

一种推广对力模型及在大形变核中的应用*

潘峰¹ V. G. Gueorguiev² J. P. Draayer²

1 (辽宁师范大学物理系 大连 116029)

2 (路易斯安那州立大学物理与天文系 巴顿鲁日 LA70803 美国)

摘要 总结了可描述大形变原子核运动的 Nilsson 平均场加推广的对力相互作用的可解模型. 该模型在对力强度较弱的区域仍然以单体和两体相互作用为主. 但随着对力强度的增加, 高阶相互作用的修正将逐渐变得重要. 通过对同位素 $^{154-171}\text{Yb}$ 奇偶质量差的数值拟合显示, 该新模型可说明大形变核的运动规律.

关键词 推广的对力相互作用 严格解 大形变核 奇偶质量差

从平均场理论出发, 对力一直是核结构和金属团结中所涉及的重要剩余相互作用. 在此基础上建立的 Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) 理论^[1] 和 Hartree-Fock-Bogolyubov (HFB) 方法^[2] 都是常用的近似计算方法. 这些方法在应用于核结构问题时的弊病是众所周知的. 首先, 由于核中决定原子核低激发谱的价核子数目太少, 价核子数的涨落就不可忽略, 这就违背了这些近似方法的最初假定, 由此会带来粒子数不守恒、多余伪态、本征解不正交等一系列的严重问题. 这些近似方法所带来的另一个问题是割裂了一大类重要的物理情形. 解决此问题大多使用粒子数投影技术. 该技术使计算更为复杂而且其结果对高激发谱没有明显的改进. 当将该理论应用于纳米尺度的金属团簇时也会出现类似的问题^[3].

由于对力问题严格解的重要性, 人们在 Richardson 早期工作^[4,5] 的基础上来构建并推广可解对力模型方面取得了不少进展^[6-11]. 在所有这些以 Bethe 假定为基础的工作中, 模型的解是用一组高度非线性方程来表达的. 虽然这些工作揭示了对力模型的可解性, 但要利用这些非线性方程得到数值解仍然是非常困难的, 特别当遇到价核子数和所涉及的轨道数都很大的大形变核时就更是如此.

这就限制了这种方法在大形变核方面的应用前景, 而仅能依据并不可靠的近似方法.

描述大形变核的标准对力模型哈氏量可写为

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^p \epsilon_j n_j - G \sum_{i,j=1}^p a_i^+ a_j, \quad (1)$$

其中 p 是所考虑的 Nilsson 能级的轨道数, $G > 0$ 是对力强度参数, ϵ_j 是取自 Nilsson 模型的单粒子能量, n_j 是第 j 壳层的费米子数算子, a_i^+ (a_j) 是费米子对的产生(湮没)算符. 由于 Pauli 原理, 每一个 Nilsson 能级最多只能容纳一对核子, 因此哈氏量(1)等价于具有有限格点和无穷大格点上排斥势的硬核 Bose-Hubbard 模型. 算符 a_i^+ , a_j , 以及 $n_j^a = n_j/2$ 满足硬核玻色子代数

$$(a_i^+)^2 = 0, [a_j, a_i^+] = \delta_{ji}(1 - 2n_j^a), \\ [a_j^+, a_i^+] = [a_j, a_i] = 0. \quad (2)$$

作为(1)式的推广, 可构造出如下推广的对力哈氏量:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^p \epsilon_j n_j - G \sum_{i,j=1}^p a_i^+ a_j - \\ G \left(\sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{1}{(\mu!)^2} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_{2\mu}} a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ \dots a_{i_{\mu}}^+ a_{i_{\mu+1}} a_{i_{\mu+2}} \dots a_{i_{2\mu}} \right), \quad (3)$$

对给定的 μ , (3)式最后一项的求和指标 i_1, i_2, \dots ,

2003-11-29 收稿, 2004-03-29 收修改稿

* 国家自然科学基金(10175031), 辽宁省教育厅科学基金(202122024)和辽宁省拔尖人才计划资助

i_2 中的任意一对指标都不能相同. 除(1)式含有的通常 Nilsson 平均场项和标准对相互作用项外, (3)式还包含了多对同时跳迁项, 该项的出现允许核子对在不同的 Nilsson 能级间同时发生散射. 我们可以证明, 这种推广的对力模型是简单严格可解的.

容易看到, 构造(3)式本征波函数的位型空间的基矢 $a_i^+ \dots a_j^+$ 中的指标必须都是不同, 即 $i \neq \dots \neq j$. 令 $|j_1, \dots, j_m\rangle$ 为对真空态, 对指标 $p \geq i \geq 1$ 满足

$$a_j |j_1, \dots, j_m\rangle = 0, \quad (4)$$

j_1, j_2, \dots, j_m 表示被单价核子所占据的能级. 由于 Pauli 原理, 这些被单价核子所占据的能级轨道就是阻塞的轨道, 从而不允许再被其他价核子对填充.

利用文献[11]所提出的代数方法, (3)式的 k 对本征态可写为

$$|k; \zeta; j_1, \dots, j_m\rangle = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p} C_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(\zeta)} a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ \dots a_{i_k}^+ |j_1, \dots, j_m\rangle, \quad (5)$$

其中 $C^{(\zeta)}$ 是待定的展开系数, (5)式中的求和限制保证了没有轨道被双对占有的组态出现. 而且我们总是假定, 被单核子所占据的轨道 j_1, \dots, j_m 要在(5)式的求和中排除. 由于对奇核系统的讨论是类似的, 下面仅讨论辛弱数为零的偶偶核系统. 展开系数 $C^{(\zeta)}$ 可简单地表示为

$$C_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(\zeta)} = \frac{1}{1 - x^{(\zeta)} \sum_{\mu=1}^k \epsilon_{i_\mu}}, \quad (6)$$

类似 Bethe 假定方法, 参数 $x^{(\zeta)}$ 是待定的. 为了证明代数假定(5)和(6)式是自洽的, 可直接将哈氏量(3)式直接作用到(5)式所给出的 k 对态矢上. 利用(2)式给出的硬核玻色子代数关系并结合文献[7]所给出的寻找海森堡代数哈氏量严格解的方法容易验证, k 对激发能可表为

$$E_k^{(\zeta)} = \frac{2}{x^{(\zeta)}} - G(k-1), \quad (7)$$

其中待定参数 $x^{(\zeta)}$ 要求满足如下代数方程:

$$\frac{2}{x^{(\zeta)}} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p} \frac{G}{(1 - x^{(\zeta)} \sum_{\mu=1}^k \epsilon_{i_\mu})} = 0. \quad (8)$$

附加量子数 ζ 用于标记(8)式的第 ζ 个根. 将(7), (8)式与文献[7]给出的仅有单体项的海森堡代数哈氏量进行比较后容易发现, (5)式中的算符乘积项 $a_i^+ \dots a_j^+$ 可看作一个巨玻色子算符.

以下以 $p = 10$ 的简单情形为例来分析(3)式给出的推广对力相互作用与(1)式标准对力模型的区别. 在本例中, 单粒子能量取为 $\epsilon_i = i + \chi_i$, 其中为

了避免偶然简并, χ_i 取为(0, 1)之间的随机数. 显然, (1)和(3)式给出的两个模型的主要区别是(3)式中包含和多体相互作用项, 所以值得研究的主要问题就是新模型中的动力学行为是否仍然是由单体和两体相互作用所主导的. 如果答案是否定的, 就需要搞清楚在怎样的条件下多体项才可作为微扰来处理. 为此, 在(3)式给定的基态下计算了各阶相互作用项的平均值 $\langle V_\mu \rangle$, 并将该平均值作为对力强度 G 的函数. 在该计算中, 单粒子能取为 $\epsilon_1 = 1.179, \epsilon_2 = 2.650, \epsilon_3 = 3.162, \epsilon_4 = 4.588, \epsilon_5 = 5.006, \epsilon_6 = 6.969, \epsilon_7 = 7.262, \epsilon_8 = 8.687, \epsilon_9 = 9.899, \epsilon_{10} = 10.201$. 基态平均值 $\langle V_\mu \rangle$ 中的 V_μ 定义为

$$V_1 = \sum_{i,j} a_i^+ a_j, V_\mu = \frac{1}{(\mu!)^2} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_{2\mu}} a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ \dots a_{i_\mu}^+ a_{i_{\mu+1}} a_{i_{\mu+2}} \dots a_{i_{2\mu}}, \quad (9)$$

$\mu = 2, 3, \dots$. 为了显示各阶相互作用项的贡献, 定义贡献占有比 $R_\mu = \langle V_\mu \rangle / \langle V_1 \rangle$, 其中 V_1 表示(9)式各项的总和. 直到半满填充情形的计算结果见图 1. 从图 1 可见, 当对力强度参数 G 较小的条件下, 系统的动力学完全由两体相互作用项 V_1 起作用; 当对力强度参数 G 逐渐变大时, V_2 和 V_3 的成分逐渐变大, 但其他更高阶的相互作用项还是可以忽略的. 结果还显示, 当对数增多时 V_2 和 V_3 的贡献也将随之增大. 超过半满填充的情形得到的结果是类似的.

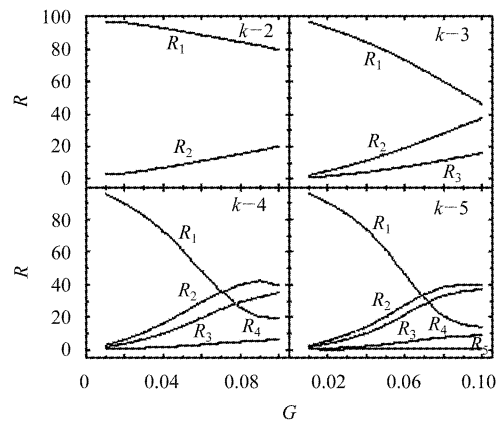


图 1 $p = 10$ 时的相互作用贡献占有比 $R_\mu (\mu = 1, 2, \dots, 5)$ 随对力强度参数 G 的变化规律 (k 为价核子对数)

根据以上的讨论我们得出结论, 只有当价核子对数增加时对力强度参数 G 减小, 推广的对力模型才可能是合理的. 不然, 系统的动力学行为就将完全由高阶相互作用所主导而违背物理学的基本规律. 为此, 将本模型用于描述大形变核区的 $^{154-171}\text{Yb}$ 同位素, 拟合其奇偶质量差. 每一核素的单粒子能

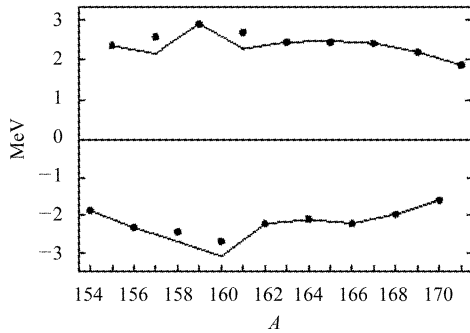


图 2 $^{154-171}\text{Yb}$ 的奇偶质量差 $P(A) = E(A) + E(A-2) - 2E(A-1)$

$E(A)$ 是总结合能, \bullet 实验值, — 推广的对力模型的拟合结果.

级取自自由实验所确定的 *Nilsson* 单粒子能级^[12]. 图 2 显示了奇偶质量差的理论拟合结果和实验结果^[13] 的比较. 除 $^{157-161}\text{Yb}$ 的拟合结果与实验存在较小的偏差外, 总的说来, 模型基本再现了实验数据. 拟合

表 1 推广的对力模型拟合 $^{154-171}\text{Yb}$ 的奇偶质

量差时所用的对力强度参数 G 的取值 (keV)

	^{154}Yb	^{156}Yb	^{158}Yb	^{160}Yb	^{162}Yb	^{164}Yb	^{166}Yb	^{168}Yb	^{170}Yb
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G	245	41	6.5	3.02	1.11	0.467	0.233	0.137	0.0948
		1			1				
	^{155}Yb	^{157}Yb	^{159}Yb	^{161}Yb	^{163}Yb	^{165}Yb	^{167}Yb	^{169}Yb	^{171}Yb
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G	270.7	42.0	10.9	1.471	1.0	0.649	0.347	0.218	0.1611

中所得到的对力强度参数 G 的取值见表 1. 通过表 1 可以发现, 对力强度 G 在 1 对时为 245keV, 到 9 对时逐渐减小为 0.0948keV, 而单粒子能级间距总是在几百 keV. 这一结果说明, 本模型用来描述大形变核是完全可行的, 这时模型完全由两体势起主导作用.

研究结果显示, 推广的对力模型能够用于描述大形变区的原子核. 该模型也可应用于说明纳米尺度金属结团的对相互作用现象.

参考文献 (References)

- 1 Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R. Phys. Rev., 1957, **108**: 1175
- 2 Ring P, Schuck P. The Nuclear Many-Body Problem, Springer-Verlag, Berlin, 1980
- 3 Ralph D C, Black C T, Tinkham M. Phys. Rev. Lett., 1996, **78**: 4087
- 4 Richardson R W. Phys. Lett., 1963, **3**: 277
- 5 Richardson R W, Sherman N. Nucl. Phys., 1964, **52**: 221
- 6 PAN F, Draayer J P, Ormand W E. Phys. Lett., 1998, **B422**: 1
- 7 PAN F, Draayer J P. Ann Phys. (N. Y.), 1999, **271**: 120
- 8 Dukelsky J, Esebbag C, Schuck P. Phys. Rev. Lett., 2001, **87**: 066403
- 9 Dukelsky J, Esebbag C, Schuck P. Phys. Rev. Lett., 2002, **88**: 062501
- 10 PAN F, Draayer J P, GUO L. J. Phys. 2000, **A33**: 1597
- 11 PAN F, Draayer J P. J. Phys., 2000, **A33**: 9095
- 12 Nix J R, Kratz K L. At Data Nucl. Data Tables, 1997, **66**: 131
- 13 Audi G et al. Nucl. Phys., 1997, **A624**: 1

An Extended Pairing Model and Its Applications to Well-Deformed Nuclei*

PAN Feng¹ V. G. Gueorguiev² J. P. Draayer²

1 (Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

2 (Department of Physics and Astronomy, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803, USA)

Abstract A Nilsson mean-field plus extended pairing interaction Hamiltonian with many-pair interaction terms is summarized. The investigation shows that one- and two-body interactions continue to dominate the dynamics for relatively small values of the pairing strength. As the strength of the pairing interaction grows, however, higher many-body interaction terms grow in importance. As an example, numerical fits to even-odd mass differences in the $^{154-171}\text{Yb}$ isotopes shows that the new model is applicable to well-deformed nuclei.

Key words pairing interaction, exact solution, well-deformed nuclei, even-odd mass difference

Received 29 November 2003, Revised 29 March 2004

* Supported by NSFC(10175031), Education Department of Liaoning Province(202122024) and Top-Talent Project of Liaoning Province