

周期加速结构单通带色散曲线的研究

韦石 邢庆子 林郁正

(清华大学工程物理系 北京 100084)

摘要 提出一种新的分析周期加速结构的方法(腔模法). 它首先利用有限元等方法计算出单个加速腔内的电短路和磁短路模式, 然后构造出闭模和开模, 把耦合腔中的单通带电磁场展开为开模和闭模的线性叠加, 再结合耦合孔处开模对应的能通量, 经过数学变换后就得到整个结构的单通带色散曲线.

关键词 周期加速结构 腔模法 色散曲线 开模 闭模

1 引言

盘荷波导是直线加速器中最常用的结构之一, 以它为代表的无穷长耦合腔链的分析方法可以分为两大类, 即“回路法”和“场解法”. 前者广泛应用于盘荷波导的计算, 但因为它的出发点是电路的理论, 不是我们所希望研究的电磁场, 所以不能完全真实地反映耦合腔链中场的形态. 最近十年, 由于下一代正负电子对撞机的设计需要, 以匹配法为代表的场分析法得到了很大的发展, 解决了许多实际问题, 但它们都有各自的缺点, 大多数场解法对加速腔的形状非常敏感, 不能适用于比较复杂的腔型. 我们提出了一种新的场分析方法, 称之为腔模法, 以弥补匹配法和其他一些场分析方法的不足.

腔模法完全摒弃了路的观点, 它首先计算单个谐振腔中的电短路和磁短路模式, 构造出正交归一的闭模和开模系, 然后假设耦合腔中的单通带电磁场为相对应的开模和闭模线性叠加, 通过计算耦合孔处开模对应的能通, 就可以得到整个结构的单通带色散曲线. 这种方法加以改进后可以应用于下一代正负电子对撞机失谐结构的尾场研究.

2 闭模和开模

R. M. Bevensee 详细描述了闭模和开模^[1]的概念, 对于通常的盘荷波导周期结构而言, 闭模就是指其耦合孔处为电短路时正交归一化后的电磁场系 $\{E_n\}$ 和 $\{H_n\}$, 它们满足(1.1—1.3)式

2001-03-21 收稿

* 国家自然科学基金(19775030)资助

$$\nabla \times \bar{E}_i = P_i \bar{H}_i \quad P_i = \omega_i \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \bar{H}_i = P_i \bar{E}_i \quad \bar{E}_i \times \bar{n} = 0, \quad (1.2)$$

$$\int_V \bar{E}_i \cdot \bar{E}_j dV = \int_V \bar{H}_i \cdot \bar{H}_j dV = \delta_{i,j}. \quad (1.3)$$

同理,开模是指其耦合孔为磁短路($\varphi = \pi$)时的归一正交模式 $\{\bar{e}_i\}$ 和 $\{\bar{h}_i\}$,它们分别满足(2.1—2.3)式:

$$\nabla \times \bar{e}_i = p_i \bar{h}_i \quad \bar{e}_i \times \bar{n} = 0 \text{ (腔壁)}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \bar{h}_i = p_i \bar{e}_i \quad \bar{e}_i \cdot \bar{n} = 0 \text{ (耦合孔)}, \quad (2.2)$$

$$\int_V \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j dV = \int_V \bar{h}_i \cdot \bar{h}_j dV = \delta_{i,j} \quad p_i = \omega'_i \sqrt{\mu\epsilon}. \quad (2.3)$$

其中式(1.1),(2.3)中的 ω_i 和 ω'_i 分别表示闭模和开模的频率.

3 周期性结构中的单通带场

因为开模和闭模是单腔内的两种极端情况,所以我们可以假设相位 φ 为任意值时,对应的场为开模系和闭模系的线性叠加.为简单起见,我们采用单通带约定,即认为我们感兴趣的频率 ω 处在第*i*个通带,其宽度远远小于相邻禁带(式(3)),这样只有该通带内的开模(p_i)和闭模(P_i)对 ω 有较大影响,而不需要考虑不同通带之间的耦合,因此腔0(图1)内电磁场可以表示成(4.1)和(4.2)式的形式.其中 A_i, a_i, B_i, b_i 为待定的叠加项系数.

$$\left| \frac{P_i^2 - \beta^2}{P_{i+1}^2 - \beta^2} \right| \ll 1 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}. \quad (3)$$

$$\mathbf{E}(\omega) = A_i(\omega) \bar{E}_i + a_i(\omega) \bar{e}_i. \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = B_i(\omega) \bar{H}_i + b_i(\omega) \bar{h}_i. \quad (4.2)$$

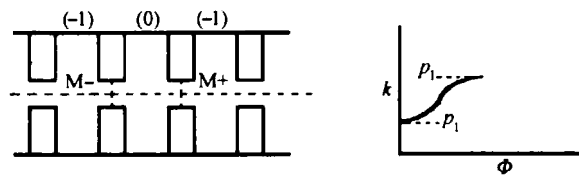


图1 周期性盘荷波导及其第一个单通带色散曲线

腔0中的Maxwell方程可以写成

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu(B_i \bar{H}_i + b_i \bar{h}_i), \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon(A_i \bar{E}_i + a_i \bar{e}_i). \quad (5.2)$$

将式(5.1),(4.1)和闭模定义代入恒等式(6),化简后可得(7.1)式,

$$\int_V \bar{H}_i \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{E} \cdot \nabla \times \bar{H}_i dV + \oint_S \mathbf{E} \times \bar{H}_i \cdot \bar{n} dS \quad (6)$$

$$P_i A_i + P_i G_{ii} a_i + \oint_S \mathbf{E} \times \bar{H}_i \cdot \bar{n} dS + j\omega\mu B_i + j\omega\mu N_{ii} b_i = 0 \quad (7.1)$$

同理根据恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$, 可以得到(7.2)–(7.4),

$$p_i G_{ii} A_i + p_i a_i + j\omega\mu N_{ii} B_i + j\omega\mu b_i = 0, \quad (7.2)$$

$$j\omega\epsilon A_i + j\omega\epsilon G_{ii} a_i - P_i B_i - P_i N_{ii} b_i = 0, \quad (7.3)$$

$$j\omega\epsilon G_{ii} A_i + j\omega\epsilon a_i - p_i N_{ii} B_i - p_i b_i - \oint_S \mathbf{H} \times \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (7.4)$$

其中

$$G_{ii} = \int_V \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}}_i dV, \quad N_{ii} = \int_V \bar{\mathbf{h}}_i \cdot \bar{\mathbf{H}}_i dV. \quad (8.1)$$

注意: 因为耦合孔处有 $\mathbf{E}_i \times \bar{\mathbf{n}} = 0$ 和 $\mathbf{h}_i \times \bar{\mathbf{n}} = 0$, 所以有 $\oint_S \mathbf{H} \times \bar{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = 0$ 且 $\oint_S \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{h}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = 0$.

4 耦合积分 $\oint_S \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS$ 和 $\oint_S \mathbf{H} \times \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS$ 的表达式

考虑到开模和闭模所满足的边界条件, 耦合积分 $\oint_S \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS$ 和 $\oint_S \mathbf{H} \times \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS$ 都只在耦合孔的位置不等于 0, 对于腔 0, 它们可以写成:

$$\oint_S \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \int_{\text{hole}} \mathbf{E}_i \times \bar{\mathbf{H}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \int_{M^+} \mathbf{E}_i \times \bar{\mathbf{H}}_i \cdot \hat{\mathbf{z}} dS - \int_{M^-} \mathbf{E}_i \times \bar{\mathbf{H}}_i \cdot \hat{\mathbf{z}} dS, \quad (9.1)$$

$$\oint_S \mathbf{H} \times \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \int_{\text{hole}} \mathbf{H}_i \times \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \int_{M^+} \mathbf{H}_i \times \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{z}} dS - \int_{M^-} \mathbf{H}_i \times \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{z}} dS. \quad (9.2)$$

其中下标 M^+ 和 M^- 分别表示腔 0 的左右两边耦合孔的边界面.

为了准确计算耦合积分, 我们要求加速单腔纵向对称, 则场也可以相应地分成两种情况: 把纵向分量在单腔内改变偶数次方向的电场定义为偶对称, 把纵向分量在单腔内改变奇数次方向的电场定义为奇对称. 这两种情况的讨论方法基本类似, 下面将只具体讨论偶对称的情况.

因为耦合孔处的切向电场只与开模有关, 切向磁场只与闭模有关, 考虑 Floquet 定理后可以得到它们的表达式

$$\mathbf{E}_i|_{M^+} = a_i \bar{\mathbf{e}}_i^0 = \frac{a_i}{2} (\bar{\mathbf{e}}_i^0 + e^{-j\kappa} \bar{\mathbf{e}}_i^{+1})|_{M^+}, \quad \mathbf{E}_i|_{M^-} = a_i \bar{\mathbf{e}}_i^0 = \frac{a_i}{2} (\bar{\mathbf{e}}_i^0 + e^{j\kappa} \bar{\mathbf{e}}_i^{-1})|_{M^-}, \quad (10.1)$$

$$\mathbf{H}_i|_{M^+} = B_i \bar{\mathbf{H}}_i^0 = \frac{B_i}{2} (\mathbf{H}_i^0 + e^{-j\kappa} \mathbf{H}_i^{+1})|_{M^+}, \quad \mathbf{H}_i|_{M^-} = B_i \mathbf{H}_i^0 = \frac{B_i}{2} (\bar{\mathbf{H}}_i^0 + e^{j\kappa} \bar{\mathbf{H}}_i^{-1})|_{M^-}. \quad (10.2)$$

在无穷长周期性结构中, 偶对称情况的开模和闭模在耦合孔处分别满足下列关系,

$$e_i^{-1}|_{M^-} = -e_i^0|_{M^-} = e_i^0|_{M^+} = -e_i^{+1}|_{M^+}, \quad \bar{\mathbf{H}}_i^{-1}|_{M^-} = \mathbf{H}_i^0|_{M^-} = \bar{\mathbf{H}}_i^0|_{M^+} = \bar{\mathbf{H}}_i^{+1}|_{M^+}. \quad (11)$$

把(11)式和(10.1)式代入(9.1)式, 简化后可以得

$$\oint_S \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}_i \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = a_i (\cos \varphi - 1) M_{ii}, \quad (12.1)$$

其中

$$= \int_{M^-} \bar{\mathbf{e}}_i^0 \times \bar{\mathbf{H}}_i^0 \cdot \hat{\mathbf{z}} dS. \quad (12.2)$$

$$\begin{bmatrix} j\omega\epsilon G_{ii} & & & \\ & j\omega\epsilon & & \\ & & -p_i N_{ii} - (1 + \cos \varphi) M_{ii} & \\ & & & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ a_i \\ B_i \\ b_i \end{bmatrix} = 0. \quad (13)$$

要使腔内的场存在, (13) 式必须有非零解, 因此

$$\begin{vmatrix} P_i & P_i G_{ii} + M_{ii} (\cos \varphi - 1) & j\omega\mu & j\omega\mu N_{ii} \\ P_i G_{ii} & p_i & j\omega\mu N_{ii} & j\omega\mu \\ j\omega\epsilon & j\omega\epsilon G_{ii} & -P_i N_{ii} & -P_i \\ j\omega\epsilon G_{ii} & j\omega\epsilon & -p_i N_{ii} - (1 + \cos \varphi) M_{ii} & -P_i \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

因此可以求出色散曲线为

$$D_{ii} \beta^4 + E_{ii}(\varphi) \beta^2 + F_{ii}(\varphi) = 0 \quad (15)$$

其中

$$D_{ii} = (1 - G_{ii})(1 - N_{ii}), \quad (15.1)$$

$$E_{ii}(\varphi) = (1 - \cos^2 \varphi) M_{ii}^2 + (1 + \cos \varphi) p_i M_{ii} N_{ii} (1 - G_{ii}^2) - (1 - \cos \varphi) G_{ii} M_{ii} P_i (1 - N_{ii}^2) - (p_i^2 + P_i^2) D_{ii}, \quad (15.2)$$

$$F_{ii}(\varphi) = (1 - \cos \varphi) G_{ii} p_i^2 P_i M_{ii} (1 - N_{ii}^2) - (1 - \cos^2 \varphi) p_i P_i G_{ii} M_{ii}^2 N_{ii} - (1 + \cos \varphi) p_i M_{ii} N_{ii} P_i^2 (1 - G_{ii}^2) + p_i^2 P_i^2 D_{ii}. \quad (15.3)$$

5 示例

与高阶模式相比, TM₀₁₀ 模能够很好地满足单通带约定, 且满足偶对称条件, 因此我们对图 2 中所示结构的 TM₀₁₀ 色散曲线进行验证. 图 3 中画出了式 (15) 计算出的 TM₀₁₀ 色散曲线, 可以看出, 腔模法与 Superfish 程序和专门针对这种带圆弧盘荷波导的变分法程序 Longtransvrs^[2] 的结果吻合得很好, 精度能够达到 10⁻⁵, 远远高于 Mafia 的 2D 计算结果, 证明了该方法的有

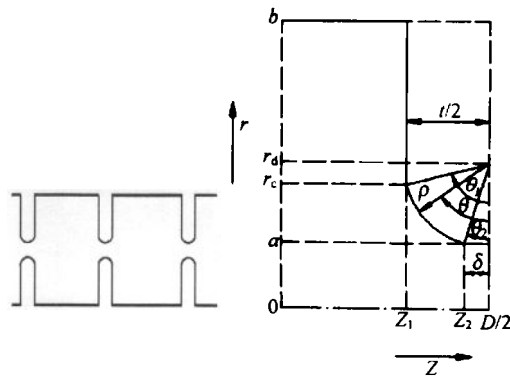


图 2 带圆弧的盘荷波导结构

$t = 5.0013\text{mm}, D = 35.0088\text{mm}, b = 40.9000\text{mm},$
 $a = 10.0025\text{mm}, \delta = 0.5076\text{mm}, \rho = 2.6007\text{mm}$

效性.

腔模法只需要知道每个单腔的开模和闭模,因此它可以和有限元等方法结合计算拱形腔等 Longtransvrs 无能为力的结构,此外它还可以分析任何满足单通带约定的高阶子模,弥补了 Superfish 程序在这方面的不足.

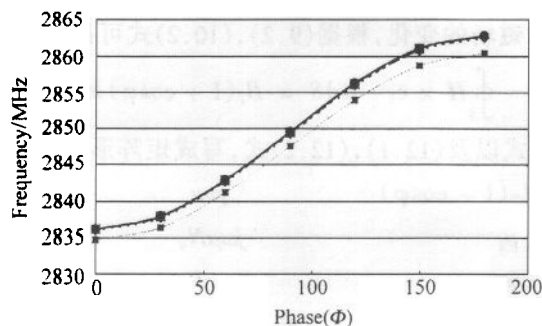


图 3 带圆弧盘荷波导的 TM_{010} 色散曲线

···◆··· Longtransvrs, —●— Cavity Mode, Method, -■- Mafia, -×- Superfish.

6 结论

只要长周期耦合腔链的单腔具有纵向对称性,本文提出的腔模法就能在单腔计算的基础上,完全从场的角度得到它的各通带的色散曲线,而与腔链的具体形状无关.

参考文献 (References)

- 1 Bevensee R M. Electromagnetic Slow Wave Systems. New York: John Wiley & Sone, Inc., 1964. 24—25, 92—101
- 2 WANG Lan-Fa, LIN Yu-Zheng. HEP & NP, 2000, 24(6): 567—572 (in Chinese)
(王兰法, 林郁正. 高能物理与核物理, 2000, 24(6): 567—572)

Analysis of Single-Passband Dispersion Curves in Periodical Accelerating Structures*

WEI Shi XING Qing-Zi LIN Yu-Zheng

(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract The cavity mode method presented in this paper is used for analysis of the dispersion curves in periodical accelerating structures. At first, we computed the electromagnetic fields in a single cavity with the finite element method and construct the normalized orthogonalized short and open modes. Then it is assumed that the fields in the whole structure can be expanded linearly with these modes. Considering the Maxwell equations and the periodical boundary conditions, we get the relationship between the frequencies and the phase shifts. The parameters in the equation can be computed with the short and open modes. For the example of the disk-loaded waveguide shown in this paper, it is very easy to obtain the single-passband dispersion curves. The accuracy can reach 10^{-6} . The method can also be used to compute the high order modes that meet the requirement of the single passband.

Key words periodical accelerating structure, cavity mode method, dispersion curve, open mode, short mode

Received 21 March 2001

* Supported by National Natural Science Foundation of China(19775030)