第25卷 第11期 高能物理与核物理 Vol.25, No.11
2001年11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov.,2001

Bargmann-Wigner方程与高自旋场方程*

黄时中[1,2] 阮图南[1,2] 吴 宁[1,3] 郑志鹏[1,3]
1 (中国高等科学技术中心(世界实验室) 北京 100080)
2 (中国科学技术大学近代物理系 合肥 230027)
3 (中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 在坐标表象中由Bargmann-Wigner方程导出了便于求解的高自旋场方程,并给出了相应的拉氏函数.

关键词 Bargmann-Wigner方程 高自旋场方程 坐标表象

1 引言

自旋为0,1/2,1的场论早已成为许多应用领域中强有力的工具[1,2]. 将这一理论体系推广到高自旋情形,在理论和应用上都相当有意义. 在理论上,它完整了玻色-爱因斯坦和费米-狄拉克统计,在应用上,许多高能物理过程的振幅分析都依赖于高自旋波函数[1],此外,有证据表明引力场的自旋为2,因此自旋为2的场将有可能用于描述引力场。

对于自旋大于1的场方程,Dirac,Fiere和Pauli[3-5],Rarita和Schwinger[6],Bargmann和Wigner[7]等等早就进行了广泛的研究,所给出的形式多种多样. 从便于求解的角度看,最方便的形式是Rarita-Schwinger方程,不过它只是关于自旋为任意半奇数的场方程. Moldauer和Case[8]曾证明:Rarita-Schwinger方程可以从Dirac-Fiere-Pauli点旋量方程导出. 我们发现,从Bargmann-Wigner方程出发,也可以导出Rarita-Schwinger方程,并且可以把自旋为任意整数的场包含在这一体系中. 本文将报道这一工作. 为压缩篇幅,我们将从自旋为2的场方程开始,并在最后给出相应的拉氏函数.

2 自旋为整数的场方程

2.1 自旋2

自旋为2的Bargmann-Wigner方程为[7]

2001-01-31收稿,2001-05-22收修改稿
* 国家自然科学基金(19947001,19775944和19991480),高等学校博士学科点专项基金(97035807),北京正负电子对撞机国家实验室,兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心和安徽省教育厅自然科学基金(99JL0071)资助
1058—1064

$$(\partial\!\!\!/ + m)_{\alpha\alpha'}\Psi_{\alpha'\beta\delta\tau}(x) = 0, \tag{1}$$

其中 $\Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x)$是四阶全对称多重旋量．为了在坐标表象中处理此方程组，我们将借鉴对自旋为 1 的 Bargmann-Wigner 方程的处理方法[9]．例如，自旋为 1 的 Bargmann-Wigner 方程为[7]

$$(\partial\!\!\!/ + m)_{\alpha\alpha'}\Psi_{\alpha'\beta}(x) = 0, \tag{2}$$

其中 $\Psi_{\alpha\beta}(x)$是二阶全对称多重旋量．由文献[9]，$\Psi_{\alpha\beta}(x)$可展开为

$$\Psi_{\alpha\beta}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_\nu C + \Sigma_{\mu\nu}C\,\partial_\mu)_{\alpha\beta}A^\nu(x),\ C = \gamma_2\gamma_4, \tag{3}$$

其中 C 为电荷共轭矩阵，$\gamma_\mu C$ 和 $\Sigma_{\mu\nu}C$ 为对称矩阵，$A^\nu(x)$为满足下列方程组的矢量场，

$$(\Box - m^2)A^\nu(x) = 0,\ \partial_\nu A^\nu(x) = 0,\qquad (\nu = 1,2,3,4). \tag{4}$$

由于方程(1)与方程(2)关于旋量指标 $\alpha\beta$ 所满足的 Dirac 方程相同，并且 $\Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x)$关于旋量指标 $\alpha\beta$ 是对称的，所以采用与推导(3)和(4)式完全相同的步骤，可得到展开

$$\Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_\nu C + \Sigma_{\mu\nu}C\,\partial_\mu)_{\alpha\beta}A^\nu_{\delta\tau}(x), \tag{5}$$

其中 $A^\nu_{\delta\tau}(x)$满足方程组

$$(\Box - m^2)A^\nu_{\delta\tau}(x) = 0,\ \partial_\nu A^\nu_{\delta\tau}(x) = 0. \tag{6}$$

另一方面，由于 $\Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x)$关于旋量指标 δ 也满足 Dirac 方程(1)，所以由(5)式有

$$(\mathrm{i}m\gamma_\nu C + \Sigma_{\mu\nu}C\,\partial_\mu)_{\alpha\beta}(\partial\!\!\!/ + m)_{\delta\delta'}A^\nu_{\delta'\tau}(x) = 0,$$

因为 $\alpha\beta$ 是任意的，上式改写成矩阵形式并利用矩阵 $\gamma_\nu C$ 和 $\Sigma_{\mu\nu}C$ 的独立性，可得

$$(\partial\!\!\!/ + m)_{\delta\delta'}A^\nu_{\delta'\tau}(x) = 0, \tag{7a}$$

同理，

$$(\partial\!\!\!/ + m)_{\tau\tau'}A^\nu_{\delta\tau'}(x) = 0. \tag{7b}$$

方程(7)关于旋量指标 $\delta\tau$ 所满足的方程与方程(2)也是相同的，因而又有

$$A^\nu_{\delta\tau}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_{\nu'}C + \Sigma_{\mu'\nu'}C\,\partial_{\mu'})_{\delta\tau}A^{\nu\nu'}(x), \tag{8}$$

其中 $A^{\nu\nu'}(x)$满足

$$(\Box - m^2)A^{\nu\nu'}(x) = 0,\ \partial_{\nu'}A^{\nu\nu'}(x) = 0. \tag{9}$$

将(8)式代入(6)式又可得

$$\partial_\nu A^{\nu\nu'}(x) = 0. \tag{10}$$

另一方面，联合(8)式与(5)式有

$$\Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_\nu C + \Sigma_{\mu\nu}C\,\partial_\mu)_{\alpha\beta}(\mathrm{i}m\gamma_{\nu'}C + \Sigma_{\mu'\nu'}C\,\partial_{\mu'})_{\delta\tau}A^{\nu\nu'}(x). \tag{11}$$

上式右边关于旋量指标 $\alpha\beta$ 是对称的，关于旋量指标 $\delta\tau$ 也是对称的，但 $\alpha\beta$ 与 $\delta\tau$ 之间并不对称．为保证 $\Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x)$关于旋量指标 $\alpha\beta\delta\tau$ 是全对称的，我们要求 $\Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x)$与所有反对称 Dirac 矩阵，即 $C^{-1}, C^{-1}\gamma_5, C^{-1}\gamma_5\gamma_\lambda$，关于指标 $\beta\delta$ 的收缩为零，亦即

$$\Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x)(C^{-1})_{\beta\delta} = 0,\ \Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x)(C^{-1}\gamma_5)_{\beta\delta} = 0,\ \Psi_{\alpha\beta\delta\tau}(x)(C^{-1}\gamma_5\gamma_\lambda)_{\beta\delta} = 0. \tag{12}$$

将(11)式展开代入(12)式，利用 γ 矩阵的乘法公式将每一方程左边化为 γ 矩阵的线性组合，并注意利用(9)和(10)式，可得

$$A^{\nu\nu}(x) = 0,\ A^{\nu\nu'}(x) = A^{\nu'\nu}(x). \tag{13}$$

综合以上结果，我们得到张量场 $A^{\nu_1\nu_2}(x)$满足的方程为

$$(\Box - m^2)A^{\nu_1\nu_2}(x) = 0, \tag{14a}$$

$$\partial_{\nu_1}A^{\nu_1\nu_2}(x) = 0,\ \partial_{\nu_2}A^{\nu_1\nu_2}(x) = 0,\ A^{\nu\nu}(x) = 0,\ A^{\nu_1\nu_2}(x) = A^{\nu_2\nu_1}(x). \tag{14b}$$

2.2 自旋3

自旋为3的Bargmann-Wigner方程为[7]

$$(\partial\!\!\!/ + m)_{\alpha_1\alpha_1'}\Psi_{\alpha_1'\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3}(x) = 0,$$

其中 $\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3}(x)$是六阶全对称多重旋量. 按照对自旋2的Bargmann-Wigner方程的处理步骤和方法,由 $\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3}(x)$的前四个旋量指标满足Dirac方程(15)可得

$$\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_{\nu_1}C + \Sigma_{\mu_1\nu_1}C\,\partial_{\mu_1})_{\alpha_1\beta_1}(\mathrm{i}m\gamma_{\nu_2}C + \Sigma_{\mu_2\nu_2}C\,\partial_{\mu_2})_{\alpha_2\beta_2}A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3}(x), \tag{16}$$

其中 $A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3}(x)$满足

$$(\Box - m^2)A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3}(x) = 0, \tag{17}$$

$$\partial_{\nu_1}A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3}(x) = 0,\ \partial_{\nu_2}A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3}(x) = 0,\ A^{\nu\nu}_{\alpha_3\beta_3}(x) = 0,\ A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3}(x) = A^{\nu_2\nu_1}_{\alpha_3\beta_3}(x). \tag{18}$$

由于 $\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3}(x)$关于指标 α_3 和 β_3 也满足Dirac方程,利用(16)式可得

$$(\partial\!\!\!/ + m)_{\alpha_3\alpha_3'}A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3'\beta_3}(x) = 0,\ (\partial\!\!\!/ + m)_{\beta_3\beta_3'}A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3'}(x) = 0. \tag{19}$$

即 $A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3}(x)$关于旋量指标 α_3 和 β_3 所满足的方程与方程(2)也是相同的,因而有

$$A^{\nu_1\nu_2}_{\alpha_3\beta_3}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_{\nu_3}C + \Sigma_{\mu_3\nu_3}C\,\partial_{\mu_3})_{\alpha_3\beta_3}A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x), \tag{20}$$

其中 $A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x)$满足

$$(\Box - m^2)A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x) = 0,\ \partial_{\nu_3}A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x) = 0. \tag{21}$$

将(20)式代入(18)式,利用矩阵 $\gamma_\nu C$ 和 $\Sigma_{\mu\nu}C$ 的独立性,又可得

$$\partial_{\nu_1}A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x) = 0,\ \partial_{\nu_2}A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x) = 0,\ A^{\nu\nu\nu_3}(x) = 0,\ A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x) = A^{\nu_2\nu_1\nu_3}(x). \tag{22}$$

另一方面,联合(20)式与(16)式有

$$\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_{\nu_1}C + \Sigma_{\mu_1\nu_1}C\,\partial_{\mu_1})_{\alpha_1\beta_1}(\mathrm{i}m\gamma_{\nu_2}C + \Sigma_{\mu_2\nu_2}C\,\partial_{\mu_2})_{\alpha_2\beta_2}\cdot$$
$$(\mathrm{i}m\gamma_{\nu_3}C + \Sigma_{\mu_3\nu_3}C\,\partial_{\mu_3})_{\alpha_3\beta_3}A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x),$$

上式右边关于旋量指标 $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2$ 是对称的,关于旋量指标 $\alpha_3\beta_3$ 亦是对称的,但 $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2$ 与 $\alpha_3\beta_3$ 之间并不对称. 为保证 $\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3}(x)$关于旋量指标 $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3$ 全对称,进一步要求上式右边关于旋量指标 $\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3$ 亦是对称的. 为此,我们要求上式右边的因子 $(\mathrm{i}m\gamma_{\nu_2}C + \Sigma_{\mu_2\nu_2}C\,\partial_{\mu_2})_{\alpha_2\beta_2}(\mathrm{i}m\gamma_{\nu_3}C + \Sigma_{\mu_3\nu_3}C\,\partial_{\mu_3})_{\alpha_3\beta_3}A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x)$与所有反对称Dirac矩阵,即 $C^{-1}, C^{-1}\gamma_5, C^{-1}\gamma_5\gamma_\lambda$,关于指标 $\beta_2\alpha_3$ 的收缩为零(与(12)式类似),由此得到

$$A^{\nu_1\nu\nu}(x) = 0,\qquad A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x) = A^{\nu_1\nu_3\nu_2}(x). \tag{23}$$

方程(21)至(23)即自旋为3的张量场 $A^{\nu_1\nu_2\nu_3}(x)$所满足的相对论性场方程.

2.3 自旋 n

现将对自旋为 1,2,3 的 Bargmann-Wigner 方程的处理方法推广到自旋为任意整数的情形. 设自旋为 n(整数),则相应的 Bargmann-Wigner 方程为

$$(\partial + m)_{\alpha_1\alpha_1'}\Psi_{\alpha_1'\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n}(x) = 0, \tag{24}$$

其中 $\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n}(x)$为 $2n$ 阶全对称多重旋量. 用数学归纳法可以证明

$$\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n}(x) = \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{i}m\gamma_{\nu_i}C + \Sigma_{\mu_i\nu_i}C\,\partial_{\mu_i})_{\alpha_i\beta_i}A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x), \tag{25}$$

其中张量场 $A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)$满足下列方程组

$$(\Box - m^2)A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x) = 0,\ (\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n = 1,2,3,4), \tag{26a}$$

$$\partial_{\nu_i}A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_n}(x) = 0,(i = 1,2,\cdots,n), \tag{26b}$$

$$A^{\cdots\nu\cdots\nu\cdots}(x) = 0,\quad \text{（即关于任一对指标的收缩为零）} \tag{26c}$$

$$A^{\cdots\nu_i\nu_{i+1}\cdots}(x) = A^{\cdots\nu_{i+1}\nu_i\cdots}(x),\ (i = 1,2,\cdots,n-1). \tag{26d}$$

3 自旋为半奇数的场方程

3.1 自旋 3/2

自旋为 3/2 的 Bargmann-Wigner 方程为$(\partial + m)_{\alpha\alpha'}\Psi_{\alpha'\beta\rho}(x) = 0$,其中 $\Psi_{\alpha\beta\rho}(x)$是 3 阶全对称多重旋量. 由文献[9]可知,$\Psi_{\alpha\beta\rho}(x)$可表示为

$$\Psi_{\alpha\beta\rho}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_\nu C + \Sigma_{\mu\nu}C\,\partial_\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\rho^\nu(x), \tag{27}$$

其中 $\Psi_\rho^\nu(x)$为矢量 - 旋量,满足下列方程(按习惯隐去旋量指标 ρ)

$$(\Box - m^2)\Psi^\nu(x) = 0,\ \partial_\nu\Psi^\nu(x) = 0,\ (\partial + m)\Psi^\nu(x) = 0,\ \gamma_\nu\Psi^\nu(x) = 0. \tag{28}$$

3.2 自旋 5/2

自旋为 5/2 的 Bargmann-Wigner 方程为[7]

$$(\partial + m)_{\alpha\alpha'}\Psi_{\alpha'\beta\delta\tau\rho}(x) = 0, \tag{29}$$

其中 $\Psi_{\alpha\beta\delta\tau\rho}(x)$是 5 阶全对称多重旋量. 方程(29)与方程(1)关于旋量指标 $\alpha\beta\delta\tau$ 所满足的方程相同,并且 $\Psi_{\alpha\beta\delta\tau\rho}(x)$关于旋量指标 $\alpha\beta\delta\tau$ 是对称的,因此利用(11)和(14)式可得

$$\Psi_{\alpha\beta\delta\tau\rho}(x) = (\mathrm{i}m\gamma_{\nu_1}C + \Sigma_{\mu_1\nu_1}C\,\partial_{\mu_1})_{\alpha\beta}(\mathrm{i}m\gamma_{\nu_2}C + \Sigma_{\mu_2\nu_2}C\,\partial_{\mu_2})_{\delta\tau}\Psi_\rho^{\nu_1\nu_2}(x), \tag{30}$$

其中 $\Psi_\rho^{\nu_1\nu_2}(x)$满足下列方程

$$(\Box - m^2)\Psi_\rho^{\nu_1\nu_2}(x) = 0, \tag{31a}$$

$$\partial_{\nu_1}\Psi_\rho^{\nu_1\nu_2}(x) = 0,\ \partial_{\nu_2}\Psi_\rho^{\nu_1\nu_2}(x) = 0,\ \Psi_\rho^{\nu\nu}(x) = 0,\ \Psi_\rho^{\nu_1\nu_2}(x) = \Psi_\rho^{\nu_2\nu_1}(x). \tag{31b}$$

由于 $\Psi_\rho^{\nu_1\nu_2}(x)$关于旋量指标 ρ 也满足 Dirac 方程,利用(30)式可得(隐去旋量指标 ρ)

$$(\partial + m)\Psi^{\nu_1\nu_2}(x) = 0. \tag{31c}$$

另一方面,(30)式右边关于旋量指标 $\alpha\beta\delta\tau$ 是对称的. 为保证 $\Psi_{\alpha\beta\delta\tau\rho}(x)$关于旋量指标

$\alpha\beta\delta\tau\rho$ 是全对称的,我们进一步要求(30)式右边关于旋量指标 $\delta\tau\rho$ 也是对称的. 为此,我们要求(30)式中的因子$(im\gamma_{\nu_2}C+\Sigma_{\mu_2\nu_2}C\,\partial_{\mu_2})_{\delta\tau}\Psi_{\rho}^{\nu_1\nu_2}(x)$与所有反对称 Dirac 矩阵,即 C^{-1} $C^{-1}\gamma_5$, $C^{-1}\gamma_5\gamma_\lambda$,关于指标 $\tau\rho$ 的收缩为零,亦即

$$(im\gamma_{\nu_2}C+\Sigma_{\mu_2\nu_2}C\,\partial_{\mu_2})_{\delta\tau}\Psi_{\rho}^{\nu_1\nu_2}(x)(C^{-1})_{\tau\rho}=0,$$

$$(im\gamma_{\nu_2}C+\Sigma_{\mu_2\nu_2}C\,\partial_{\mu_2})_{\delta\tau}\Psi_{\rho}^{\nu_1\nu_2}(x)(C^{-1}\gamma_5)_{\tau\rho}=0,$$

$$(im\gamma_{\nu_2}C+\Sigma_{\mu_2\nu_2}C\,\partial_{\mu_2})_{\delta\tau}\Psi_{\rho}^{\nu_1\nu_2}(x)(C^{-1}\gamma_5\gamma_\lambda)_{\tau\rho}=0,$$

由此得到(隐去旋量指标 ρ)

$$\gamma_\nu\Psi^{\nu\nu_2}(x)=0. \tag{31d}$$

方程组(31)即二阶张量-旋量场 $\Psi_{\rho}^{\nu_1\nu_2}(x)$所满足的方程.

3.3 自旋为任意半奇数 $n+1/2$

现将对自旋为$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{2}$,$\frac{5}{2}$的 Bargmann-Wigner 方程的处理方法推广到自旋为任意半奇数的情形. 自旋为任意半奇数 $n+1/2$ 的 Bargmann-Wigner 方程为

$$(\partial\!\!\!/+m)_{\alpha_1\alpha_1'}\Psi_{\alpha_1'\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n\rho}(x)=0, \tag{32}$$

其中 $\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n\rho}(x)$是 $2n+1$ 阶全对称多重旋量. 利用数学归纳法,可以得到

$$\Psi_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_n\beta_n\rho}(x)=\prod_{j=1}^{n}(im\gamma_{\nu_j}C+\Sigma_{\mu_j\nu_j}C\,\partial_{\mu_j})_{\alpha_j\beta_j}\Psi_{\rho}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x), \tag{33}$$

其中 $\Psi_{\rho}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)$为 n 阶张量-旋量,满足下列方程(隐去旋量指标 ρ)

$$(\Box-m^2)\Psi^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)=0,\ (\partial\!\!\!/+m)\Psi^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)=0,\ \gamma_\nu\Psi^{\nu\nu_2\nu_3\cdots\nu_n}(x)=0 \tag{34a}$$

$$\partial_{\nu_i}\Psi^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_n}(x)=0,\ \Psi^{\cdots\nu\cdots\nu\cdots}(x)=0,\ \Psi^{\cdots\nu_i\nu_{i+1}\cdots}(x)=\Psi^{\cdots\nu_{i+1}\nu_i\cdots}(x). \tag{34b}$$

4 Lagrangian 函数

最后,我们给出自旋为任意整数和半奇数场的拉氏函数. 自旋为任意整数场的拉氏函数可表示为

$$L(x)=-\frac{1}{4}(\partial_\mu\bar{A}^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x)-\partial_\nu\bar{A}^{\mu\nu_2\cdots\nu_n}(x))(\partial_\mu A^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x)-\partial_\nu A^{\mu\nu_2\cdots\nu_n}(x))-$$

$$\frac{1}{2}m^2\bar{A}^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x)A^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x), \tag{35}$$

其中 $\bar{A}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)=g_{\nu_1\mu_1}g_{\nu_2\mu_2}\cdots g_{\nu_n\mu_n}(A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x))^*$, $g_{\nu\mu}=\mathrm{diag}\{1,1,1,-1\}$, $A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x)$为对称张量,满足条件 $A^{\cdots\nu\cdots\nu\cdots}(x)=0$. 将(35)式代入欧拉-拉格朗日方程

$$\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{A}^{\nu\nu_2\cdots\nu_n})}=\frac{\partial L}{\partial\bar{A}^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}},$$

得

$$(\Box-m^2)A^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x)=\partial_\mu\partial_\nu A^{\mu\nu_2\cdots\nu_n}(x), \tag{36}$$

用∂_ν 作用于(36)式两边,利用 $m\neq0$ 得: $\partial_\nu A^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x)=0$,

于是(36)式成为:　$(\Box - m^2)A^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x) = 0$,

这与方程(26)是一致的. 自旋为任意半奇数场的拉氏函数可表示为

$$L(x) = -\overline{\Psi}^{\mu\nu_2\cdots\nu_n}(x)(\partial\!\!\!/ + m)\Psi^{\mu\nu_2\cdots\nu_n}(x) + \frac{1}{3}\overline{\Psi}^{\mu\nu_2\cdots\nu_n}(x)(\gamma_\mu\partial_\nu + \gamma_\nu\partial_\mu)\Psi^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x) - \frac{1}{3}\overline{\Psi}^{\mu\nu_2\cdots\nu_n}(x)\gamma_\mu(\partial\!\!\!/ - m)\gamma_\nu\Psi^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x), \tag{37}$$

其中 $\overline{\Psi}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x) = g_{\nu_1\mu_1}g_{\nu_2\mu_2}\cdots g_{\nu_n\mu_n}\gamma_2(\Psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x))^+$, $\Psi^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_i\cdots\nu_n}(x)$为对称张量-旋量,且满足条件 $\Psi^{\cdots\nu\cdots\nu\cdots}(x) = 0$. 将(37)式代入欧拉-拉格朗日方程,可得

$$-(\partial\!\!\!/ + m)\Psi^{\mu\nu_2\cdots\nu_n}(x) + \frac{1}{3}\gamma_\mu A + \frac{1}{3}\partial_\mu B - \frac{1}{3}\gamma_\mu(\partial\!\!\!/ - m)B = 0, \tag{38}$$

其中

$$A = \partial_\nu\Psi^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x),\quad B = \gamma_\nu\Psi^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x), \tag{39}$$

将(38)式两边左乘 γ_μ 可得

$$2A = mB, \tag{40}$$

而用∂_μ作用于(38)式两边,利用(40)式及 $m\neq 0$ 又可得

$$A = 0, \tag{41}$$

综合起来,即得到与(34)式一致的场方程.

$$(\Box - m^2)\Psi^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x) = 0,\qquad \partial_\nu\Psi^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x) = 0,$$
$$(\partial\!\!\!/ + m)\Psi^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x) = 0,\qquad \gamma_\nu\Psi^{\nu\nu_2\cdots\nu_n}(x) = 0.$$

作者感谢邹冰松教授富有启发性的讨论,感谢 Chung S. U. 教授热情的支持和慷慨无私地提供资料.

参考文献(References)

1 Chung S U. CERN Report, CERN, 1971, 71—8
2 Frank W. Rev. Mod. Phys., 1999, **71**:S85—S95
3 Dirac PAM. Proc. Roy. Soc., 1936, **A155**:447—459
4 Fierz M. Helv. Phys. Acta, 1939, **12**:3—37
5 Fierz M, Pauli W. Proc. Roy. Soc., 1939, **A173**:211—232
6 Rarita W, Schwinger J. Phys. Rev., 1941, **60**:61
7 Bargmann V, Wigner E P. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 1948, **34**:211—223
8 Moldauer P A, Case K M. Phys. Rev., 1956, **102**:279
9 Lurie D. Particles and Fields, John Wiley & Sons, NY, 1968, 30—38

Bargmann-Wigner Equation and High Spin Field Equations*

HUANG Shi-Zhong[1,2] RUAN Tu-Nan[1,2] WU Ning[1,3] ZHENG Zhi-Peng[1,3]

1 (*CCAST (World Lab.), Beijing* 100080, *China*)

2 (*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027, *China*)

3 (*Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing* 100039, *China*)

Abstract From the Bargmann-Wigner equation in coordinate representation, a convenient form of field equations for arbitrary spin, which are similar to the Rarita-Schwinger equations for arbitrary half-integral spin, is derived rigorously. The method used here is to expand the completely symmetric multispinor field with symmetric matrices and a tensor or tensor-spinor field. Meanwhile, the Lagrangian functions for fields with arbitrary integral and half-integral spin are given respectively.

Key words Bargmann-Wigner equation, high spin field equations, coordinate representation

---

Received 31 January 2001, Revise 22 May 2001

* Supported by NSFC (19947001, 19775044, 19991480), Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (97035807), BEPC National Lab. of China, Center for Theoretical Nuclear Physics of Lanzhou Heavy Ion Accelerator National Lab. of China and Natural Science Faundation of Anhui Education Committee (99JL0071)