

双参数形变谐振子湮没算符高次幂 本征态的反聚束效应

汪 仲 清¹⁾

(石油大学应用物理系, 东营 257061)

摘要 研究了双参数形变谐振子湮没算符高次幂($a_q^k, k \geq 3$)本征态的反聚束效应, 并就 $k=3$ 的情况运用数值计算方法研究了双参数形变对该效应的影响. 结果表明, 在双参数形变相干态中谐振子强度 $x = |\alpha|^2$ 的若干取值区间内, a_q^k 的本征态均可呈现反聚束效应, 并且明显地受到 qs 形变参数的影响.

关键词 双参数形变 算符 a_q^k 的本征态 反聚束效应

1 引言

近年来, 多参数形变量子群的研究^[1-7]广泛地受到人们的关注. 在文献[5]中, Chakrabarti 等人提出了双参数 qs 形变谐振子, 并构造了双参数形变谐振子湮没算符的本征态, 即 qs 相干态. 周焕强等人^[8]构造了双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态, 并利用 qs 积分证明了它们构成一个完备的表象. 王继锁等人^[9]又构造了双参数形变谐振子湮没算符高次幂 $a_q^k (k \geq 3)$ 的本征态, 并研究了其数学结构和性质^[10]. 本文在文献[10]的基础上进一步用数值计算方法研究双参数形变谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束效应.

2 双参数形变谐振子湮没算符高次幂的本征态

双参数形变谐振子的产生算符 a_q^\dagger 和湮没算符 a_q 以及数算符 N_q 满足如下的对易关系式^[8]:

$$a_q a_q^\dagger - s^{-1} q a_q^\dagger a_q = (sq)^{-N_q} \quad (1)$$

$$[N_q, a_q^\dagger] = a_q^\dagger, [N_q, a_q] = -a_q, \quad (2)$$

2000-11-21 收稿

1) E-mail: zqwang@mail. hdpu. edu. cn

其中 q 和 s 为两个形变参数. a_q, a_q^\dagger 和 N_q 作用于双参数 qs -Fock 空间 $||n\rangle_q, n=0, 1, 2,$

$$a_q^\dagger |n\rangle_q = \sqrt{[n+1]_q} |n+1\rangle_q, \quad (3)$$

$$a_q |n\rangle_q = \sqrt{[n]_q} |n-1\rangle_q, \quad (4)$$

$$N_q |n\rangle_q = n |n\rangle_q, \quad (5)$$

符号 $[n]_q$ 定义为

$$[n]_q = \frac{(s^{-1}q)^n - (sq)^{-n}}{s^{-1}q - s^{-1}q^{-1}} = s^{1-n} [n]_q, \quad (6)$$

显然, $[n]_q$ 在 $q \rightarrow q^{-1}$ 替换下保持不变, 且当 $s \rightarrow 1$ 时, $[n]_q \rightarrow [n]_q = (q^n - q^{-n}) / (q - q^{-1})$. $|n\rangle_q$ 定义为

$$|n\rangle_q = \frac{(a_q^\dagger)^n}{\sqrt{[n]_q!}} |0\rangle_q, \quad (7)$$

其中 qs 阶乘理解为 $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q$, 并规定 $[0]_q! = 1$, 则 ${}_q \langle m | n \rangle_q = \delta_{mn}$. qs -Fock 空间的完备性可表示为

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_q {}_q \langle n|, \quad (8)$$

按照文献[9], 双参数形变谐振子湮没算符高次幂 ($a_q^k, k \geq 3$) 的本征态 (k 重简并态) 可表示为

$$|\psi_j\rangle_q^k = [A(|\alpha|^2)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{kn+j}}{\sqrt{[kn+j]_q!}} |kn+j\rangle_q, \quad (9)$$

$$A_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn+j}}{[kn+j]_q!}, \quad (10)$$

式中 α 为复变量, $x = |\alpha|^2$ (对应双参数形变相干态中谐振子的强度), j 的可能取值为 $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

3 双参数形变谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束效应

3.1 a_q^k 本征态的反聚束效应

我们知道, 如果光场归一的二阶相关函数^[11] $g^{(2)}(0) < 1$, 则称光场呈现反聚束效应. 用类似的方法, 可以定义 qs 形变光场光子湮没算符高次幂本征态的二阶相关函数

$$g_{q,j}^{(2)}(0) = \frac{{}_q^k \langle \psi_j | a_q^{+2} a_q^2 | \psi_j \rangle_q^k}{|{}_q^k \langle \psi_j | a_q^+ a_q | \psi_j \rangle_q^k|^2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k-1),$$

若 $g_{q,j}^{(2)}(0) < 1$, 则称这种 qs 形变光场具有反聚束效应. 由(4)式, (9)式和(11)式通过计算可以得到

$$g_{q,0}^{(2)}(0) = \frac{{}_q^k \langle \psi_0 | a_q^{+2} a_q^2 | \psi_0 \rangle_q^k}{|{}_q^k \langle \psi_0 | a_q^+ a_q | \psi_0 \rangle_q^k|^2} = \frac{A_0 A_{k-2}}{A_{k-1}^2},$$

$$g_{\varphi,1}^{(2)}(0) = \frac{{}_q^k \langle \psi_1 | a_{\varphi}^{+2} a_{\varphi}^2 | \psi_1 \rangle_{\varphi}^k}{|{}_q^k \langle \psi_1 | a_{\varphi}^+ a_{\varphi} | \psi_1 \rangle_{\varphi}^k|^2} = \frac{A_1 A_{k-1}}{A_0^2}, \quad (13)$$

$$g_{\varphi,j}^{(2)}(0) = \frac{{}_q^k \langle \psi_j | a_{\varphi}^{+2} a_{\varphi}^2 | \psi_j \rangle_{\varphi}^k}{|{}_q^k \langle \psi_j | a_{\varphi}^+ a_{\varphi} | \psi_j \rangle_{\varphi}^k|^2} = \frac{A_{j-2} A_j}{A_{j-1}^2}, (j = 2, 3, \dots, k-1), \quad (14)$$

由(10)式可以知道,上述的 q_s 二阶相关函数是变量 $x = |\alpha|^2$ 的函数. 下面将证明,当变量 x 在某些区间内取值时, a_{φ}^k 的 k 个本征态具有反聚束效应.

将(10)式代入(12)式可以得到

$$g_{\varphi,0}^{(2)}(0) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn]_{\varphi}! [km - kn + k - 2]_{\varphi}!} \right) x^{km}}{x^k \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn + k - 1]_{\varphi}! [km - kn + k - 1]_{\varphi}!} \right) x^{km}} = \frac{f_{\varphi}(x)}{x^k \varphi_{\varphi}(x)}, \quad (15)$$

考虑到 $k \geq 3$, 并且当 $0 < s < 1$ 时, $[n]_{\varphi} > n$, 则有

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn]_{\varphi}! [km - kn + k - 2]_{\varphi}!} > \sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn + k - 1]_{\varphi}! [km - kn + k - 1]_{\varphi}!},$$

因此对于 $x > 0$ 的所有可能值, 均有 $f_{\varphi}(x) > \varphi_{\varphi}(x)$. 所以, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $g_{\varphi,0}^{(2)}(0) > 1$. 另一方面, 当 x 取较大值时, 即 $x^k > f_{\varphi}(x)/\varphi_{\varphi}(x)$ 时, 则有 $g_{\varphi,0}^{(2)}(0) < 1$. 在这种情况下, $|\psi_0\rangle_{\varphi}^k$ 态将呈现反聚束效应.

同样, 将(10)式代入(13)式可以得到

$$g_{\varphi,1}^{(2)}(0) = \frac{x^k \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn + 1]_{\varphi}! [km - kn + k - 1]_{\varphi}!} \right) x^{km}}{\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn]_{\varphi}! [km - kn]_{\varphi}!} \right) x^{km}} = \frac{x^k f'_{\varphi}(x)}{\varphi'_{\varphi}(x)}, \quad (16)$$

显然

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn + 1]_{\varphi}! [km - kn + k - 1]_{\varphi}!} < \sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn]_{\varphi}! [km - kn]_{\varphi}!},$$

所以 $f'_{\varphi}(x) < \varphi'_{\varphi}(x)$. 因此, 当 $x \leq 1$ 时, 有 $g_{\varphi,1}^{(2)}(0) < 1$, 即这时 $|\psi_1\rangle_{\varphi}^k$ 态将呈现反聚束效应.

将(10)式代入(14)式, 可将 $|\psi_j\rangle_{\varphi}^k (j = 2, 3, \dots, k-1)$ 态的二阶相关函数表示成

$$g_{\varphi,j}^{(2)}(0) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn + j - 2]_{\varphi}! [km - kn + j]_{\varphi}!} \right) x^{km}}{\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{[kn + j - 1]_{\varphi}! [km - kn + j - 1]_{\varphi}!} \right) x^{km}}, (j = 2, 3, \dots, k-1). \quad (17)$$

如果 $x < 1$, 则

$$g_{\varphi,j}^{(2)}(0) < \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{[j-2]_{\varphi}! [j]_{\varphi}!} x^{km}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{([km + j - 1]_{\varphi}!)^2}} < \frac{\frac{1}{[j-2]_{\varphi}! [j]_{\varphi}!} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^{km}}{\frac{1}{([j-1]_{\varphi}!)^2}},$$

以及

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)x^{km} = \frac{1}{(1-x^k)^2}.$$

因此, 当 $x < 1$ 时, 可以得到

$$g_{q,s,j}^{(2)}(0) < \frac{[j-1]_q}{[j]_q} \frac{1}{(1-x^k)^2}, \quad (j = 2, 3, \dots, k-1), \quad (18)$$

由(18)式可以看出, 当 x 足够小, 即当 $x^k \leq 1 - ([j-1]_q/[j]_q)^{1/2}$ 时, 有 $g_{q,s,j}^{(2)}(0) < 1$. 这时, $|\psi_j\rangle_q^k (j=2, 3, \dots, k-1)$ 态呈现反聚束效应. 例如, 当 $k=3$ 时, 若取 $q=s=1.0$, 可得当 $x \leq 0.664$ 时, 有 $g_{q,s,2}^{(2)}(0) < 1$; 当取 $q=s=0.5$, 可得 $x \leq 0.8207$ 时, $g_{q,s,2}^{(2)}(0) < 1$; 当 $q=s=0.01$ 时, $x \leq 0.997$ (可见当 $q=s \rightarrow 0$ 时, $x \rightarrow 1$), $|\psi_2\rangle_q^3$ 态也同样具有反聚束效应. 因此, 文献[10]的有关结果正确与否是值得商榷的, 因为并非当 $x \rightarrow 0$ 时, $|\psi_j\rangle_q^k (j=2, 3, \dots, k-1)$ 态才呈现反聚束效应. 事实上, $|\psi_j\rangle_q^k (j=2, 3, \dots, k-1)$ 态呈现反聚束效应的区间可在 $x > 1$, 甚至还可能大得多, 下面的数值计算将证实这一点.

3.2 a_q^k 本征态反聚束效应的数值计算研究

为简单起见, 在这里只研究 $k=3$ 的情况, 对于 $k > 3$ 的情形可以类似地进行研究. 在(12)–(14)式中, 取 $k=3$ 可得

$$g_{q,s,0}^{(2)}(0) = A_0 A_1 / A_2^2, \quad (19)$$

$$g_{q,s,1}^{(2)}(0) = A_1 A_2 / A_0^2, \quad (20)$$

$$g_{q,s,2}^{(2)}(0) = A_0 A_2 / A_1^2, \quad (21)$$

对(19)–(21)式所表示二阶相关函数进行数值计算, 结果精确到小于 10^{-6} . 图 1—3 分别是取 $q=1.0, 0.5, 0.1$, 和 $s=1.0, 0.5, 0.1$ 时, $g_{q,s,j}^{(2)}(0) (j=0, 1, 2)$ 随 x 的变化关系. 表 1 是 a_q^3 的本征态 $|\psi_j\rangle_q^3 (j=0, 1, 2)$ 可以呈现反聚束效应的区间. 其中当 $q=s=1.0$ 时的结果为通常无形变的情况^[12]. 由表 1 可以看出, 当参数 q 和 s 小于 1 时, 反聚束效应的区间发生了明显的变化. 对于 $g_{q,s,0}^{(2)}(0)$, $|\psi_0\rangle_q^3$ 态的反聚束效应呈现在 $x > 1$ 的区间, 随着 s 参数的变小, 反聚束效应的区间变大, 并且向 x 增大的方向移动; 对于 q 参数也有类似的变化趋势. 但是当 $s=1.0$ 而 q 取中间值(0.5)时, 呈现反聚束效应的区间前移, 这可能是由于 q 变量 $[n]_q$ 本身的特征所致. 在 q 和 s 参数的共同调节下, 反聚束效应的区间向 x 增大方向移动并且变大的结果是正确的.

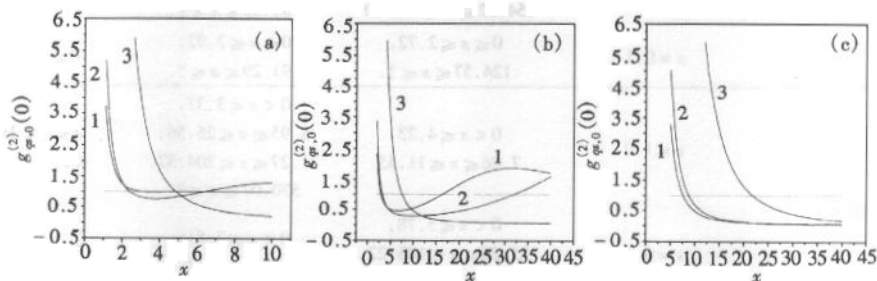


图 1 $g_{q,s,0}^{(2)}(0)$ 随 $x = |a|^2$ 的变化关系

(a) $s=1.0, q=1.0, 0.5, 0.1$; (b) $s=0.5, q=1.0, 0.5, 0.1$; (c) $s=0.1, q=1.0, 0.5, 0.1$

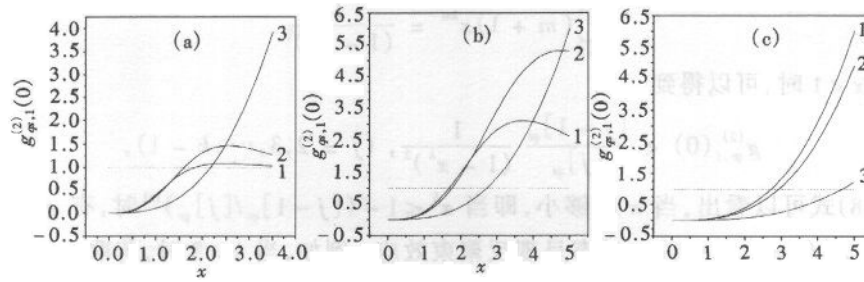


图 2 $g_{q,1}^{(2)}(0)$ 随 $x = |a|^2$ 的变化关系

图中图注同图 1

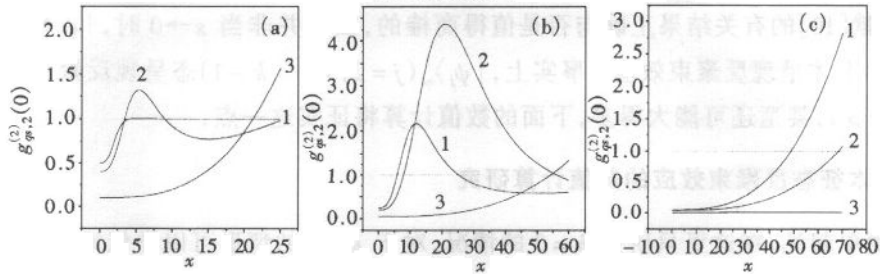


图 3 $g_{q,2}^{(2)}(0)$ 随 $x = |a|^2$ 的变化关系

图中图注同图 1

表 1 算符 a_q^3 的本征态可以显现反聚束效应的区间

	$q = 1.0$	$q = 0.5$	$q = 0.1$	
$g_{q,0}^{(2)}(0) < 1$	$s = 1.0$	$3.02 \leq x \leq 6.65,$ $10.29 \leq x \leq 13.38.$	$2.40 \leq x \leq 6.44,$ $17.84 \leq x \leq 51.10,$ $142.52 \leq x \leq 408.75,$ $1140.14 \leq x \leq ?.$	$4.84 \leq x \leq 211.52.$
	$s = 0.5$	$2.91 \leq x \leq 16.32,$ $63.84 \leq x \leq 244.46,$ $830.19 \leq x \leq ?.$	$3.21 \leq x \leq 31.91,$ $226.37 \leq x \leq ?.$	$7.55 \leq x \leq 1079.94.$
	$s = 0.1$	$7.54 \leq x \leq 698.01.$	$8.70 \leq x \leq 1409.94.$	$21.77 \leq x \leq ?.$
$g_{q,1}^{(2)}(0) < 1$	$s = 1.0$	$0 \leq x \leq 1.84,$ $5.45 \leq x \leq 9.06.$	$0 \leq x \leq 1.61,$ $4.57 \leq x \leq 12.80,$ $35.64 \leq x \leq 102.19,$ $285.04 \leq x \leq 817.50.$	$0 \leq x \leq 2.17,$ $48.24 \leq x \leq ?.$
	$s = 0.5$	$0 \leq x \leq 1.69,$ $9.27 \leq x \leq 42.12,$ $154.32 \leq x \leq 565.00.$	$0 \leq x \leq 1.76,$ $13.86 \leq x \leq 128.30,$ $906.36 \leq x \leq ?.$	$0 \leq x \leq 2.72.$
	$s = 0.1$	$0 \leq x \leq 2.72,$ $124.57 \leq x \leq ?.$	$0 \leq x \leq 2.92,$ $193.29 \leq x \leq ?.$	$0 \leq x \leq 4.65.$
$g_{q,2}^{(2)}(0) < 1$	$s = 1.0$	$0 < x \leq 4.23,$ $7.86 \leq x \leq 11.45.$	$0 < x \leq 3.37,$ $8.95 \leq x \leq 25.56,$ $71.27 \leq x \leq 204.37,$ $570.07 \leq x \leq ?.$	$0 < x \leq 21.15,$ $482.36 \leq x \leq ?.$
	$s = 0.5$	$0 < x \leq 5.78,$ $25.25 \leq x \leq 103.22,$ $361.86 \leq x \leq 1282.34.$	$0 < x \leq 7.81,$ $56.38 \leq x \leq 513.80.$	$0 < x \leq 54.00.$
	$s = 0.1$	$0 < x \leq 48.65$	$0 < x \leq 68.14$	$0 < x \leq 467.29$

注:表中为“?”号者是一个较大的数字

对于 $g_{q,1}^{(2)}(0)$, $|\psi_1\rangle_q^3$ 态呈现反聚束效应的第一区间在 $x \geq 0$ 小于某一值的范围, 除 $s = 1.0$ 和 $q = 0.5$ 这一情形, 随着 q 参数偏离 1 越大和 s 参数的变小, 呈现反聚束效应的区间变大; 对于 $g_{q,2}^{(2)}(0)$, $|\psi_2\rangle_q^3$ 态呈现反聚束效应的第一区间在 $0 < x < \text{大于} 1$ 的某一值, 除 $s = 1.0$ 和 $q = 0.5$ 这一区间变小外, 随着参数 q 偏离 1 越大和 s 的值变小, 这个区间可以变得很大, 这也证明了 3.1 节的推论是正确的. 由表 1 还可以看出, a_q^3 的本征态 $|\psi_j\rangle_q^3$ ($j = 0, 1, 2$) 可以在 x 取值的多个区间呈现反聚束效应, 并且第二区间及以后的区间比第一区间大得多. 在计算中还发现, 当 $q = s = 1.0$ 以及 x 分别等于 13.39, 9.07 和 11.46 时, 所对应的 $g_{q,0}^{(2)}(0)$, $g_{q,1}^{(2)}(0)$ 和 $g_{q,2}^{(2)}(0)$ 的值在 10^{-6} 的精度范围内等于 1, 这与相干态的结果相同.

4 结论

本文利用数值计算方法研究了双参数形变谐振子高次幂本征态 $|\psi_j\rangle_q^k$ ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$) 的反聚束效应. 结果表明, 在双参数形变相干态中谐振子强度 $x = |\alpha|^2$ 的某些取值区间内, a_q^k 的本征态均可呈现反聚束效应, 并且明显地受到形变参数 q 和 s 的影响. 对于 $k = 3$ 的情况, $|\psi_0\rangle_q^3$ 态的反聚束效应呈现在 $x > 1$ 的某些区间内, 除个别情形外, 随着 q 偏离 1 越大和 s 参数值的变小, 这些区间变大并向 x 增大的方向移动; 而 $|\psi_1\rangle_q^3$ 和 $|\psi_2\rangle_q^3$ 态呈现反聚束效应的第一区间在 $0 < x < \text{大于} 1$ 的某一值, 随着参数 q 偏离 1 越大和 s 的值变小, 反聚束效应的第一区间可以变得很大, 并且 a_q^3 的本征态 $|\psi_j\rangle_q^3$ ($j = 0, 1, 2$) 的反聚束效应还可以在 x 取值的多个区间内出现.

本文研究的双参数形变谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束效应同时包含了通常谐振子湮没算符高次幂本征态 ($q = s = 1$)^[12,13] 和单参数形变谐振子湮没算符高次幂本征态 ($s = 1, q \neq 1$)^[14] 的情形. 这说明由双参数形变谐振子湮没算符高次幂本征态所构成的体系, 比通常的或单参数形变情况下的谐振子湮没算符高次幂本征态所构成的体系具有更广泛的物理内涵. 由于这种体系的性质明显地受参数 q 和 s 的调控, 如果这种体系在实验上实现, 便可通过计算分别控制参数 q 和 s 来控制场的某些量子统计特性, 因此这种研究具有潜在的重要应用前景, 值得人们深入研究.

参考文献 (References)

- 1 Demidov E. E., Manin Yu. I., Mukin E. E. et al. Prog. Theor. Phys. Supp. 1990, **102**:302
- 2 Sudbery A. J. Phys. 1990, **A23**:1697
- 3 Schirramcher A., Wess J., Zumino B. J. Phys., 1991, **C49**:317
- 4 Burdik C., Hlavaty L. J. Phys., 1991, **A24**:165
- 5 Chakrabarti R., Jagannathan R. J. Phys., 1991, **A24**:L711
- 6 Jing S. Mod. Phys. Lett., 1993, **A8**:543
- 7 YU Zhao-Xian, LIU Ye-Hou et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1995, **19**:258 (in Chinese)
(于肇贤, 刘业厚等. 高能物理与核物理, 1995, **19**:258)
- 8 ZHOU Huan-Qiang, HE Jing-Song et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. 1995, **19**:251 (in Chinese)
(周焕强, 贺劲松等. 高能物理与核物理, 1995, **19**:251)

- 9 WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1996, **20**:703 (in Chinese)
(王继锁, 孙长勇等. 高能物理与核物理, 1996, **20**:703)
- 10 WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1997, **21**:793 (in Chinese)
(王继锁, 孙长勇等. 高能物理与核物理, 1997, **21**:793)
- 11 Walls D F. Nature, 1983, **306**:141
- 12 PENG Shi-An, GUO Guang-Can. Acta Physica Sinica, 1990, **39**:51 (in Chinese)
(彭石安, 郭光灿. 物理学报, 1990, **39**:51)
Sun J Z, Wang J S, Wang C K. Phys. Rev., 1991, **A44**:3369
Wang J S, Wang C K, He J Y. Phys. Lett., 1995, **A199**:137

Antibunching Effect for the Eigenstates of the Higher Powers of the Annihilation Operator of Two-Parameter Deformed Harmonic Oscillator

WANG Zhong-Qing¹⁾

(Department of Applied-physics, University of Petroleum, Dongying 257061, China)

Abstract The antibunching effect for the eigenstates of the k -th powers of the annihilation operator of two-parameter deformed harmonic oscillator (a_q^k , $k \geq 3$) is studied. Using the numerical method, we have studied the influences of the two parameter (qs) deformation on the effect in the case of $k = 3$. It is shown that the eigenstates of a_q^k have antibunching effect when $x = |\alpha|^2$, which reflects the intensity of the two-parameter deformed light field, is in values of certain intervals. The effect is evidently influenced by the values of parameters q and s .

Key words two-parameter deformation, eigenstates of operator a_q^k , antibunching effect

Received 21 November 2000

1) E-mail: zqwang@mail. hdpu. edu. cn