第26卷 第6期 高能物理与核物理 Vol.26, No.6
2002年6月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jun., 2002

Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束效应*

王继锁[1,2;1)] 冯健[1,2] 刘堂昆[1,3] 詹明生[1]

1(中国科学院武汉物理与数学研究所,波谱与原子分子物理国家重点实验室 武汉 430071)

2(聊城师范学院物理系 山东 252059)

3(湖北师范学院物理系 黄石 435002)

摘要 引入了一种量子反聚束效应,研究了 Q 变形非简谐振子湮没算符 K 次幂 ($K\geqslant3$)的 K 个本征态的量子反聚束效应,探讨了这些本征态的物理意义. 结果表明,这 K 个本征态均可呈现量子反聚束效应,它们都可由不同时刻依赖于时间的 Q 变形非简谐振子广义相干态的线性叠加而生成.

关键词 Q 变形非简谐振子 湮没算符的高次幂 本征态 量子反聚束效应

1 引言

由于光场本质上是量子场,因此量子光场具有某些纯属于量子特征的性质,这些性质是经典理论所无法解释的,我们称之为非经典效应. 目前实验上已证实量子光场存在三类非经典效应,即压缩态、亚泊松分布和反聚束效应. 理论研究表明,在单模场和瞬态过程情况下,反聚束效应和亚泊松分布是等价的[1,2];而研究非经典光场的一种重要且行之有效的途径,就是尽可能多地构造出一些量子力学所允许的态矢量,然后研究它们所描述的光场的量子统计性质,从而有可能发现新的非经典效应,并找到各种非经典效应之间的联系[3].

另外,由于作为 Q 类似海森堡代数的一种最直接物理实现的 Q 振子已被用于唯象地描述核物理及量子光学中的某些非线性效应[4,5],因此构造典型量子态的 Q 类似形式并研究它们的一些量子统计性质,一直是近几年来人们所关注的研究课题之一. 最近,我们在前文[6]中构造出了 Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂 $b_{Q^-}^{K}$ ($K\geqslant3$;全文同)的 K 个本征态,证明了它们的完备性,并且研究了这些本征态的高阶压缩特性. 本文引入了一种量子反聚束效应,在前文[6]工作的基础上,研究 Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂 $b_{Q^-}^{K}$ 的 K 个本征态的量子反聚束效应,并探讨这 K 个本征态的物理意义.

2001-08-13 收稿

* 国家自然科学基金(10074072)和山东省自然科学基金资助

1) E-mail: jswang@371.net

569—575

2 算符 $b_{Q^-}^K$ 的 K 个本征态的反聚束效应

有关非简谐振子和 Q 变形非简谐振子广义相干态的若干结果见文献[6—9]，这里不再赘述.

由文献[6]可知，Q 变形非简谐振子湮没算符 K 次幂 $b_{Q^-}^K$ 的属于本征值为 β^K 的 K 个正交归一本征态（K 重简并态）为

$$|\psi_j\rangle_Q = C_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^{mK+j}}{\sqrt{[mK+j]![2k]_{mK+j}}} |mK+j\rangle \tag{1}$$

$$C_j(z) = [A_j^Q(z)]^{-1/2} = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{mK+j}}{[mK+j]![2k]_{mK+j}}\right]^{-1/2} \tag{2}$$

式中 β 为复参数（$|\beta| < R = 1/(1-Q)$），$k = (1-\sqrt{A+1/4})/2$，j 的可能取值（下同）为 $j = 0,1,2,\cdots,(K-1)$，其他有关符号的物理意义同文献[6]，[9]并有下列关系式：

$$b_{Q^-}^K |\psi_j\rangle_Q = \beta^K |\psi_j\rangle_Q, \quad {}_Q\langle\psi_{j'}|\psi_j\rangle_Q = \delta_{j'j}, \tag{3}$$

$$b_{Q^-}^i |\psi_0\rangle_Q = \beta^i A_0^{Q^{-1/2}} A_{K-i}^{Q\ 1/2} |\psi_{K-i}\rangle_Q, \ (i = 1,2,\cdots,K). \tag{4}$$

对于由(1)式所定义的算符 $b_{Q^-}^K$ 的这 K 个正交归一本征态 $|\psi_j\rangle_Q$，与文献[10]相类似，我们定义其二阶关联函数为

$$g_{2,j} = \frac{{}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^2 b_{Q^-}^2|\psi_j\rangle_Q}{{}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+} b_{Q^-}|\psi_j\rangle_Q^2} \tag{5}$$

式中 b_{Q^+} 和 b_{Q^-} 分别为 Q 变形非简谐振子的产生和湮没算符，如果 $g_{2,j} < 1$，则称态 $|\psi_j\rangle_Q$ 具有量子反聚束效应；这与光场的反聚束效应[10]极为相似，是光场反聚束效应的一种自然推广.

下面考察算符 $b_{Q^-}^K$ 的这 K 个正交归一化本征态 $|\psi_j\rangle_Q$ 的量子反聚束效应.

将(1)式代入(5)式并利用(4)式，得

$$g_{2,0} = \frac{{}_Q\langle\psi_0|b_{Q^+}^2 b_{Q^-}^2|\psi_0\rangle_Q}{{}_Q\langle\psi_0|b_{Q^+} b_{Q^-}|\psi_0\rangle_Q^2} = \frac{A_0^Q A_{K-2}^Q}{A_{K-1}^{Q\ 2}}, \tag{6}$$

$$g_{2,1} = \frac{{}_Q\langle\psi_1|b_{Q^+}^2 b_{Q^-}^2|\psi_1\rangle_Q}{{}_Q\langle\psi_1|b_{Q^+} b_{Q^-}|\psi_1\rangle_Q^2} = \frac{A_1^Q A_{K-1}^Q}{A_0^{Q^2}}, \tag{7}$$

$$g_{2,j} = \frac{{}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^2 b_{Q^-}^2|\psi_j\rangle_Q}{{}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+} b_{Q^-}|\psi_j\rangle_Q^2} = \frac{A_{j-2}^Q A_j^Q}{A_{j-1}^{Q^2}}, (j = 2,3,\cdots,K-1). \tag{8}$$

显然，由(6)—(8)式可以得到关系式 $\prod_{j=0}^{K-1} g_{2,j} = 1$. 将(2)式代入(6)式，得到

$$g_{2,0} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{m}([nK]![2k]_{nK}[mK-nK+K-2]![2k]_{mK-nK+K-2})^{-1}\right\}z^{mK}}{z^K\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{m}([nK+K-1]![2k]_{nK+K-1}[mK-nK+K-1]![2k]_{mK-nK+K-1})^{-1}\right\}z^{mK}} = f_1(z)/\{z^K f_2(z)\}, \tag{9}$$

式中 $z=|\beta|^2$ 而对于 $K\geqslant 3$，有

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{[nK]![2k]_{nK}[mK-nK+K-2]![2k]_{mK-nK+K-2}}>$$
$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{[nK+K-1]![2k]_{nK+K-1}[mK-nK+K-1]![2k]_{mK-nK+K-1}},\tag{10}$$

因此 $f_1(z)>f_2(z)$，故当 $z<1$ 时，$g_{2,0}>1$；然而，当 $z>1$ 时，一定存在某些 z 值(例如当 $z^K>f_1(z)/f_2(z)$ 时)，使得下式成立：

$$g_{2,0}=f_1(z)/\{z^K f_2(z)\}<1.\tag{11}$$

同样，将(2)式代入(7)式可以得到

$$=\frac{z^K\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left\{\sum\limits_{n=0}^{m}([nK+1]![2k]_{nK+1}[mK-nK+K-1]![2k]_{mK-nK+K-1})^{-1}\right\}z^{mK}}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left\{\sum\limits_{n=0}^{m}([nK]![2k]_{nK}[mK-nK]![2k]_{mK-nK})^{-1}\right\}z^{mK}}=$$
$$z^K f_3(z)/f_4(z)\tag{12}$$

显然

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{[nK+1]![2k]_{nK+1}[mK-nK+K-1]![2k]_{mK-nK+K-1}}<$$
$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{[nK]![2k]_{nK}[mK-nK]![2k]_{mK-nK}},\tag{13}$$

因此有 $f_3(z)<f_4(z)$，所以当 $z^K<f_4(z)/f_3(z)$ 时，应有 $g_{2,1}<1$.

将(2)式代入(8)式，得到

$$=\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left\{\sum\limits_{n=0}^{m}([nK+j-2]![2k]_{nK+j-2}[mK-nK+j]![2k]_{mK-nK+j})^{-1}\right\}z^{mK}}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left\{\sum\limits_{n=0}^{m}([nK+j-1]![2k]_{nK+j-1}[mK-nK+j-1]![2k]_{mK-nK+j-1})^{-1}\right\}z^{mK}}<$$
$$\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{[m+1]}{[j-2]![2k]_{j-2}j![2k]_j}z^{mK}}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{[m+1]}{[[mK+j-1]![2k]_{mK+j-1}]^2}}<$$
$$\frac{\dfrac{1}{[j]![2k]_j[j-2]![2k]_{j-2}}\sum\limits_{m=0}^{\infty}[m+1]z^{mK}}{\dfrac{1}{\{[j-1]![2k]_{j-1}\}^2}},(j=2,3,\cdots,K-1).\tag{14}$$

显然，

$$\lim_{Z\to 0}\sum_{m=0}^{\infty}[m+1]z^{mK}=1,\tag{15}$$

因此由(14)式可以得到

$$\lim_{Z\to 0}g_{2,j}<\frac{\{[j-1]![2k]_{j-1}\}^2}{[j]![2k]_j[j-2]![2k]_{j-2}}=\frac{[j-1][2k+j-2]}{[j][2k+j-1]}<1,(j=2,3,\cdots,K-1).\tag{16}$$

故当 $z\to 0$ 时在态 $|\psi_j\rangle_Q(j=2,3,\cdots,K-1)$ 中也可以呈现量子反聚束效应.

综上所述,只要适当地选取复参数 α 的模值,在 $z=|\beta|^2$ 的不同取值范围内,由(1)式所给出的算符 $b_{Q^-}^K$ 的这 K 个本征态均总可以呈现由(5)式所定义的量子反聚束效应.

3 算符 $b_{Q^-}^K$ 的 K 个本征态的物理意义

在本节中,我们从含时薛定谔方程出发,首先生成出不同时刻的依赖于时间的 Q 变形非简谐振子广义相干态,然后构造出算符 $b_{Q^-}^K$ 的 K 个正交归一本征态,以便探讨它们的物理意义.

假设一体系按照如下的含时薛定谔方程演化:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\chi(t)\rangle=\hat{H}|\chi(t)\rangle, \tag{17}$$

并在初始时刻($t=0$)处于如下的 Q 变形非简谐振子的广义相干态[9]:

$$|\beta\rangle=\{F_Q(|\beta|^2)\}^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}}|n\rangle, \tag{18}$$

$$F_Q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{[n]![2k]_n}\equiv e_{Q,k}(z), \tag{19}$$

且体系的哈密顿依赖于时间;那么,在 t 时刻体系的态矢量可以写成为

$$|\chi(t)\rangle=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t\right)|\beta\rangle, \tag{20}$$

与文献[11]相类似,若选取 $\hat{H}=\hbar\omega(b_{Q^+}b_{Q^-})=\hbar\omega N_Q$ 并将此式和(18)式代入(20)式,则有

$$|\chi(t)\rangle=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t\right)|\beta\rangle=\exp(-\mathrm{i}\omega b_{Q^+}b_{Q^-}t)\{e_{Q,k}(|\beta|^2)\}^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}}|n\rangle=$$

$$\{e_{Q,k}(|\beta|^2)\}^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{\beta\exp(-\mathrm{i}\omega t)\}^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}}|n\rangle=|\beta e^{-\mathrm{i}\omega t}\rangle, \tag{21}$$

由此,在时刻 $t_l=\frac{2\pi}{\omega}\frac{l}{K}(l=0,1,2,\cdots,K-1)$ 体系的态矢量可以写成为

$$|\chi(t_l)\rangle=\left|\beta e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{K}l}\right\rangle. \tag{22}$$

现在,考察上述依赖于时间的 Q 变形非简谐振子广义相干态(即(22)式)在不同时刻的线性叠加态,即

$$|\phi_i\rangle=\sum_{l=0}^{K-1}C_l^i\left|\beta e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{K}l}\right\rangle, \tag{23}$$

若适当地选取叠加系数,便可构造出算符 $b_{Q^-}^K$ 的 K 个正交归一本征态.由(23)式所给出的两态矢的内积为

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle=\sum_{l=0}^{K-1}\sum_{l'=0}^{K-1}(C_l^i)^*C_{l'}^j\langle\beta z_K^l|\beta z_K^{l'}\rangle=\langle C_i|\tilde{M}|C_j\rangle,\ (i,j=0,1,2,\cdots,K-1), \tag{24}$$

式中

$$z_K = \exp(-\mathrm{i}2\pi/K), \tag{25}$$

$$|C_j\rangle = \begin{pmatrix} C_0^j \\ C_1^j \\ \vdots \\ C_{K-1}^j \end{pmatrix}, \langle C_i| = (C_0^i\ C_1^i \cdots C_{K-1}^i)^* \tag{26}$$

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \langle\beta|\beta\rangle & \langle\beta|\beta z_K\rangle & \cdots & \langle\beta|\beta z_K^{K-1}\rangle \\ \langle\beta z_K|\beta\rangle & \langle\beta z_K|\beta z_K\rangle & \cdots & \langle\beta z_K|\beta z_K^{K-1}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\beta z_K^{K-1}|\beta\rangle & \langle\beta z_K^{K-1}|\beta z_K\rangle & \cdots & \langle\beta z_K^{K-1}|\beta z_K^{K-1}\rangle \end{pmatrix}. \tag{27}$$

而矩阵 $\widetilde{M}$ 的矩阵元可以写成为

$$\widetilde{M}_{l,l'} = e_{Q,k}^{-1}(|\beta|^2)e_{Q,k}(|\beta|^2 z_K^{l'-l}),\ (l,l' = 0,1,2,\cdots,K-1), \tag{28}$$

其中函数 $e_{Q,k}(z)$ 的表达式由(19)式给出．显然矩阵 $\widetilde{M}$ 是厄米矩阵，故它的属于两个不同本征值的本征矢是相互正交的；如果假设 $|C_i\rangle$ 和 $|C_j\rangle$ 是它的两个本征矢，即

$$\widetilde{M}|C_i\rangle = \lambda_i|C_i\rangle,\quad \widetilde{M}|C_j\rangle = \lambda_j|C_j\rangle, \tag{29}$$

式中

$$|C_j\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ z_K^j \\ z_K^{j2} \\ \vdots \\ z_K^{j(K-1)} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\lambda_j = e_{Q,k}^{-1}(|\beta|^2)\sum_{l=0}^{K-1} e_{Q,k}(|\beta|^2 z_K^l)z_K^{jl}, \tag{31}$$

则可得到其正交关系为

$$\langle C_i|C_j\rangle = K\delta_{ij}. \tag{32}$$

若用列矢量(30)式取代(23)式中的叠加系数并考虑到其正交条件，可以得到

$$|\phi_j\rangle = (K\lambda_j)^{-1/2}\sum_{l=0}^{K-1} z_K^{jl}|\beta z_K^l\rangle,\ (j = 0,1,2,\cdots,K-1). \tag{33}$$

由(29)，(32)式，容易证明由(33)式所给出的两个态的内积为

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \frac{1}{K\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\langle C_i|\widetilde{M}|C_j\rangle = \sqrt{\lambda_i/\lambda_j}\delta_{ij} = \delta_{ij}, \tag{34}$$

这表明，态(33)式形成一个正交系．由(33)式可以清楚地看出态 $|\phi_j\rangle$ 的物理意义，即态 $|\phi_j\rangle$ 可以由不同时刻依赖于时间的 K 个 Q 变形非简谐振子广义相干态 $|\beta e^{-\mathrm{i}\omega t_l}\rangle$ $(l=0,1,2,\cdots,K-1)$ 的线性叠加而生成，其叠加系数为 $C_l^j = z_K^{jl} = \exp\left(-\mathrm{i}\dfrac{2\pi}{K}jl\right)$．另外，可以证明

$$|\phi_0\rangle = |\psi_0(\beta)\rangle_Q,\quad |\phi_l\rangle = |\psi_l(\beta)\rangle_Q,\quad (l = 1,2,\cdots,K-1). \tag{35}$$

因此,由(33)式所给出的这 K 个态 $|\phi_j\rangle$ 正是由(1)式所定义的算符 b_{Q}^{K}- 的 K 个正交归一本征态.

4 结论

在本文中,我们引入了一种量子反聚束效应,在前文[6]工作的基础上,研究了 Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂 b_{Q}^{K}- 的 K 个本征态的量子反聚束效应,并探讨了这 K 个本征态的物理意义. 其结果表明:Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂 b_{Q}^{K}- 的 K 个本征态均可呈现量子反聚束效应,它们都可由不同时刻的依赖于时间的 Q 变形非简谐振子广义相干态的线性叠加而生成. 通过讨论,进一步揭示了算符 b_{Q}^{K}-($K\geqslant 3$)的 K 个正交归一本征态的量子统计性质,使我们原来的工作[6]进一步得到完善. 可以相信,这对于人们深刻理解 Q 变形非简谐振子势场的规律将具有一定的学术参考价值. 当然,通过何种实际的物理光学过程可以产生算符 b_{Q}^{K}- 的本征态问题,还有待于人们去深入研究.

参考文献(References)

1 Teich M C, Saleh B E A, Stoler D. Opt. Commun., 1983, **46**:244

2 GUO Guang-Can, WANG Shan-Xiang, FAN Hong-Yi. Chin. J. Quant. Electron., 1987, **4**:1(in Chinese)
(郭光灿,王善祥,范洪义. 量子电子学,1987,**4**:1)

3 PENG Shi-An, GUO Guang-Can. Acta Physica Sinica, 1990, **39**:51(in Chinese)
(彭石安,郭光灿. 物理学报,1990,**39**:51)

4 Chaichian M, Ellnias D et al. Phys. Rev. Lett., 1990, **65**:980

5 Bonatsos D, Daskaloyannis C. Phys. Lett., 1992, **B278**:1

6 WANG Ji-Suo, LIU Tang-Kun, ZHAN Ming-Sheng. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**:1115(in Chinese)
(王继锁,刘堂昆,詹明生. 高能物理与核物理,2000,**24**:1115)

7 XU Zi-Wen. Acta Physica Sinica, 1996, **45**:1807(in Chinese)
(徐子驳. 物理学报,1996,**45**:1807)

8 YU Zhao-Xian, WANG Ji-Suo et al. Acta Physica Sinica, 1997, **46**:1693(in Chinese)
(于肇贤,王继锁等. 物理学报,1997,**46**:1693)

9 XU Zi-Wen. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**:436(in Chinese)
(徐子驳. 高能物理与核物理,1999,**23**:436)

10 Walls D F. Nature, 1983, **306**:141

11 GUO Guang-Can. Quantum Optics. Beijing: Higher Education Press, 1990, 130(in Chinese)
(郭光灿. 量子光学. 北京:高等教育出版社,1990,130)

Antibunching Effect of Eigenstates of the Operator b_Q^K-in a Q-Deformed Non-harmonic Oscillator *

WANG Ji-Suo[1,2;1)]　FENG Jian[1,2]　LIU Tang-Kun[1,3]　ZHAN Ming-Sheng[1]

1 (State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

2 (Department of Physics, Liaocheng Teachers University, Shandong 252059, China)

3 (Department of Physics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China)

Abstract　We introduce a quantum antibunching effect. The quantum antibunching effect of the K eigenstates of the K th powere ($K \geqslant 3$) of the annihilation operator in the Q-deformed non-harmonic oscillator is investigated. The physical meaning of the K states are explored. The results show that there is the quantum antibunching effect in all of those states. All of them can be generated by a linear superposition of generalized coherent states produced by the time-dependent Q-deformation non-harmonic oscillator at different instants.

Key words　Q-deformed non-harmonic oscillator, higher power of the annihilation operator, eigenstate, quantum antibunching effect

Received 13 August 2001

* Supported by National Natural Science Foundation of China (10074072) and Natural Science Foundation of Shandong Province of China

1) E-mail: jswang@371.net