

# 激发奇偶 $q$ 相干态的统计性质

江 俊 勤<sup>1)</sup>

(广东教育学院物理系 广州 510303)

(中国高等科学技术中心(世界实验室) 北京 100080)

**摘要** 构造了激发奇  $q$  相干态  $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q$  和激发偶  $q$  相干态  $a_q^{+m}|\alpha\rangle_q$ , 并通过数值计算研究了参数  $q$  和  $m$  对平均光子数、亚泊松特性和反聚束效应等统计性质的影响. 结果表明: 当  $q$  偏离 1 较远时, 二阶  $q$  相干函数出现振荡现象, 其振幅和周期与  $m$  无关; 平均光子数和 Mandel  $Q_q$  参数都随着  $m$  的增大而急剧增大; 只要不是  $q \rightarrow 1$ , 亚泊松特性和反聚束效应两者是不等价的.

**关键词** 量子代数 激发奇偶  $q$  相干态 平均光子数 亚泊松特性 反聚束效应

## 1 引言

近年来, 量子群和量子代数由于在原子核物理学和量子光学等许多领域中有着广泛的应用, 而引起了数学和物理学工作者的广泛注意(见文献[1]及其参考文献). 在原子核物理学中, 量子群理论的  $q$  变形转子模型可用于描述原子核转动谱<sup>[2,3]</sup>. 在量子光学中, 自从 Biedenharn<sup>[4]</sup> 将具有李群结构的相干态推广到具有量子群结构的  $q$  相干态以来,  $q$  相干态的统计性质和应用前景倍受关注. Wang 和 Kuang<sup>[5]</sup> 在此基础上构造了具有重要意义的奇偶  $q$  相干态, 它们的非经典特性也得到了许多研究<sup>[6-10]</sup>.

自 1991 年 Agarwal<sup>[11]</sup> 提出一种通过在相干态上重复作用光子产生算符产生新量子态的方法以来, 已有不少作者<sup>[12-18]</sup> 研究了在其他的量子态上作用光子产生算符对态的性质的影响. 为了进一步认识变形参数  $q$  的物理意义, 本文通过在奇偶  $q$  相干态上重复作用光子产生算符, 引入了激发奇  $q$  相干态和激发偶  $q$  相干态, 并用数值计算的方法对它们的平均光子数、亚泊松特性和反聚束效应等量子统计性质进行研究.

## 2 激发奇偶 $q$ 相干态

奇  $q$  相干态(用上标  $o$  表示)和偶  $q$  相干态(用上标  $e$  表示)分别定义为(未归一化)<sup>[6]</sup>

2001 - 05 - 18 收稿

1)E-mail: jjq203@21cn.com

$$|\alpha\rangle_q^\circ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_q!}} |2n+1\rangle_q, \quad (1)$$

$$|\alpha\rangle_q^c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_q!}} |2n\rangle_q. \quad (2)$$

式中  $\alpha = re^{i\theta}$ ,  $[n]_q!$  定义为

$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q, \quad (3)$$

$$[n]_q = (q^n - q^{-n}) / (q - q^{-1}). \quad (4)$$

由于  $[n]_{1/q} = [n]_q$ , 所以只须考虑  $0 < q \leq 1$ .

本文定义激发奇  $q$  相干态和激发偶  $q$  相干态为

$$|\alpha, m\rangle_q^\circ = C_m^\circ a_q^{+m} |\alpha\rangle_q^\circ = C_m^\circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_q!}} \sqrt{\frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!}} |2n+1+m\rangle_q, \quad (5)$$

$$|\alpha, m\rangle_q^c = C_m^c a_q^{+m} |\alpha\rangle_q^c = C_m^c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_q!}} \sqrt{\frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!}} |2n+m\rangle_q, \quad (6)$$

式中  $a_q^+$  为  $q$  变形玻色产生算符, 它与湮没算符  $a_q$  以及粒子数算符  $N_q$  满足如下对易关系

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \quad (7)$$

$$[N_q, a_q] = -a_q, \quad [N_q, a_q^+] = a_q^+. \quad (8)$$

为了保持奇偶性不变, 重复作用光子产生算符的次数为偶数, 即  $m = 2, 4, 6, \dots$ ; 当  $m = 0$  时(5), (6)式回到(1), (2)式.  $C_m^\circ$  和  $C_m^c$  为归一化常数

$$(C_m^\circ)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \times \frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!}, \quad (9)$$

$$(C_m^c)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n}}{[2n]_q!} \times \frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!}. \quad (10)$$

### 3 激发奇偶 $q$ 相干态的统计性质

#### 3.1 平均光子数

由(5)式和(6)式得平均光子数

$$\begin{aligned} \bar{n}^\circ &= {}^\circ\langle \alpha, m | a_q^+ a_q | \alpha, m \rangle_q^\circ = \\ & (C_m^\circ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \times \frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!} \times [2n+1+m]_q, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{n}^c &= {}^c\langle \alpha, m | a_q^+ a_q | \alpha, m \rangle_q^c = \\ & (C_m^c)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n}}{[2n]_q!} \times \frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!} \times [2n+m]_q. \end{aligned} \quad (12)$$

图 1 和图 2 给出了不同  $q$  值时  $\bar{n}^\circ$  随  $m$  和  $x (= r^2)$  变化的数值结果 ( $m = 0$  对应于未激

发的情况,下同).  $\bar{n}^\circ$  随  $m$  和  $x$  变化与  $\bar{n}^\circ$  类似.

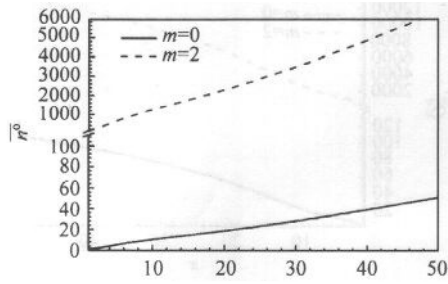


图 1  $q = 0.3$  时,  $\bar{n}^\circ$  与  $x = r^2$  的关系

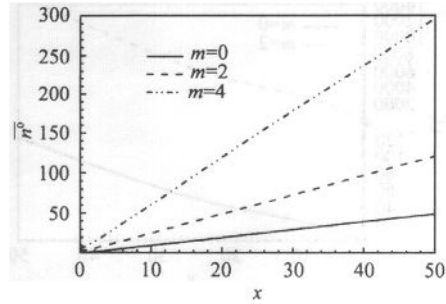


图 2  $q = 0.8$  时,  $\bar{n}^\circ$  与  $x = r^2$  的关系

由图 1 可见, 当  $q$  值较小(如  $q = 0.3$ )时, 随着  $m$  的增加  $\bar{n}^\circ$  急剧增大, 这与  $q$  比较近于 1(如  $q = 0.8$ )的情况很不一样.

### 3.2 亚泊松特性

Mandel  $Q$  参数反映了光子数分布对泊松分布的偏离, 是一个重要的统计参量, 定义为

$$Q_q = \frac{{}_q\langle (a_q^\dagger a_q)^2 \rangle_q - {}_q\langle a_q^\dagger a_q \rangle_q^2}{{}_q\langle a_q^\dagger a_q \rangle_q} = \frac{{}_q\langle (a_q^\dagger a_q)^2 \rangle_q - \bar{n}^2}{{}_q\langle a_q^\dagger a_q \rangle_q}.$$

若  $Q_q < 1$ , 则称光场是亚泊松分布的. 对于  $|\alpha, m\rangle_q^\circ$  和  $|\alpha, m\rangle_q^\circ$ , 分别有

$$Q_q^\circ = \frac{{}_q\langle \alpha, m | (a_q^\dagger a_q)^2 | \alpha, m \rangle_q^\circ - (\bar{n}^\circ)^2}{{}_q\langle \alpha, m | a_q^\dagger a_q | \alpha, m \rangle_q^\circ},$$

$$Q_q^\circ = \frac{{}_q\langle \alpha, m | (a_q^\dagger a_q)^2 | \alpha, m \rangle_q^\circ - (\bar{n}^\circ)^2}{{}_q\langle \alpha, m | a_q^\dagger a_q | \alpha, m \rangle_q^\circ}. \quad (14)$$

式中

$${}_q\langle \alpha, m | (a_q^\dagger a_q)^2 | \alpha, m \rangle_q^\circ = (C_m^\circ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \times \frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!} \times [2n+1+m]_q^2, \quad (15)$$

$${}_q\langle \alpha, m | (a_q^\dagger a_q)^2 | \alpha, m \rangle_q^\circ = (C_m^\circ)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n}}{[2n]_q!} \times \frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!} \times [2n+m]_q^2. \quad (16)$$

图 3—6 给出了  $Q_q^\circ$  和  $Q_q^\circ$  随  $m$  和  $x (= r^2)$  的变化关系. 当  $q$  值较大时, 在  $x$  较小的区域内激发奇  $q$  相干态和激发偶  $q$  相干态都可呈现出亚泊松分布(见图 5 和图 6). 其中, 激发(即增加光子)使偶  $q$  相干态由原来的超泊松分布变为亚泊松分布, 激发后奇  $q$  相干态保持原来的亚泊松特性, 且出现的区域变宽. 但是, 随着  $q$  值的减小, 呈现亚泊松分布的区域缩窄, 例如当  $q = 0.3$  时, 只有在  $x \rightarrow 0$  时才呈现亚泊松分布(在图 3 和图 4 中没有画

出). 另外, 当  $q$  远离 1 时, 随着  $m$  的增大, Mandel  $Q$  参数急剧增大.

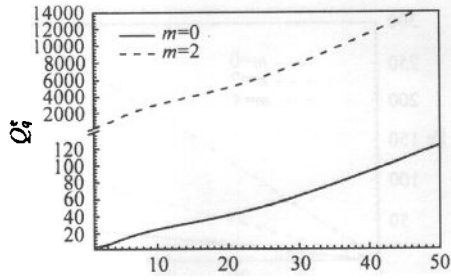


图 3  $q = 0.3$  时,  $Q_q^o$  与  $x = r^2$  的关系

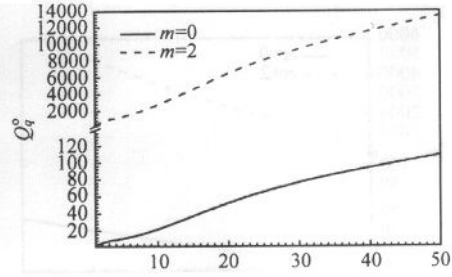


图 4  $q = 0.3$  时,  $Q_q^o$  与  $x = r^2$  的关系

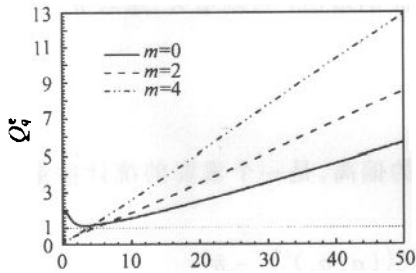


图 5  $q = 0.9$  时,  $Q_q^o$  与  $x = r^2$  的关系

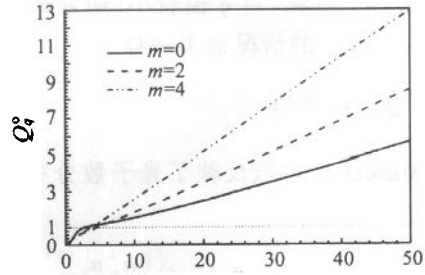


图 6  $q = 0.9$  时,  $Q_q^o$  与  $x = r^2$  的关系

### 3.3 反聚束效应

$q$  电磁场的二阶  $q$  相关函数定义为<sup>[6]</sup>

$$g_q^{(2)}(0) \equiv {}_q \langle a_q^{+2} a_q^2 \rangle_q / |{}_q \langle a_q^+ a_q \rangle_q|^2$$

当  $g_q^{(2)}(0) < 1$  时, 称  $q$  电磁场呈现反聚束效应.

对于  $|\alpha, m\rangle_q^o$  和  $|\alpha, m\rangle_q^c$ , 分别有

$$g_q^{o(2)}(0) = {}_q \langle \alpha, m | a_q^{+2} a_q^2 | \alpha, m \rangle_q^o / (\overline{n^o})^2, \quad (17)$$

$$g_q^{c(2)}(0) = {}_q \langle \alpha, m | a_q^{+2} a_q^2 | \alpha, m \rangle_q^c / (\overline{n^c})^2, \quad (18)$$

式中

$${}_q \langle \alpha, m | a_q^{+2} a_q^2 | \alpha, m \rangle_q^o = (C_m^o)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \times \frac{[2n+1+m]_q!}{[2n+1]_q!} \times [2n+m]_q \times [2n+1+m]_q, \quad (19)$$

$${}_q \langle \alpha, m | a_q^{+2} a_q^2 | \alpha, m \rangle_q^c = (C_m^c)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2)^{2n}}{[2n]_q!} \times \frac{[2n+m]_q!}{[2n]_q!} \times [2n-1+m]_q \times [2n+n]_q \quad (20)$$

图 7—10 给出了  $g_q^{o(2)}(0)$  和  $g_q^{c(2)}(0)$  随  $m$  和  $x (= r^2)$  变化的数值结果.

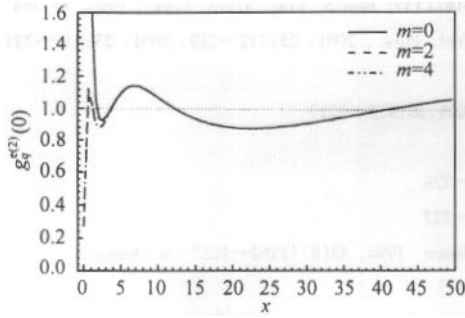


图 7  $q = 0.3$  时,  $g_q^{(2)}(0)$  与  $x = r^2$  的关系

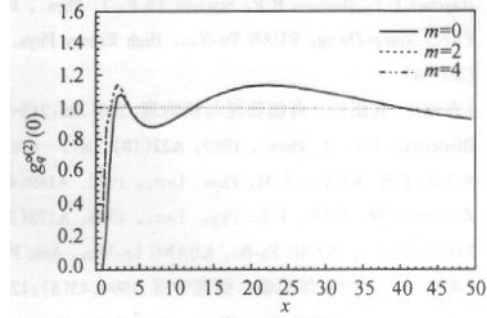


图 8  $q = 0.3$  时,  $g_q^{(2)}(0)$  与  $x = r^2$  的关系

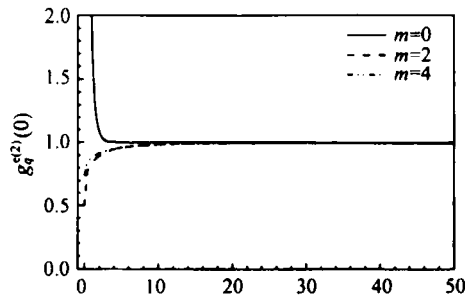


图 9  $q = 0.9$  时,  $g_q^{(2)}(0)$  与  $x = r^2$  的关系

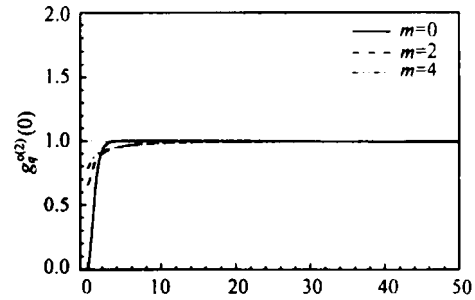


图 10  $q = 0.9$  时,  $g_q^{(2)}(0)$  与  $x = r^2$  的关系

对于较小的  $q$  (如  $q = 0.3$ ) 有: (a) 当  $r$  较大时, 随着  $x$  增大, 聚束效应和反聚束效应交替地出现, 即  $g_q^{(2)}(0)$  和  $g_q^{(2)}(0)$  出现准振荡现象, 振幅和周期的变化规律完全由  $q$  的大小决定 (与  $m$  无关). 另外,  $g_q^{(2)}(0)$  和  $g_q^{(2)}(0)$  的正负号相反. (b) 当  $r$  较小时, 对于偶  $q$  相干态, 激发 (即增加光子) 可使原来强烈的聚束效应变为强烈的反聚束效应 (其强度明显比其他区域的大); 对于奇  $q$  相干态, 激发后基本上保持原来强烈的反聚束效应. 如图 7 和 8 所示.

对于较大的  $q$  (如  $q = 0.9$ ),  $g_q^{(2)}(0)$  和  $g_q^{(2)}(0)$  的振荡消失. 当  $r$  较大时不再出现较强的反聚束效应; 当  $r$  较小时, 激发 (即增加光子) 使偶  $q$  相干态由原来的聚束效应变为反聚束效应, 激发后奇  $q$  相干态保持原来的反聚束效应, 但强度减弱、而出现的区域变宽. 如图 9 和 10 所示.

值得指出的是, 在普通的单模量子光场中亚泊松特性和反聚束效应两者是等价的<sup>[19,20]</sup>. 但是对于激发奇偶  $q$  相干态, 亚泊松特性和反聚束效应两者不是等价的, 即使在  $q$  比较接近于 1 (但不是  $q \rightarrow 1$ ) 时也如此, 例如当  $q = 0.9$  时, 由图 5, 6, 9 和 10 可见, 当  $x > 5$ ,  $m \neq 0$  时,  $Q_q > 1$  但  $g_q^{(2)}(0) < 1$ . 只有当  $q \rightarrow 1$  时, 亚泊松特性和反聚束效应两者才是等价的.

参考文献 (References)

1 Haret C. Rosu, Carlos Castro. Phys. Lett., 2000, A264:350—356

- 2 Raychev P P, Roussev R P, Smimov Yu F. *J. Phys.*, 1990, **G16**:L137; Iwao S. *Prog. Thero. Phys.*, 1990, **83**:363
- 3 FANG Xiang-Zheng, RUAN Tu-Nan. *High Energy Phys. And Nucl. Phys.*, 2001, **25**:212—219; 2001, **25**:315—321 (in Chinese)  
(方向正,阮图南. *高能物理与核物理*, 2001, **25**:212—219; 2001, **25**:315—321)
- 4 Biedenham L C. *J. Phys.*, 1989, **A22**(18):L873—878
- 5 WANG F B, KUANG L M. *Phys. Lett.*, 1992, **A169**(4):225—228
- 6 KUANG L M, WANG F B. *Phys. Lett.*, 1993, **A173**(3):221—227
- 7 ZHU Cong-Xu, WANG Fa-Bo, KUANG Le-Man. *Acta Physica Sinica*, 1994, **43**(8):1262—1267 (in Chinese)  
(朱从旭,王发伯,匡乐满. *物理学报*, 1994, **43**(8):1262—1267)
- 8 LIU You-Wen, CHEN Chang-Yuan. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(11):1460—1463 (in Chinese)  
(刘友文,陈昌远. *光学学报*, 1999, **19**(11):1460—1463)
- 9 WANG Xiao-Chu, LIU You-Wen. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(11):985—988 (in Chinese)  
(王晓初,刘友文. *光子学报*, 2000, **29**(11):985—988)
- 10 WANG Zhong-Qing. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(4):690—692 (in Chinese)  
(汪仲清. *物理学报*, 2001, **50**(4):690—692)
- 11 Agarwal G S, Tara K. *Phys. Rev.*, 1991, **A43**(1):492—497
- 12 ZHANG Z X, FAN H Y. *Phys. Lett.*, 1992, **A165**:14—18
- 13 Jones G N, Haight J, Lee C T. *Quantum and Semiclass Opt.*, 1997, **9**:411—418
- 14 ZHANG Z X, FAN H Y. *Phys. Lett.*, 1993, **A174**(3):206—209
- 15 LU Hong, GUO Guang-Can. *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, 1999, **8**(8):577—582
- 16 LU Hong. *Chin. Phys. Lett.*, 1999, **16**(9):646—647
- 17 HUANG Chun-Qing, Lu Hong. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(6):481—486 (in Chinese)  
(黄纯青,路洪. *光子学报*, 2000, **29**(6):481—486)
- 18 JIANG Jun-Qin, HUANG Chun-Qing, Lu Hong. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(11):989—992 (in Chinese)  
(江俊勤,黄纯青,路洪. *光子学报*, 2000, **29**(11):989—992)
- 19 Teich M. C, Saleh B E A, Stoler D. *Optics Comm.*, 1983, **46**:244
- 20 YAO De-Min, GUO Guang-Can. *Acta Physica Sinica*, 1988, **37**(3):463—468 (in Chinese)  
(姚德民,郭光灿. *物理学报*, 1988, **37**(3):463—468)

## Statistic Properties of the Excited Even and Odd $q$ -Coherent States

JIANG Jun-Qin<sup>1)</sup>

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

(CCAST (World Laboratory), Beijing 100080, China)

**Abstract** In this paper, the excited odd  $q$ -coherent state  $a_q^{+m} |\alpha\rangle_q^o$  and excited even  $q$ -coherent state  $a_q^{+m} |\alpha\rangle_q^e$  are constructed. The  $q$  and  $m$  dependences of mean photon number and sub-Poissonian character and antibunching effect are numerically studied. It is shown that when the  $q$  is far from 1, the second-order  $q$ -correlation function exhibits oscillating phenomenon, whose amplitude and period are independent of  $m$ ; but the mean photon number and the Mandel  $Q_q$  parameter increase greatly as  $m$  increases; and the sub-Poissonian character is not equivalent to the antibunching effect unless  $q \rightarrow 1$ .

**Key words** quantum algebra, excited even and odd  $q$ -coherent state, mean photon number, sub-Poissonian character, antibunching effect

---

Received 18 May 2001

1) E-mail: jjq203@21cn.com