., 2004

不同密度物质分布对暴涨宇宙演化影响的研究

庞兆广[1,2]　黄永畅[2;1)]

1 (河北师范大学物理学院　石家庄　050016)
2 (北京工业大学应用物理系　北京　100022)

摘要　获得了相关于宇宙暴涨的具有一般形式的物质密度 ρ 的表达式，解出了表征宇宙标度因子演化的一般解，得到当宇宙学常数对物质密度的贡献大于零时有指数复合函数形式的一般暴涨，当宇宙学常数对密度的贡献小于零时宇宙有余弦复合函数形式的演化．当一般密度函数的参数取特殊值时，回到通常人们得到的解，而且找出了影响宇宙暴涨的一个新的动力学参数 C．

关键词　暴涨宇宙　物质密度　宇宙演化　爱因斯坦方程

1 引言

现代科学意义上的宇宙学创立于 1917 年，是爱因斯坦首次将广义相对论应用到宇宙学中，并创建了第一个具有严格科学意义的宇宙学模型[1,2]．爱因斯坦的宇宙模型作了两个简单的假设：(1) 宇宙物质在空间大尺度中是均匀和各向同性的，即我们所说的宇宙学原理，这个假设同现在的天文学观测相符合；(2) 宇宙是静态的，并且爱因斯坦的场方程引入了宇宙学常数 Λ．de Sitter 等许多研究者建立了多种不同的宇宙学模型[3]．在已知的宇宙学模型中，一般都假设宇宙物质密度 ρ 是时间的函数，并在对爱因斯坦方程求解时，一般令甚早期的 $k=0$，从而化简方程的求解[3,4]．当然这些简化的做法虽然给出的解的形式比较简单，同时也是失去了对宇宙学不同状态的准确描述，特别是现代暴涨宇宙学的研究都从 Lagrange 量出发来求解宇宙的演化，给出了对宇宙早期演化很好的描述，但关于物质密度分布对称性和对称性所对应的几何和物理意义难以清晰地给出[3—7]．

在宇宙暴涨演化过程中，根据物质的组成成分及相互作用的不同可以强烈地影响宇宙的演化[3,4]，其中宇宙物质密度 ρ 的表达式对宇宙演化的物理性质有着直接的影响，而这些都是由爱因斯坦方程和物态方程等决定的．

2 不同密度物质分布对暴涨宇宙演化影响的研究

在将广义相对论应用于宇宙学研究时，不同物质的初始分布对宇宙的演化有不同的影响．利用广义相对论的 Einstein 方程[3,4]，可得

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}=\frac{8\pi}{3}G\rho\ , \tag{1}$$

其中 ρ 是一般的物质密度．由于爱因斯坦方程只能给出关于 ρ，P 和 a 的两个独立方程，故需引入一物态方程，而且物质密度与宇宙的尺度因子 a 有关，是 a 的一般函数[4]．特别是对甚早期宇宙的物质密度与其尺度而言，我们可一般地导出相关于宇宙暴涨的物质密度 ρ 与宇宙尺度因子 a 的函数关系

$$\rho=\alpha_0 a^{-2}+\alpha_1 a^{\beta_1}+\alpha_2\ . \tag{2}$$

这是因为在暴涨过程中我们首先需要反映在宇宙的任何地方可以有一恒定的物质密度的均匀对称分布，这分布可以是来自宇宙常数的贡献，可用 α_2 表示；又由于现代宇宙学的普遍看法是：宇宙是从一个非常小的区域，甚至是一个点或看做是如 10^{-34}cm 为半径的 Planck 长度开始暴涨的，由等几率原理和均匀暴涨物质的分布应该具有球面均匀分布对称的

2003－04－20 收稿

1）联系人

效应,而这一效应可由第一项 $\alpha_0 a^{-2}$ 来表示,这一项是与圆球面曲率成正比的均匀密度分布,为讨论方便,α_0 可取为 $\frac{3k}{8\pi G}$,第二项则是对这两个对称分布在一般情况下偏离的表示,即 α_1 和 β_1 可为任意参数以表征这种一般情况下的偏离. 则可得

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \alpha_1 \frac{8\pi G}{3} a^{\beta_1} + \alpha_2 \frac{8\pi G}{3}, \tag{3}$$

记 $k' = 8\pi G$,当上式中 $\alpha_2 > 0$ 时,可得其一般解为

$$a_{\pm} = \left(4\frac{\alpha_2}{\alpha_1}c_0\right)^{\frac{1}{\beta_1}} \left(e^{\mp\frac{1}{2}\beta_1\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t} - c_0 e^{\pm\frac{1}{2}\beta_1\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t}\right)^{\frac{-2}{\beta_1}}, \tag{4}$$

上式中已令 $c_0 = e^C$,(4)式为我们要详细讨论的一般关系式. 为了看清楚密度的物理意义,我们可一般地设宇宙在暴涨前有一标量场,则宇宙的标度因子与该标量场有关[3,4],故一般地存在一个函数 $a = f(\varphi)$,则可得物质密度和标量场 φ 的关系为

$$\rho = \frac{3k}{8\pi G}f^{-2}(\phi) + \alpha_1 f^{\beta_1}(\phi) + \alpha_2,\ \alpha_2 > 0, \tag{5}$$

故(5)式中 α_1, α_2 和函数 $f(\phi)$ 为可以是由理论或观测试验拟合分别决定的常数和函数. (5)式是我们得到的具有一般指数暴涨宇宙的物质密度分布与标量场间的一般关系,它是不同于已知关系的一般关系,(2)式纠正了过去文献近似地认为 ρ 是 a 的单项函数而非一般的多项函数的不足(例如见文献[3,4]),克服了过去相关文献关于暴涨宇宙对物质密度与 a 的关系在此方面遗漏掉的项,而且下一节将看到,当 α_1, β_1 取适当的值时,可得通常的指数暴涨形式,这在特殊情况下所得的公式正是文献[3,4]的结论.

进一步讨论当 $\alpha_2 < 0$ 的情况,则可得

$$a_{\pm} = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1}} \left[1 + \cos\beta_1\sqrt{-\frac{k'\alpha_2}{3}}(C \pm t)\right]^{-\frac{1}{\beta_1}}, \tag{6}$$

由于宇宙常数目前测得不为零,故不考虑 $\alpha_2 = 0$ 的情况. 至此,我们得到了不同情况的所有解.

3　不同解的讨论

先考虑 $\alpha_2 > 0$ 的情况,为讨论方便,令 $\beta_1 = -\frac{1}{\gamma}$,并取 a_+ 的指数暴涨的解,则可得

$$a = \left(4\frac{\alpha_2}{\alpha_1}c_0\right)^{-\gamma} \left(e^{\frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t} - c_0 e^{-\frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t}\right)^{2\gamma}, \tag{7}$$

(7)式为宇宙的一般暴涨表示式,当 $c_0 = 1$ 和 $\gamma = 1/2$ 时,得到通常的解[3]

$$a = \sqrt{\frac{\alpha_1}{4\alpha_2}}\sinh\left(\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t\right), \tag{8}$$

其次考虑 $\alpha_2 < 0$ 的情况,同样令 $\beta_1 = -\frac{1}{\gamma}$,则可得

$$a_{\pm} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\gamma}\left\{1 + \cos\left[\frac{1}{\gamma}\sqrt{-\frac{k'\alpha_2}{3}}(C \pm t)\right]\right\}^{\gamma}, \tag{9}$$

(9)式是余弦振荡的解,即宇宙可以按照余弦振荡的形式膨胀和收缩. 从(7)式和(9)式的导出过程可知正是宇宙常数的正负(即 α_2)不同决定了有没有指数形式的暴涨. 以上讨论进一步说明密度常数 α_2 的正负只决定了宇宙是否有暴涨,而在 α_2 为正时不同的 β_1 决定了宇宙更多的不同演化方式,并且 β_1 是对均匀和球对称分布偏离表述的参数(参见(2)式相关的讨论). 故不同的物质分布式决定了宇宙的不同演化方式.

4　宇宙暴涨演化中的哈勃常数、减速参数和温度等的计算及讨论

由于现在普遍认为宇宙经历了指数暴涨,故利用含正的指数暴涨项的一般解即宇宙标度因子,可得哈勃常数

$$H = \sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}\ \frac{e^{\frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t} + c_0 e^{-\frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t}}{e^{\frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t} - c_0 e^{-\frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t}}, \tag{10}$$

当 t 足够大,即宇宙经过了充分暴涨时,或上式中 e 的负指数函数的值为一较小量,加之与小量 c_0 ($c_0 = e^C$,设取 C 为较大的负数)相乘,故所得到的更高阶小量的项完全可以忽略,这时 $H = \sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}$ = 常数,此时,(7)式可再次表为

$$a = \left(\frac{\alpha_1}{4\alpha_2 e^C}\right)^{\gamma} e^{\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t}, \tag{11}$$

其中 C 是本文找出的影响宇宙暴涨的一个新的动力学参数.

同理,利用减速参数的定义经细致计算可一般地得

$$q = \frac{1}{2\gamma} - 1 - \frac{\left(e^{\frac{1}{2\gamma_1}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t} - c_0 e^{\frac{-1}{2\gamma}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t}\right)^2}{\left(e^{\frac{1}{2\gamma_1}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t} + c_0 e^{\frac{-1}{2\gamma}\sqrt{\frac{k'\alpha_2}{3}}t}\right)^2}, \tag{12}$$

当 t 大到一定的值时,即宇宙暴涨到抹平了所有起源于量子涨落等所引起的大尺度的不对称时,q 可化简为

$$q = \frac{1}{2\gamma} - 2, \tag{13}$$

由于减速参数的定义前有一负号,因此上面得到的结果和使用加速度 $\ddot{a}$ 所得叙述方式相反,实质是完全一致的.

另一方面,粒子物理学认为,真空是一个能量最低的状态,真空是有能量的,正是由于真空能量与引力耦合,可有爱因斯坦场方程中的宇宙学常数项.按照物理学的观点,宇宙学常数可以是量子涨落的结果,等效于真空能量密度.宇宙学常数 Λ 导致能量-动量张量中所对应的密度为[4]:$\rho_V = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. 当压强 $p = -\rho_V$,由于压强与能量密度正好大小相等且符号相反,因此宇宙学常数在爱因斯坦方程中起一个"反作用力"的作用,可以导致一个加速膨胀的宇宙.从上面的讨论可以发现不仅宇宙常数可以导致一个暴涨的宇宙,参数 $\gamma = -\frac{1}{\beta_1}$ 也可使减速参数变化,从而使宇宙作不同的演化.这对进一步更多地研究宇宙演化开辟了一个研究途径,故有现实意义.

用 Bern-Oppenheimer 近似理论[8,9] 研究减速因子,如 γ 取为慢变参量,当 γ 由大到小变化时,就可使宇宙加速暴涨、匀速暴涨和减速暴涨.暴涨结束后,当 γ 变大时可使宇宙又开始加速膨胀,但这时不是暴涨,这也因为减速暴涨的一个自然结果就是加速膨胀.现代天文观测已发现宇宙正以一个恒定的加速度膨胀,而这些恰好是以上的结果,即以上所讨论的由于 γ 的变化使宇宙经历了由加速暴涨到减速暴涨,后又到加速膨胀的结果不但与现在宇宙学的普遍认识[3,4],而且还与天文观测一致[10,11].

现讨论暴涨宇宙中温度随时间的演化.根据热力学理论,对早期宇宙的演化[11],其系统可以看做绝热的热力学系统

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}[(\rho + p)V] - V\mathrm{d}p, \tag{14}$$

由于其系统可以看做绝热的热力学系统,有确定的因果关系,因此可得

$$S = \frac{a^3(\rho + p)}{T} = 常数, \tag{15}$$

故可得宇宙演化过程中温度随时间变化的关系

$$T = a^3(t)[p(t) + \rho(t)]\frac{T_n}{a_n^3(\rho_n + p_n)}, \tag{16}$$

其中 a_n, ρ_n, p_n 和 T_n 可为某一阶段的观测值,(16)式是一般的表达式.因本文的研究是一般的,又由于篇幅限制,故有关本文的推广及更多详尽的研究等将另文给出.

5 总结和结论

依据爱因斯坦方程并利用一般密度的不同对称性的分析方法,通过一般地求解不同密度物质的(具有一般形式的密度的表达形式)情况下的爱因斯坦方程,以及通过对暴涨宇宙的物理的探索,得到了 $\rho = \alpha_0 a^{-2} + \alpha_1 a^{\beta_1} + \alpha_2$ 的一般物质密度的表达式,解出了表征宇宙标度因子的不同演化的一般新解,给出了暴涨宇宙演化中的哈勃常数、依赖于爱因斯坦方程的一般的减速因子和暴涨宇宙演化中温度随时间的演化.而且还得到当宇宙学常数对物质密度的贡献大于零时有指数复合函数形式的一般暴涨,当宇宙学常数对密度的贡献小于零时宇宙有余弦复合函数形式的演化.当一般密度函数的参数取特殊值时,回到通常人们得到的解,并且发现这些通常得到的解实际上只是近似解.本文找出了影响宇宙暴涨的一个新的动力学参数 C,所预言的 γ 的变化使宇宙经历了由加速暴涨到减速暴涨,后又到加速膨胀的结果不但与现在宇宙学的普遍认识相同,而且还与天文观测一致,亦即发现宇宙不仅仅只是简单经历了一次暴涨,还具体地经历了由加速暴涨、匀速暴涨和减速暴涨的一个完整过程,并且宇宙充分暴涨后可做加速膨胀.

作者之一(黄永畅)感谢段一士教授早年对相关问题的指导和讨论,感谢蔡荣根教授、张新民教授、张元仲教授和黄超光教授在不同时期对相关问题的讨论.

参考文献(References)

1 William J, Kaufmann, Ⅲ, Relativity and Cosmology, New York: Harper & Row, 1977

2 Rice J. Relativity, a Systematic Treatment of Einstein's Theory, London, New York [etc.]: Longmans, Green, 1923

3 Linde A D. Particle Physics and Inflationary Cosmology, Berkshire: Harwood Academic Publishers, 1990

4 Liddle A R, Lyth D H. Cosmological Inflation and Large-Scale Structure, Cambridge University Press, 2000

5 Venzo de Sabbata, Ho Tso-Hsiu. Cosmology and Particle Physics, Dordrecht; Boston: Kluwer Academic, 1994

6 Hermann B. Cosmology, Cambridge University Press, 1952

7 Werner I. Relativity, Astrophysics and Cosmology, Proceedings of the Summer School Held, 14—26 August, 1972 at the Banff Centre, Banff Alberta, Dordrecht, Boston, Reidel, 1973

8 Born M, Oppenheimer J R. Ann. Physik, 1927, **84**:457

9 Sun C P et al. Eur. Phys., 2001, **D13**:145

10 Sahni V. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, **16**:527

11 Kolb E W, Turner M S. The Early Universe, New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1990

Cosmological Inflationary Evolution Originating from Different Distributions of Matter

PANG Zhao-Guang[1,2]　HUANG Yong-Chang[2;1)]

1 (College of Physics, Hebei Normal University, Hebei 050016, China)

2 (Department of Applied Physics, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract In this paper gives a general expression of matter density ρ that is relative to cosmological different inflations, and a new general solution of the cosmological scale factor is derived out. We find that the cosmological scale factor has a composite function form of exponent inflation if the cosmological constant is positive, and the factor is a composite function of cosine if the cosmological constant is negative. The cosmological scale factor returns to the usual solved solutions when the parameters in the general density function are taken as some special values. Furthermore, a new dynamical parameter C that affects the inflation of the cosmology is found.

Key words inflationary cosmology, matter density, cosmological evolution, Einstein equation

Received 20 April 2003

1) Corresponding author